LOS SISTEMAS POSITIVOS EN LA INGENIERÍA

Andrés Quintero Zea*
Marisol Osorio Cárdenas**

Recibido: 25/09/2009
Aceptado: 07/05/2010

RESUMEN

Los sistemas positivos son sistemas en los que las variables de estado sólo toman valores positivos o no negativos. En este artículo de revisión se describe este tipo de sistemas por medio del establecimiento de sus principales propiedades estructurales y la exposición de algunas de sus aplicaciones.

Palabras clave: sistemas positivos, modelos en espacio de estados, problema de la realización positiva, alcanzabilidad.

* Ingeniero electrónico, especialista en Automática de la Universidad Pontificia Bolivariana. Docente en la Universidad de Medellín. Medellín, Colombia. Principales áreas de interés: Teoría Electromagnética, Teoría de Señales y Sistemas. E-mail: aquintero@udem.edu.co,

** Doctora en Ingeniería Eléctrica, área Control, por la Universidad Nacional Autónoma de México. Docente en la Universidad Pontificia Bolivariana. Medellín, Colombia. Principales áreas de interés: Docencia en Control Automático, Observadores, Control no Lineal. E-mail: marisol.osorio@correo.upb.edu.co

POSITIVE SYSTEMS IN ENGINEERING

ABSTRACT

Positive systems are systems in which the state variables are always positive or non negative in value. In this review paper, we describe such systems through the establishment of its main structural properties and the exposure of some of its applications.

Key words: Positive systems, Positive realization problem, Reachability, State-space model.

INTRODUCCIÓN

Los sistemas positivos (SP) son sistemas cuyas variables de estado toman sólo valores positivos, o por lo menos no negativos, es decir, que incluyen el cero [1-5]. Esta situación produce trayectorias de estado que permanecen en el ortante no negativo ante una entrada no negativa, siempre que se parta de un estado inicial no negativo [1, 3, 4]. El acotamiento de las trayectorias hace que, en muchos casos, su tratamiento se simplifique con respecto al de sistemas más generales.

Los SP son de particular interés debido a la amplia variedad de contextos en los que se pueden encontrar: procesos industriales donde existan reactores químicos o intercambiadores de calor; sistemas jerárquicos, comportamentales, económicos, sociales [1]; sistemas de modelamiento farmacocinético; problemas de control de congestión en sistemas TCP [5] y en general, sistemas que procesen una "variable que represente cualquier tipo de recurso medido por una cantidad positiva [3]. También es posible incluir entre los SP a los sistemas eléctricos o mecánicos, puesto que, bajo condiciones especiales, es posible hallar realizaciones positivas de ellos [1].

Las investigaciones de SP están enfocadas, en su mayoría, a dos temas: las propiedades estructurales (alcanzabilidad y controlabilidad principalmente) [5], debido a la simplificación que se logra de los análisis de estas propiedades mediante el uso de los teoremas de Frobenius–Perrón [1] que afirman que al tenerse una matriz A de $n \times n$ no negativa siempre es posible encontrar una región de acotamiento de los valores propios de la matriz [6] ; y el problema de la realización positiva [3-5], que consiste en hallar condiciones que permitan encontrar a la representación positiva de un sistema dinámico con respuesta impulsiva positiva [7].

Para un desarrollo exitoso de tales investigaciones, y el aprovechamiento adecuado de los conceptos desarrollados, es imperativo comprender la caracterización y aplicabilidad de los SP en las diferentes áreas, en especial en el área de la automatización, de donde surge la necesidad de una revisión de la bibliografía existente que, al día de hoy, es extensa y se encuentra disgregada. Por tal motivo en este artículo se realiza un compendio de los tópicos principales para el trabajo con los SP.

El presente artículo se organiza de forma tal que se exponen los conceptos teóricos y matemáticos necesarios para el trabajo con SP en la sección 2; en la sección 3 se presentan las propiedades estructurales de estos sistemas; en la sección 4 se enumerarán algunas aplicaciones en diferentes áreas, y algunas conclusiones sobre el trabajo realizado se presentan en la sección 5.

1 DEFINICIONES BÁSICAS

Es esta sección se presentan las definiciones y conceptos teóricos y matemáticos necesarios para el entendimiento básico de los SP, tomando como base los trabajos realizados por [1, 8-12] y teniendo en cuenta los dos enfoques fundamentales que se usan en la literatura.

1.1 *Enfoque de variables de estado*

Este es el más usado en el área de automatización debido a su facilidad de aplicación a sistemas dinámicos.

Las definiciones que se presentan a continuación son aplicables a un sistema lineal invariante en el tiempo, de dimensión finita, con una entrada y una salida, que es aquel que se rige por las ecuaciones de estado

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \tag{1}$$

$$y\left(t\right) = c^T x(t), \tag{2}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $b, c, x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ [1].

Matriz estrictamente positiva. Una matriz F que cumpla $F : F \gg 0(f_{ij} > 0 \forall (i,j))$, es llamada estrictamente positiva [1].

Matriz positiva. En el caso en que la matriz F cumpla con $F : F \geq 0(f_{ij} \geq 0 \forall \left(i,j\right), \exists \left(i,j\right) : f_{ij} > 0)$, se le conoce como *positiva* [1].

Matriz no negativa. Una matriz F *no negativa* es aquella en la que $F : F \geq 0(f_{ij} \geq 0 \forall (i,j))$ [1].

Matriz diagonal estrictamente positiva. Una matriz diagonal es *estrictamente positiva* cuando todos los términos de la diagonal son mayores que cero [1].

Matriz Metzler. Una matriz es llamada *Metzler* si todos sus elementos por fuera de la diagonal son valores no negativos y al menos uno de estos no es cero [10].

Condiciones de Positividad. Un sistema lineal continuo es positivo si y sólo si la matriz A es *Metzler* y $b \geq 0, c^T \geq 0^T$ [1,9].

Los dos conceptos que siguen son importantes para el análisis de estabilidad y realizabilidad de SP:

Menor líder. Los menores líderes m_{ih} de una matriz M, de dimensión $n \times n$, son los determinantes de las matrices de dimensión $i \times i$, con i desde 1 hasta n, obtenidas al borrar de M $n-i$ filas y las correspondientes columnas [1].

Primer menor líder. El primer menor líder m_{ij} de M es el menor resultante al borrar las últimas $n-i$ filas y sus respectivas columnas [1].

1.2 Enfoque comportamental

El segundo enfoque es el basado en el análisis de sistemas comportamentales; es decir, aquellos sistemas dinámicos cuyos modelos describen el comportamiento de alguna variable en el tiempo. Estas variables son por lo general de tipo biológico o económico [13], lo que hace a este enfoque menos aplicable en el área de la automatización, sin embargo, es interesante presentar como referencia las definiciones básicas.

Sistema Dinámico. Se define un sistema dinámico mediante la tripleta $\sum = \left(\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}^q, \mathfrak{B}\right)$, donde $\mathbb{Z}_+$ representa *el conjunto de tiempo* $t \in (0, t^+)$, $\mathbb{R}^q$ el *espacio de señales* y $\mathfrak{B} \subseteq \left(\mathbb{R}^q\right)^{\mathbb{Z}_+}$ el *comportamiento*, donde $\left(\mathbb{R}^q\right)^{\mathbb{Z}_+}$ denota el conjunto de todas las funciones definidas en $\mathbb{Z}_+$ que toman sus valores en $\mathbb{R}^q$ [12].

Conjunto cerrado. Un conjunto $S \subseteq \left(\mathbb{R}^q\right)^{\mathbb{Z}_+}$ es cerrado cuando $w^i \in S$ y $w^i \to w$ implican $w \in S$ *[11].*

Comportamiento. $\mathfrak{B} \subseteq \left(\mathbb{R}^q\right)^{\mathbb{Z}_+}$ es un comportamiento, es decir, el conjunto de trayectorias que son compatibles con el sistema, si [12]:

1. $\mathfrak{B}$ es un subespacio lineal,
2. $\mathfrak{B}$ es cerrado y
3. $\sigma\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$, donde σ es un operador de desplazamiento [11].

Comportamiento autónomo. $\mathfrak{B} \subseteq \left(\mathbb{R}^q\right)^{\mathbb{Z}_+}$ es llamado *autónomo* si $\mathfrak{B}$ es de dimensión finita [11].

Comportamiento no negativo. $\mathfrak{B} \subseteq \left(\mathbb{R}^q\right)^{\mathbb{Z}_+}$ es llamado *no negativo* si existen $m \in \mathbb{N}$ para los que $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\left(w^1, w^2, \ldots, w^m\right)$, con todos los w^i positivos [11, 12].

Realización. Para un comportamiento

$$\mathfrak{B} = \left\{ w \in \left(\mathbb{R}^q\right)^{\mathbb{Z}_+} : \exists x\left(0\right), x\left(t+1\right) = Ax\left(t\right), \right. \\ \left. w\left(t\right) = Cx\left(t\right), t \in \mathbb{Z}_+ \right\}$$

el par $\left(A \in \mathbb{R}^{n \times n}, C \in \mathbb{R}^{q \times n}\right)$ se conoce como una *realización n-dimensional* de $\mathfrak{B}$ [12].

Realización positiva. Un comportamiento autónomo $\mathfrak{B} \subseteq \left(\mathbb{R}^q\right)^{\mathbb{Z}_+}$ es realizable positivamente si existe una realización $\left(A_+, C_+\right)$, con A_+ y C_+ matrices positivas [12].

2 PROPIEDADES ESTRUCTURALES

Las principales propiedades estructurales de los SP son: estabilidad, observabilidad, alcanzabilidad y realizabilidad. Su análisis se simplifica considerablemente con respecto al de los sistemas no positivos o con respresentaciones no positivas, debido al acotamiento de las trayectorias de estado.

2.1. Estabilidad

Las propiedades de estabilidad definidas están basadas en la simplificación del criterio de RouthHurwitz y el teorema de Liapunov, usados para determinar la estabilidad de sistemas dinámicos.

Condiciones de estabilidad asintótica. Un sistema lineal $\dot{x}\left(t\right) = Ax(t)$ es asintóticamente estable si y sólo si los coeficientes del polinomio característico $\triangle_A\left(\lambda\right) = \det(\lambda I - A)$, son positivos. Para el caso de un SP la estabilidad asintótica se puede determinar sin calcular los coeficientes del polinomio característico. Basta con calcular los primeros n menores líderes de la matriz $\left(-A\right)\left(I - A\right)$ y que estos sean positivos para que el sistema sea asintóticamente estable [1] y en el caso en que los coeficientes del polinomio característico sean conocidos no sería necesario plantear el arrreglo de Routh–Hurwitz. Basta con que los del polinomio característico $\triangle_A\left(\lambda\right)\triangle_{A-I}\left(\lambda\right)$ sean positivos [1].

Estabilidad en el sentido de Liapunov. El teorema de Liapunov establece que un sistema lineal $\dot{x}\left(t\right) = Ax(t)$ es asintóticamente estable si y sólo si existe una función cuadrática definida positiva $V\left(t\right) = x^T Px$ estrictamente decreciente $\left(\dot{V} < 0\right)$. Para el caso de los SP el teorema se restringe sólo a las funciones cuadráticas puras, es decir no contiene las formas $x_i x_j, i \neq j$. Así, un SP es asintóticamente estable si y sólo si existe una matriz P diagonal estrictamente positiva tal que $A^T P + PA\left(A^T PA - P\right)$ es definida negativa [1].

2.2 Alcanzabilidad

Una de las ventajas de un sistema positivo es que los conjuntos de estados a los que se espera poder acceder en un tiempo determinado están restringidos por la misma naturaleza de los sistemas, pues los estados no pueden salir del ortante positivo. Esto hace que en vez del concepto de controlabilidad, más estricto, para sistemas positivos pueda hablarse de *alcanzabilidad*.

Para un sistema lineal descrito por la ecuación (1), se dice que un estado $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ es *alcanzable en un tiempo finito* $T \in \mathbb{R}_+, T > 0,$ si existe una función de entrada, continua por partes $\mathbf{u} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^n$ que lleve la trayectoria de estado desde $x\left(0\right) = 0$ hasta $x\left(T\right) = x_f.$ El sistema en (1) es *alcanzable en un tiempo finito* si cada estado $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ es alcanzable en algún tiempo $T = T\left(x_f\right), T > 0,$ además es *fuertemente alcanzable* si para cada $T > 0$ y cada $x_f \in \mathbb{R}_+^n$ el estado x_f puede ser alcanzado en el tiempo T [5]. Para el caso en que (1) sea un SP, el sistema es alcanzable si y sólo si los primeros n vectores de alcanzabilidad $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$ son linealmente independientes [1].

Además, para un sistema lineal el conjunto de alcanzabilidad $X_r(t)$, es decir el conjunto de los estados alcanzables desde el origen en un tiempo t, es un subespacio lineal y el conjunto X_r, de los estados alcanzables en un tiempo finito, es un subespacio de los primeros n vectores de alcanzabilidad $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b.$ En el caso en que el sistema sea positivo, los conjuntos de alcanzabilidad $X_r(t)$ y X_r presentan características geométricas interesantes. Entre ellas, está el hecho de que siempre pueden caracterizarse como si fueran conos, definidos como:

Cono. Un cono es un conjunto $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$ que está sujeto a $\alpha\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ y se representa como $\mathrm{cone}(v_1, \ldots, v_M)$, donde v_i son los vectores que forman las aristas de $\mathcal{K}$ [3].

Cono sólido. Un cono $\mathcal{K}$ es llamado *sólido* si contiene una bola abierta de $\mathbb{R}^n$ [3].

Cono apuntado. Sea un cono $\mathcal{K}$, si $\mathcal{K} \bigcap \left\{-\mathcal{K}\right\} = \left\{0\right\}$ entonces $\mathcal{K}$ es llamado *apuntado* [3].

Cono propio. Todo cono cerrado, convexo, sólido y apuntado es llamado *propio* [3].

Cono poliédrico. Sea un cono $\mathcal{K}$, si $\mathcal{K}$ puede ser expresado como la intersección de una familia finita de semiespacios cerrados entonces $\mathcal{K}$ es llamado *poliédrico*, es decir se puede expresar como $\text{cone}(v_1,\ldots,v_M)$, con $M < \infty$ [3].

2.3 Observabilidad

La observabilidad de los sistemas positivos se simplifica al estudiarla desde el principio de dualidad, que establece que un sistema $\sum = \left(A, b, c^T\right)$ es alcanzable si y sólo si su dual $\sum = \left(A^T, c, b^T\right)$ es observable, así un SP es observable si y sólo si los primeros n vectores de observabilidad $c, A^T c, \ldots, \left(A^T\right)^{n-1} c$ son linealmente independientes [1].

2.4 Realizabilidad

El problema de la realización positiva se remonta a la década de los años 50 y su primera aplicación fue a la solución del problema de identificabilidad de los modelos ocultos de Markov [3]. Consiste en hallar una representación positiva en el espacio de estados, a partir de una función de transferencia dada, que además cumpla con condiciones de minimalidad, *i.e.* alcanzable y observable, y de existencia; y que, a partir de tal representación, sea posible su construcción o síntesis [3, 7, 14, 15].

La realización positiva del sistema depende de la existencia de un cono de alcanzabilidad $\mathcal{R} = cone\left(b, Ab, A^2b, \ldots, A^M b\right)$ propio y poliédrico, en tal caso el sistema será realizable mediante una representación de orden $M+1$ [3].

3 APLICACIONES

En esta sección se presentan algunas aplicaciones en las que se hace uso de los SP para la solución de problemas en diferentes áreas del conocimiento.

3.1 Implementación de filtros

(Según trabajo presentado por L. Benvenuti et al. [16]).

Los filtros discretos que tienen una representación en variables de estado y que están caracterizados con matrices con elementos no–negativos son conocidos como *filtros positivos* (FP) y su principal característica es una respuesta impulso positiva, lo que hace que su desempeño sea restringido, ya que los filtros convencionales (Butterworth, Chebyshev, Bessel o Cauer) no tienen restricción de signo en su respuesta natural, además, la aproximación de un filtro dado como la combinación de FP conlleva en la mayoría de los casos a desempeños insatisfactorios.

Sin embargo, los FP son de obligada utilización cuando se implementan por medio de redes de enrutamiento de carga (*CRN* del inglés *Charge Routing Networks*), que consisten en el arreglo de dispositivos electrónicos de estado sólido del tipo MOS y, que ante la aplicación de una secuencia de reloj, mueven cantidades de carga eléctrica de manera controlada a través del sustrato semiconductor permitiendo así la realización de una cantidad amplia de funciones electrónicas como almacenamiento de datos, procesamiento de señales u operaciones lógicas. Este tipo de redes fueron introducidos por [17].

La necesidad de trabajar con *CRN* como FP radica en que ofrecen la posibilidad de lograr procesamiento digital de señales en un chip de menor peso, menor tamaño, bajo consumo de energía y una mayor fiabilidad con respecto a un filtro digital equivalente; además, la naturaleza sincrónica de las *CRN* concuerda con las operaciones de filtrado digital que se llevan a cabo de manera sincrónica, pero al estar las *CRN* construidas con dispositivos MOS se elimina la necesidad de una etapa de conversión análogo a digital. Las ventajas anteriormente descritas llevan a pensar en la conveniencia de implementar un filtro no-positivo como la combinación de varias *CRN*, combinación que debe ser del tipo sustracción o realimentación, ya que se deben obtener respuestas impulsivas sin restricción de signo a la salida, y la suma o multiplicación de varias *CRN* resultaría en un nuevo sistema con respuesta natural positiva.

3.2 Modelamiento y estabilización de sistemas biológicos

Presentado en la tesis de grado de L. Mailleret [9].

SP mal conocidos. Los SP encuentran aplicación en el control y estabilización de sistemas biológicos. Tómese el caso de un estanque de pesca que puede ser modelado como

$$\dot{x} = \varphi\left(x\right) - ux, \varphi y u \geq 0 \tag{3}$$

Donde x representa el número de peces en el estanque, φ la natalidad y u la pesca. Este modelo evidencia la existencia de fenómenos biológicos dominados donde operadores externos, en este caso los pescadores, permiten modificar el comportamiento del proceso, lo que dificulta la posibilidad de expresar estos fenómenos biológicos analíticamente. El sistema descrito por (3) es conocido como *SP mal conocido* ya que es difícil expresar de manera analítica la tasa de natalidad de los peces. Por el contrario, la tasa de pesca es controlada y se puede expresar fácilmente de forma matemática. Así la ecuación (3) puede ser reescrita como la suma de dos partes: Una parte *fiable* y una parte *mal conocida*; en forma general cualquier sistema que cumpla características similares puede ser escrito como

$$\dot{x} = \underbrace{f(x,u)}_{\text{Parte fiable}} + \underbrace{\phi(x)}_{\text{Parte mal conocida}}. \tag{4}$$

Los sistemas descritos por (4) son muy comunes en la biología. Otros casos son los biorreactores y los modelos epidemiológicos relacionados con vacunaciones.

SP cuasi–lineales. Un sistema positivo cuasi-lineal en $\mathbb{R}^n$ es aquel de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = u\left[Ax + b\right] + c\psi(x) \\ x_0 \gg 0 \end{cases}, \tag{5}$$

donde $c\psi(x)$ se conoce sólo de forma cualitativa y que verifica las condiciones:

i) A es una matriz $n \times n$ *Metzler* y estable;

ii) b y c con vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que: $b \geq 0$ y $\exists \beta_m \in \mathbb{R}^+, \forall \beta > \beta_{m,} \beta b + c \gg 0$;

iii) $\psi(\cdot)$ es una función de clase $\mathcal{C}^1 : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $\forall i \in \left[1 \ldots n\right]$, $c_i \psi\left(x\big|_{x_i=0}\right) \geq 0$ y $\forall x \gg 0, \psi\left(x\right) > 0$;

iv) la entrada u es escalar positivo.

SP cuasicooperativos. Un sistema positivo cuasi-cooperativo en $\mathbb{R}^n$ es de la forma

$$\begin{cases} \dot{x} = uf(x) + c\psi(x) \\ x_0 \gg 0 \end{cases}, \tag{6}$$

y cumple con las siguientes condiciones:

(i) $f(\cdot)$ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $Df\left(x\right) = \left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\forall i,j}$ sea Metzler para todo x;

(ii) si $0 \leq x_1 \leq x_2$, entonces $Df(x_1) \geq Df(x_2)$;

(iii) c es un vector en $\mathbb{R}^n$. $f(0) \geq 0$ y $\exists \beta_m \in \mathbb{R}^+$, $\forall \beta > \beta_{m,} \beta f(0) + c \gg 0$;

iv) $\exists \bar{x} \gg 0$ tal que $\forall \beta > \beta_{m,} \beta b + c \gg 0$;

v) $\psi(\cdot)$ es una función de clase $\mathcal{C}^1 : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $\forall i \in \left[1 \ldots n\right]$, $c_i \psi\left(x\big|_{x_i=0}\right) \geq 0$ y $\forall x \gg 0, \psi\left(x\right) > 0$;

vi) la entrada u es escalar positivo.

Estabilización de SP mal conocidos. Los sistemas descritos por (5) y (6) son estabilizables si, al ser expresados de la forma

$$\dot{x} = f\left(x\right) + ug(x), \tag{7}$$

existe un espacio de alcanzabilidad local en el tiempo T, denotado por $\mathcal{R}_T(x)$ y definido como $\mathcal{R}_T\left(x\right) = vect\left\{g\left(x\right),\left[f,g\right]\left(x\right),\left[f,\left[f,g\right]\right]\left(x\right),\left[g,\left[f,g\right]\right]\left(x\right),\ldots\right\}$, donde $[f,g]$ representa el paréntesis de Lie $\left[f,g\right] = L_f g\left(x\right) - L_g f(x)$, genéricamente de dimensión igual al del espacio de estados.

3.3 Sistemas de compartimiento (compartimentales)

Muchas de las aplicaciones en ingeniería de procesos involucran una clase sistemas positivos conocidos como sistemas de compartimiento, los cuales consisten en una serie finita de subsistemas interconectados, llamados compartimientos, que interactúan entre ellos, cumplen condiciones de conservación de masa y tanto las variables de estado como las entradas están limitadas a permanecer en trayectorias no negativas [2] y [18].

Un sistema lineal como el descrito por (1) y (2) es de compartimiento si se cumple que

$$b_i \geq 0, c_i \geq 0, \tag{8}$$

$$a_{ij} \geq 0 para i \neq j \tag{9}$$

$$a_{ii} + \sum_{j \neq i} a_{ji} \leq 0, \tag{10}$$

con $i, j = 1 \ldots N$, a_{ij}, las entradas de la matriz A, b_i y c_i las entradas de b y c respectivamente. En este tipo de sistemas las variables de estado $x_i(t)$ representa la cantidad de recursos presente en el compartimiento i, las entradas $a_{ij}(i \neq j)$ es la razón de entrada de flujo desde el compartimiento j-ésimo al i-ésimo [2].

Es claro que las limitaciones establecidas por (8) y (9) definen a este tipo de sistemas como positivo.

4 CONCLUSIONES

La simplificación que puede obtenerse al considerar positivo un sistema hace que sea de interés estudiar los conceptos relacionados con SP.

En este artículo se hizo una presentación concisa de los tópicos necesarios para el trabajo con SP mediante una definición de términos básicos y el compendio de condiciones para las propiedades estructurales. De igual manera se presentaron dos ejemplos de su aplicación para la solución de problemas reales. Se hizo claridad en la simplificación de los cálculos matemáticos al momento de trabajar con este tipo de sistemas en comparación con un sistema no–positivo.

REFERENCIAS

[1] L. Farina, y S. Rinaldi, *Positive Linear Systems: Theory and applications*: John Wiley & Sons, 2000.

[2] L. Benvenuti, y L. Farina, "Positive and compartmental systems," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 47, no. 2, pp. 370-373, 2002.

[3] L. Benvenuti, y L. Farina, "A tutorial on the positive realization problem," *IEEE Transactions on Automatic Control,* vol. 49, no. 5, pp. 651-664, 2004.

[4] L. Benvenuti, "The positive realization problem: Past and future challenges," *Lecture Notes in Control and Information Science*, no. 341, pp. 11-18, 2006.

[5] M. E. Valcher, "On the reachability properties of continuous-time positive systems," en 16th Mediterranean Conference on Control and Automation, Ajaccio, France, 2008, pp. 990-995.

[6] A. Berman *et al.*, *Nonnegative Matrices in Dynamic Systems*: Wiley-Interscience, 1989.

[7] L. Farina, "On the existence of a positive realization," *Systems & Control Letters,* vol. 28, pp. 219-226, 1996.

[8] A. Herrero *et al.*, "Nonnegativity of control singular systems via state-feedbacks," en *Proceedings on the second Multidisciplinary International Symposium on Positive Systems: Theory and Applications (POSTA 06)*, Springer, 2006, pp. 25-32.

[9] L. Mailleret, "*Stabilisation Globale de Systèmes Dynamiques Positifs Mal Connus Applications en Biologie*," Université de Nice - Sophia Antipolis, 2004.

[10] L. Benvenuti, y L. Farina, "Eigenvalue regions for positive systems," *Systems & Control Letters,* vol. 51, pp. 325-330, 2004.

[11] J. W. Nieuwenhuis, "When to call a linear system nonnegative," *Linear Algebra and its Applications,* vol. 281, pp. 43-58, 1998.

[12] M. E. Valcher, "Positive systems in the behavioral approach: main issues and recent results," en Electronic proceedings of MTNS 2002, 2002.

[13] E. Zerz, "Behavioral systems theory: A survey," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science,* vol. 18, no. 3, pp. 265-270, 2008.

[14] J. M. Van Den Hof, "Realization of positive linear systems," *Linear Algebra & its Applications,* vol. 256, pp. 287-308, 1997.

[15] K. H. Förster, y B. Nagy, "Nonnegative realizations of matrix transfer functions," *Linear Algebra and its Applications,* vol. 311, pp. 107-129, 2000.

[16] L. Benvenuti *et al.*, "Filtering through combination of positive filters," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I,* vol. 46, no. 12, pp. 1431, 1999.

[17] A. Gersho, y B. Gopinath, "Charge-routing networks," *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, vol. CAS-26, pp. 2, 1979.