

# CÓMO MEDIR LA INCERTIDUMBRE DE MEDIR

Mónica I. Grasso\*

**RESUMEN:** Calcular la incertidumbre de medición se ha transformado gradualmente en una exigencia de los sistemas de calidad actuales, tanto de gestión como de competencia de laboratorios. Se presentan en este artículo las definiciones de incertidumbre internacionalmente aceptadas y dos técnicas de distinta complejidad para llevar a cabo su medición.

**ABSTRACT:** *On measuring the uncertainty of measuring*

The assessment of the uncertainty of measuring has gradually become a requirement among current quality control systems, both at the management and laboratory control levels. This paper includes uncertainty definitions used worldwide as well as two techniques of different complexity to perform its measurement.

## Introducción

Vivimos la era de la satisfacción del cliente, la capacidad de los procesos, los sistemas integrados, el control de gestión y tantos términos más que nos llegan del mundo de la calidad, el Total Quality Management de los anglosajones o la cada vez más popular Gestión de Calidad o Calidad Total de los que hablamos castellano.

Ideas rectoras que se repiten en otros enfoques como la Gestión del Conocimiento de las relaciones laborales, o el HCCP (Sistema de Análisis de Riesgo y Puntos Críticos de Control) de la industria alimenticia, mostrándonos que la inquietud por estos temas flota en el ambiente desde las postrimerías del siglo pasado, motivada por la imperiosa necesidad de la industria y los negocios de ser cada vez más eficaces y eficientes.

La nueva versión de la Norma ISO 9001 “Sistemas de gestión de calidad - Requisitos” establece que la empresa “**debe** planificar e implementar los procesos de seguimiento, *medición*, análisis y mejora necesarios”, y como sabemos los requisitos de dicha norma son obligatorios para todas las empresas que quieran gozar de las ventajas de la certificación. Por otra parte la Norma ISO 17025 “Requerimientos generales para la competencia de laboratorios de ensayos y calibración” en el punto 5.4.6.1 establece “Un laboratorio de calibración, o de ensayo que realiza sus propias calibraciones, debe tener y debe aplicar un procedimiento para estimar la incertidumbre de la medición para todas las calibraciones y todos los tipos de calibraciones”. Los procesos de mejora y las decisiones se deben basar en cifras, en mediciones, pero no alcanza con medir, debemos hacerlo correctamente, con medida de la incertidumbre.

---

\* Mónica I. Grasso es graduada en Estadística y Especialista en Calidad Industrial. Quality Manager y Auditora (Deutsche Gesellschaft für Qualität). Profesora Titular de Estadística, Teoría de la Decisión y Técnicas Cuantitativas Aplicadas en la Universidad del Centro Educativo Latinoamericano. Profesora Adjunta de la Universidad Tecnológica Nacional y de la Universidad Católica Argentina. Presta servicios de capacitación relacionados con su especialidad en diversas empresas.

Antes de encarar el mejoramiento de un proceso o un esfuerzo para su control, es esencial analizar si el sistema de medición en uso es aceptable.

La variabilidad está presente en todas las actividades incluso en el proceso mismo de medición aunque éste se realice sobre el mismo objeto y con el mismo instrumento. Por lo tanto nuestro objetivo es medir la variación dentro de nuestro propio sistema de medición y asegurarnos que permanezca dentro de límites aceptables.

### El sistema de medición

El concepto de *sistema de medición* a menudo se reduce sólo al instrumento de medición. En realidad un sistema de medición es mucho más amplio. Incluye, en principio, los siguientes elementos:

- el *instrumento* o dispositivo de medición,
- el *operador* que utiliza dicho instrumento,
- el mismo *producto* que se está midiendo.

La *combinación* de estos factores es la determinante de la magnitud de la variación o error en los resultados de la medición. Un calibre con vernier es una herramienta eficaz para medir dimensiones sobre superficies de metal cuadradas y planas. El mismo instrumento dará una gran variación en los resultados si operadores no capacitados lo usan para medir el espesor de un producto compresible como la gomaespuma.

La *especificación de calidad* es también parte del sistema de medición y fuente de variación de las mediciones cuando no está adecuada u operativamente definida ya que no se podrá comunicar a todos los interesados de la misma forma y con el mismo sig-

nificado a lo largo del tiempo.

*¿Cuáles son las consecuencias de una excesiva variación en el sistema de medición?*

La variación del proceso no se percibe directamente, sino a través del sistema de medición. Por lo tanto si la variación de este sistema es grande, la variación del proceso aparecerá mayor de lo que realmente es. Un error grande del sistema de medición conduce a una *sobre-estimación de la variación del proceso*, que puede llevarnos a creer erróneamente que nuestros procesos no son capaces de satisfacer las exigencias del cliente cuando en realidad sí lo son.

Un valor observado está formado por el valor verdadero de la magnitud a medir más un error de medición.

$$\text{Valor observado} = \text{verdadero valor} + \text{error de medición}$$

Error de medición es el término usado para designar el efecto que causan todas las fuentes de variabilidad durante el proceso de medición, produciendo una diferencia entre el valor observado y el verdadero valor que se pretende medir.

La relación anterior significa que cuando utilizamos resultados de mediciones para tomar decisiones, la información contiene variabilidad adicional generada por el mismo proceso de medir. La variabilidad total de un conjunto de datos tiene dos componentes:

$$\text{variabilidad total} = \text{variabilidad del producto} + \text{variabilidad de la medición}$$

El error de medición tiene varias fuentes, entre las que se destacan:

- *Resolución*: magnitud del error de apreciación del instrumento.
- *Exactitud*: diferencia entre el promedio de una serie de mediciones y el valor verdadero que se está midiendo.
- *Repetibilidad*: variación observada cuando un mismo operador mide repetidas veces la misma muestra con el mismo equipo.
- *Reproducibilidad*: variación adicional observada cuando varios operadores usan el mismo equipo para medir la misma muestra.
- *Estabilidad*: cambio en las mediciones a través del tiempo o deriva.

El conjunto de todas las componentes genera la incertidumbre de la medición, las componentes de mayor incidencia suelen ser la repetibilidad y la reproducibilidad. De allí la importancia de medir adecuadamente estas fuentes de error.

### **Repetibilidad y Reproducibilidad**

Las definiciones internacionalmente aceptadas de los términos mencionados provienen del “*International vocabulary of basic and general terms in metrology*”

**Repetibilidad**: estabilidad en los resultados obtenidos de mediciones sucesivas de la misma magnitud efectuadas bajo las mismas condiciones de medición<sup>1</sup>.

Las condiciones de repetibilidad incluyen:

- el mismo procedimiento de medición
- el mismo observador
- el mismo instrumento de medición utilizado bajo las mismas condiciones
- la misma ubicación
- repeticiones efectuadas en un lapso breve de tiempo

La repetibilidad se puede expresar cuantitativamente en términos de las características de dispersión de los resultados.

**Reproducibilidad**: estabilidad en los resultados obtenidos de mediciones sucesivas de la misma magnitud efectuadas bajo *condiciones* de medición **variables**.

Para que la expresión de la reproducibilidad sea válida es necesario especificar las condiciones variables.

Las condiciones variables pueden incluir:

- principios de medición
- métodos de medición
- observador
- instrumento de medición
- ubicación
- condiciones de utilización
- tiempo

La reproducibilidad se puede expresar cuantitativamente en términos de las características de dispersión de los resultados.

**Incetidumbre de medición**: parámetro, asociado al resultado de una medición, que caracteriza la dispersión de los valores que puede ser razonablemente atribuida a la magnitud medida.

El parámetro puede ser, por ejemplo, una desviación estándar (o un múltiplo de ella), o la semiamplitud de un intervalo con un nivel determinado de confianza.

Existen distintos métodos o enfoques para medir la repetibilidad y reproducibilidad. Vamos a describir el que se recomienda en el manual “Statistical Process Control” (SPC) de la norma QS 9000, y luego a mostrar como alternativa la aplicación del Diseño de Experimentos y Análisis de la Varianza, técnicas éstas que han probado suficientemente su potencial durante casi cien años de uso en el campo de la Estadística, desde que Sir Ronald Fisher las lanzara al ruedo en la década del 20.

### Manual “Statistical Process Control” (SPC) de la norma QS 9000

Para calcular la repetibilidad y reproducibilidad de un resultado de medición de una determinada característica de una pieza, se repite la operación varias veces y se observa la variabilidad de los datos obtenidos. Se utilizan como mínimo dos operadores y diez piezas. Cada operador mide cada pieza por lo menos dos veces siempre con el mismo equipo. Cada ronda de mediciones que un mismo operador realiza sobre todas las piezas se llama prueba.

Este método permite separar la variabilidad inherente al equipo (repetibilidad) de la variación adicional agregada por los operadores (reproducibilidad).

El procedimiento propiamente dicho consiste en:

1. Calibrar el equipo o verificar que ha sido calibrado.

2. Realizar la primera ronda de mediciones con el primer operador. El orden en que mide las distintas piezas debe ser aleatorio.

3. Repetir el paso anterior con el siguiente operador.

4. Continuar hasta que todos los operadores hayan medido todas las piezas una vez.

5. Repetir los pasos 2 a 4 para el número establecido de pruebas.

6. Realizar los cálculos correspondientes para determinar los estadísticos o valores resumen del estudio R&R. Dichos valores son:

- **VE:** Repetibilidad o Variación del Equipo. (Siglas en inglés: EV)

- **VO:** Reproducibilidad o Variación del Operador. (Siglas en inglés: AV)

- **R&R:** Repetibilidad y Reproducibilidad.

- **VP:** Variación entre las Piezas. (Siglas en inglés: PV)

- **VT:** Variación Total. (Siglas en inglés: TV)

- $\sigma_{VE}$ ,  $\sigma_{VO}$ ,  $\sigma_{R\&R}$ ,  $\sigma_{VP}$ ,  $\sigma_{VT}$ , que son los estimadores de los respectivos desvíos

- Porcentajes de tolerancia o de variación total.

7. Análisis de resultados e implementación de acciones de seguimiento si fuera necesario.

**Diseño para recoger la información**

Fila	Opera- dor	Prueba	Pieza										Promedio	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
1	A	1												
2		2												
3		3												
4		Prom.												$\bar{X}_A =$
5		Rango												$\bar{R}_A =$
6	B	1												
7		2												
8		3												
9		Prom.												$\bar{X}_B =$
10		Rango												$\bar{R}_B =$
11	C	1												
12		2												
13		3												
14		Prom.												$\bar{X}_C =$
15		Rango												$\bar{R}_C =$
16	Prom Pieza: $\bar{X}_P$													$R_p =$
17	$R = (\bar{R}_A + \bar{R}_B + \bar{R}_C) / \# \text{ de operadores} =$												$=$ $R =$	
18	$R_{X_{\text{operador}}} = \text{Máx } \bar{X}_{\text{operador}} - \text{mín } \bar{X}_{\text{operador}} =$												$R_{X_{\text{op}}} =$	
19	$LCS_R = R D_4 =$												$LCS_R =$	
20	$LCI_R = R D_3 =$												$LCI_R =$	

$D_3$  y  $D_4$  son los coeficientes usados en los gráficos de control estadístico de rangos.

Si el número de pruebas es 2,  $D_4 = 3.27$ , si el número de pruebas es 3:  $D_4 = 2.58$

Si el número de pruebas es menor a 7:  $D_3 = 0$

**A. Definición de las características a calcular**

- Repetibilidad (VE): Se define como la

longitud del intervalo sobre el que se encuentra el 99% central de los datos (siempre que los datos analizados tengan una distribución normal).

Del mismo modo que el 99.7% central de los datos se encuentran sobre  $6\sigma$ , podemos comprobar que el 99% central de los datos están sobre  $5.15\sigma$ .

Entonces

$$VE = 5.15 \sigma = 5.15 \frac{\bar{R}}{d_2} = \bar{R} K_1$$

$$VE = \bar{R} \times K_1$$

- Reproducibilidad (VO): La variabilidad presente entre los operadores se manifiesta a través de lo que llamamos con  $R_{X_{operador}}$ , el rango de los promedios de los distintos operadores, pero este rango también incluye variabilidad debida a la variación de los promedios muestrales que calculamos con las mediciones hechas por cada operador.

$R_{X_{operador}}$  = variabilidad entre los operadores  
+ variabilidad del promedio

Variabilidad entre los operadores =  
 $R_{X_{operador}}$  - variabilidad del promedio

Esta misma situación se refleja en el cálculo de

$$VO = \sqrt{(R_{X_{op}} K_2)^2 - VE^2 / nr}$$

donde n es el número de piezas  
y r el número de pruebas

El factor  $K_2$  se calcula de modo semejante al  $K_1$ , pero usando los factores  $d_2^*$  que son los  $d_2$  corregidos para estimar  $\sigma$  cuando contamos sólo con un rango en lugar de un promedio de rangos.

- Repetibilidad y Reproducibilidad (R&R): Se calcula usando la ley de propagación de la incertidumbre

$$R\&R = \sqrt{VE^2 + VO^2}$$

- Variación entre las Piezas (VP): Se determina multiplicando el rango de los promedios de cada pieza ( $R_p$ ) por una constante  $K_3$ , que es la misma constante  $K_2$  pero para tamaños de muestra mayores.

$$VP = R_p \times K_3$$

- Variación Total (VT ó s1): Se calcula como:

$$VT = \sqrt{(R\&R)^2 + (VP)^2}$$

Si el proceso tiene variación conocida y su valor corresponde a  $6\sigma$ , puede calcularse como:

$$VT = 5.15 \text{ variación del proceso} / 6$$

en este último caso la Variación entre las Piezas se puede obtener como diferencia:

$$VP = \sqrt{VT^2 - (R\&R)^2}$$

Los cálculos pueden efectuarse en la siguiente planilla:

Medidas			% de la Variación del Proceso
<b>Repetibilidad (VE)</b> = $VE = R \times K_1$ = =	Prue- bas	<b>K<sub>1</sub></b>	$\%VE = 100 (VE / VT)$ = = ----- %
	2	4.56	
	3	3.05	
<b>Reproducibilidad (VO)</b> $VO = \sqrt{(R_{Xop} K_2)^2 - VE^2} / nr$ = = n = número de piezas r = número de pruebas			$\%VO = 100 (VO / VT)$ = = ----- %
<b>Operadores</b>	2	3	
	<b>K<sub>2</sub></b>	3.65	2.70
<b>Repetibilidad y Reproducibilidad (R&amp;R)</b> $R\&R = \sqrt{VE^2 + VO^2}$ = =			$\%R\&R = 100 (R\&R / VT)$ = = ----- %
<b>Variación entre las Partes (VP)</b> $VP = R_p \times K_3$ = =	<b>Partes</b>	<b>K<sub>3</sub></b>	$\%VP = 100 (VP / VT)$ = = ----- %
	2	3.65	
	3	2.70	
	4	2.30	
	5	2.08	
	6	1.93	
	7	1.82	
8	1.74		
<b>Variación Total (VT)</b> $TV = \sqrt{(R\&R)^2 + (VP)^2}$ = =			
	9	1.67	
	10	1.62	

Las conclusiones luego de un estudio de repetibilidad y reproducibilidad de un equipo de medición usando cualquiera de los dos enfoques mencionados antes (% de la variación total o % de la tolerancia) son:

- menos del 10%  
el equipo está en muy buenas condiciones
- entre el 10% y el 30%  
equipo condicionalmente aceptable
- más del 30%  
equipo inaceptable

### Diseño de Experimentos y Análisis de Varianza

Explicaremos la metodología con un caso: un estudio efectuado en la Cámara de Cereales de Rosario<sup>2</sup> con el objeto de medir la repetibilidad y reproducibilidad de sus procedimientos de medición de las características mencionadas más adelante.

El procedimiento estándar para realizar las mediciones es seleccionar una muestra de algunos kilos del material recibido y separar cortes (muestras de menor tamaño) utilizando un cuarteador. Por ejemplo, para el caso del maíz se separan aproximadamente 70 gramos por corte, y para el trigo alrededor de 50 gr.

El análisis se realizó sobre dos tipos de semillas: maíz y trigo. En ambos casos se trabajó con semillas grado 3. En cada corte de ambos tipos de semilla se evaluaron tres características:

- granos dañados,
- granos quebrados y
- materias extrañas

Para evaluar cada característica del

corte se separan los granos dañados, los quebrados y las materias extrañas, se los pesa y se registra el peso en gramos. Luego se calcula la proporción que representa cada uno del peso total del corte.

La técnica estadística utilizada para este estudio fue el Diseño de Experimentos y Análisis de la Varianza. Como ya dijimos la característica principal de cualquier situación experimental es la variabilidad, aún cuando la experimentación se realice bajo condiciones controladas. El Análisis de la Varianza permite determinar o detectar cuánta de la variabilidad presente en un conjunto de datos provenientes de una experiencia (un proceso de medición en nuestro caso) se puede atribuir a causas asignables de variación o factores causales. El remanente de esa variabilidad no asignable a ninguno de los factores reales de variación se lo atribuye al azar y es lo que se denomina *error aleatorio* o *residual*.

El diseño utilizado fue un diseño aleatorizado por bloques completos con efectos aleatorios. Trabajamos con 10 bloques (los cortes) y 4 analistas (niveles del factor) seleccionados al azar entre todos los analistas. Se tomaron diez cortes de una misma muestra y cada analista realizó, en orden aleatorio, las mediciones de las diez muestras.

Dado

$y_{ij}$ : proporción del peso del corte que corresponde a la característica estudiada,

el modelo propuesto es aditivo:

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + r_{ij} \quad \begin{cases} i = 1, 2, 3, 4 \\ j = 1, 2, \dots, 10 \end{cases}$$



donde

$\mu$  es la media general,

$\alpha_i$  es el efecto del  $i$ -ésimo analista elegido en la muestra de analistas,

$\beta_j$  es el efecto del  $j$ -ésimo corte y

$r_{ij}$  es el residuo o error aleatorio del analista  $i$  en el corte  $j$ .

Como tanto el efecto del corte como el de los analistas son aleatorios, el modelo propuesto es un modelo de componentes de varianza. La variabilidad total de las observaciones se descompone en una componente que mide la variabilidad entre analistas, otra que mide la variabilidad entre cortes y una última que mide la variabilidad de los residuos de cada combinación analista/corte.

Las estimaciones de cada una de estas varianzas se obtiene del cuadro de Análisis de Varianza (ANOVA) y vienen dadas por:

$$\hat{\sigma}^2 = CM_{error}$$

$$\hat{\sigma}_\alpha^2 = \frac{CM_{analista} - CM_{error}}{4}$$

$$\hat{\sigma}_\beta^2 = \frac{CM_{corte} - CM_{error}}{10}$$

donde cada CM es uno de los cuadrados medios del cuadro ANOVA correspondiente.

Para el problema que nos ocupa, este diseño nos permite estimar:

1. la variabilidad intrínseca del *procedimiento* de medición ( $\hat{\sigma}$ ),

2. la variabilidad generada por obtener el

corte utilizando el *cuarteador* ( $\hat{\sigma}_\beta$ ) y

3. la variación introducida por las diferencias entre los *analistas* ( $\hat{\sigma}_\alpha$ ),

4. y hacer una prueba de hipótesis para el valor de  $\mu$  que nos permite concluir si se observan diferencias significativas entre los resultados de distintos analistas.

De acuerdo a las definiciones del “*International vocabulary of basic and general terms in metrology*” citadas anteriormente y al sistema de medición ya descrito, consideramos que los ítems 1 y 2 integran la **repetibilidad** del proceso (la variabilidad del cuarteador se debe al procedimiento de medición) y la variación debida a las diferencias entre analistas es lo que llamaremos **reproducibilidad debida a los analistas**.

El cálculo se realiza utilizando la ley de propagación de la incertidumbre, del siguiente modo:

Repetibilidad:  $R_1 = \sqrt{\hat{\sigma}_\alpha^2 + \hat{\sigma}_\beta^2}$

Reproducibilidad:  $R_2 = \hat{\sigma}_\alpha$

$$R\&R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$$

Los datos se procesaron con las herramientas estadísticas de MS-Excel, el análisis incluyó análisis de varianza y estudio de los errores para comprobar los supuestos en los que se basa el modelo lineal propuesto.

## Conclusión

El análisis que propone el manual “*Statistical Process Control*” es un proce-

dimiento fabril y como tal es muy detallado, puede parecer engorroso pero de ninguna manera difícil o incomprensible, si uno se toma algo de tiempo para analizar las definiciones puede comprender la filosofía del cálculo. Se basa en cálculos de rangos y promedios de rangos, y eso lo hace relativamente fácil de comprender y calcular, aun con el único auxilio de una calculadora.

En cambio el Análisis de la Varianza es una técnica más sofisticada, implica mayor volumen de cálculo, y aunque esto no es problemático porque se realiza con el computador (MS-Excel o cualquier software estadístico), también requiere mayores conocimientos teóricos si se desea hacer un correcto análisis del modelo y una adecuada interpretación de los resultados. A cam-

bio de las mayores exigencias proporciona mejores estimaciones de todas las medidas de variabilidad involucradas, porque en lugar de trabajar con rangos lo hace con desvíos estándares<sup>3</sup>, aprovechando de este modo toda la información disponible. Lo logra, además, a partir de una experimento diseñado para tener el mejor aprovechamiento de la información. Esta característica vital transforma al Análisis de la Varianza en una herramienta muy potente, preferible en los casos en que se cumplen los supuestos que exige, porque proporciona resultados estadísticamente más confiables. Sin embargo si el personal a cargo no maneja esta herramienta o no cuenta con facilidades para el cálculo, es más recomendable la metodología citada en primer término.

## NOTAS

- <sup>1</sup> La publicación mencionada presenta las definiciones en inglés y francés, pero no en castellano. La traducción es versión de la autora de este artículo.
- <sup>2</sup> La autora agradece a la Cámara de Cereales de Rosario el permiso para utilizar la información de este caso.
- <sup>3</sup> Recordemos que un rango se calcula tomando sólo los valores extremos observados (el mayor valor observado menos el menor) mientras que el cálculo del desvío estándar involucra todos los desvíos respecto de la media aritmética, tomando en cuenta todos los valores observados.

## BIBLIOGRAFÍA

- International Organization for Standardization Iso 9001: 2000* - Sistemas de gestión de la calidad - Requisitos (traducción certificada). Ginebra, Suiza.
- International Organization for Standardization ISO/IEC 17025: 1999* "Requerimientos generales para la competencia de laboratorios de ensayos y calibración". Ginebra, Suiza, 1999.
- International Organization for Standardization, Metrology Group. International vocabulary of basic and general terms in metrology*. 1993.
- BUREAU INTERNATIONAL DES POINTS ET MEASURES (BIMP). *Guide to the expression of uncertainty in measurements*. Bureau International des Points et Measures, 1993.
- "*Statistical Process Control*" (SPC) - *Reference manual*. Second Printing. Chrysler Corporation, Ford Motor Company, and General Motors Corporation - 1995.
- Diseño y análisis de experimentos*. Montgomery, D C - Grupo Editorial Iberoamérica - México, 1991
- GRASSO, M *Estudio R&R: Repetibilidad y reproducibilidad. Informe Final*. (Documento interno). Rosario, Cámara de Cereales de Rosario, 2000.