REFLEXIÓN SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA IDEA DE INFINITO EN LOS CURSOS DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Juan Samuel Rangel Luengas[1]

RESUMEN

Todo es número o relaciones entre números. El inicio de la matemática está ligado a los dioses y a la mística. El infinito tiene "magia", no es un concepto que sea fácil de asimilar sino que requiere un nivel de abstracción amplio, "cercano a la divinidad", a lo incierto, de tal forma que en algún momento es relacionado con Dios.

Palabras clave

Números, infinito, abstracción.

ABSTRACT

All is number, or relationships between numbers. The beginning of mathematics is linked to the gods and mysticism. The infinite has "magic" is not an easy concept to grasp but requires a broad level of abstraction, "close to divinity, to the uncertainty, so that at some point is related to God.

Key words

Numbers, infinite abstraction.

¿Por qué el infinito?

Históricamente, se evidencia una necesidad de explicar el porqué de todo lo que nos rodea y se establecen teorías al respecto, muchas de estas reflexiones que pretenden explicar el mundo desde relaciones matemáticas las cuales tienen un matiz de divinidad, asociado a lo teológico y cosmológico. Para los presocráticos (siglo VI a. C.) la explicación de las cosas en el mundo son los elementos: agua, aire y fuego, hasta los pitagóricos (siglo V a.C.) quienes consideraban que los números eran el principio de la explicación de la naturaleza, por medio de la geometría se representaban números figurados asociando la naturaleza y la matemática. Utilizando relaciones entre números explicaban la música, y consideraban que todo emitía una armonía, incluyendo los planetas a lo que llamaron la música de las esferas (Caldeiro, 2006). Todo es número o relaciones entre números. El inicio de la matemática está ligado a los dioses y a la mística.

"En los orígenes de la matemática se encuentran, como en todas las ciencias, en la necesidad del hombre de interpretar y transformar su entorno con el fin de hacerlo más propicio para su vida. Sería inútil pretender creer que el pensamiento matemático no sea evolución de otro tipo de pensamiento más primitivo como por ejemplo, el pensamiento mágico." (Castro, 2007)

El infinito tiene "magia", no es un concepto que sea fácil de asimilar sino que requiere un nivel de abstracción amplio, "cercano a la divinidad", a lo incierto, de tal forma que en algún momento es relacionado con Dios.

"…el concepto de infinito como unidad (infinito actual) se ha utilizado a través de la historia para explicar interrogantes de tipo teológico. El concepto de Dios como ente infinito, absoluto e inalcanzable es una muestra de esta concepción. De hecho Cantor postulaba la existencia de un Infinito Absoluto inalcanzable por cualquier tipo de extensión realizada sobre los ordinales transfinitos. Este no podría ser un ordinal pues, si así fuera, inmediatamente se tendría el ordinal + 1 mayor que . A este infinito el mismo Cantor lo identificó con Dios (Ortiz, 1994)."

¿Qué sería de la matemática sin el infinito?

Realmente, no sería posible tener acceso al cálculo como lo indica Alberto Campos en el prólogo del libro *Un paseo finito por lo infinito*:

"Habría toda álgebra, la concreta y la abstracta; toda la geometría de Euclides, las llamadas en los cursos universitarios, matemáticas finitas;… Faltaría todo el análisis, una mera sinfonía del in

[1]*Licenciado en matemáticas. Especialista en educación en tecnología. Maestria en ciencias exactas y naturales en curso.*
samuelranguel@unipanamericana.edu.co

finito, según Hilbert. En efecto, sin la noción de límite, la llave maestra para el estudio de infinito, no quedarían bien definidas la continuidad, la derivación, la integración, la convergencia, es decir los cuatro puntos cardinales del análisis, por lo cual, no habría análisis". (Castro, 2007)

Históricamente, aparece la geometría, la aritmética, el álgebra y se desarrollan independientemente, también se puede revisar cómo cada una de ellas se acerca al trabajo con el infinito, pero sólo cuando se tiene un buen entendimiento de la geometría, la aritmética y el álgebra, es posible unirlas para dar inicio al cálculo diferencial e integral, descubierto por los matemáticos Gottfried Wilhelm Von Leibniz y Sir Isaac Newton y desde ese instante la geometría, la aritmética y el álgebra ya no se desarrollan por separado, son unidad en el cálculo infinitesimal y permiten el avance de la ciencia. Esto indica que el cálculo requiere de todos los hallazgos matemáticos previos, porque el cálculo infinitesimal es consecuencia de la historia matemática, el perfeccionar el concepto de infinito, permite determinar que se pueden tener expresiones infinitamente pequeñas, idea fundamental para construir el concepto de límite y así entender la intencionalidad del cálculo infinitesimal. Haciendo comparación entre el proceso histórico y la enseñanza de la matemática, un estudiante debe recorrer y comprender las ideas previas al cálculo, no es posible entender el poder de esta herramienta si se tienen malas bases en aritmética, geometría y álgebra y teoría de conjuntos, además de actividades que aclaren la diferencia entre la definición de infinito usada en el lenguaje común y el que requiere el formalismo matemático (Navarro, 2010). Lo primero que se enseña en la escuela es la noción de conjunto, y se trabaja sobre el conjunto de los números naturales, por construcción a cualquier número natural por grande que este sea, se le puede encontrar un siguiente y esto permite concluir que el conjunto de los números naturales es infinito, razón que lleva a pensar en el infinito como algo que se extiende indefinidamente, una idea previa errada desde el formalismo matemático porque no se requiere que algo se extienda indefinidamente para ser infinito, por poner un ejemplo, el intervalo [0,1] es un conjunto con infinitos elementos y no se extiende indefinidamente.

Un concepto se apoya en los referentes concretos de los estudiantes y que requiere de ellos un nivel de abstracción que les permita no sólo acercarse a la idea de infinito (infinitamente grande), sino también de infinitesimal (infinitamente pequeño). Es así, como surge la necesidad de abordar la idea del infinito como punto de convergencia de varias ramas del conocimiento matemático de forma superficial pero responsable, sin entrar a formalismos que desanimen los estudiantes, pero sí que sensibilicen sobre la importancia y la necesidad de un concepto de infinito en acto.

¿Cómo utilizar la historia para la enseñanza del cálculo?

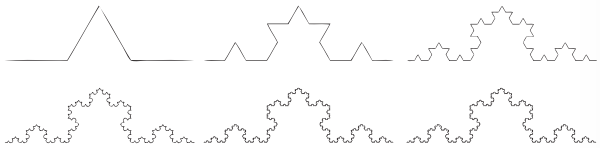
Por la forma en que se enseña la matemática en las instituciones educativas, es probable que esta discusión se dé a la hora de enseñar conjuntos con la propiedad de que el cardinal de una de sus partes es siempre menor que el cardinal del todo. En otro contexto, para los números racionales positivos, los ejemplos invitan a realizar particiones y comprobar que cada vez que tomo una parte de un todo, esta parte es menor y al trabajar con una línea se compara el segmento con la totalidad de la línea, concluyendo nuevamente que el todo es mayor que alguna de las partes. Experiencia que impide la elaboración del concepto actual de infinito.

Pedagógicamente, para lograr aprendizaje significativo se requiere que el estudiante apropie el conocimiento ligándolo a su experiencia previa, ahora, la enseñanza del concepto de infinito carece de una experiencia previa y no es de dudar pues que el concepto de infinito es inminentemente abstracto y no se tiene del diario vivir sino de una necesidad matemática que puede ser justificada históricamente pero, con dificultad evidenciada por los estudiantes como sí ocurre con referentes finitos. En este aspecto la "ayuda histórica" puede motivar la importancia y la necesidad del concepto (Fundación Gabriel Piedrahita Uribe, 2005).

"Generalmente, la forma de enseñarlo consiste en utilizar metáforas didácticas basadas en conjuntos "muy grandes'' para fijar la idea de infinitud. Esto, permite crear la noción de infinito usada en el lenguaje cotidiano y aceptada por la Real Academia Española, sin embargo podría generar una mala formación del concepto matemático. La ambigüedad del lenguaje coloquial hace que el concepto del infinito sea un concepto vago e intuitivo que se parece muy poco a la idea matemática de infinito como unidad total. (Navarro, 2010)”

Probablemente, la idea clave para un conjunto infinito es que la parte, no será menor que el todo de donde fue tomada. En el diario vivir de nuestros estudiantes es improbable que trabajen con un conjunto infinito de elementos, esta característica no es cercana al mundo de los conjuntos que ellos han manipulado.

La abstracción comienza desde la misma idea de conjunto, el profesor dice a sus estudiantes salgan al patio y al regresar traigan diferentes conjuntos. Esta petición es imposible, los conjuntos no existen en la realidad, no se encuentran en el patio del colegio, están creados por una idea mental, que permite dar una característica común a objetos, que luego toman el rango de elementos y se agrupan como conjunto, llamado finito, ya que se puede determinar el número de elementos o cardinal. En un conjunto finito si tomamos una parte, el cardinal de esta parte será menor que el cardinal del todo. Ahora, un conjunto infinito tiene tantos elementos, que el tomar una parte de él, su cardinal es todavía infinito y se asume entonces, que la parte no es menor que el todo, principal característica de un conjunto infinito. Una analogía, válida para este aspecto puede ser un fractal (FGPU, 2005) (figura de dimensión fraccionada), en esta figura ocurre que una parte de ella puede ser ampliada de tal forma que llega a ser el todo y este proceso se puede realizar cuantas veces se quiera, esto ocurre porque los fractales cumplen las propiedades de auto-similaridad, recursión y la propiedad de ser un conjunto infinito. Otra ventaja es la ayuda visual porque parte de la geometría, por ejemplo, la construcción de la curva de Koch que comienza con un segmento de longitud 1 y se va dividiendo como lo muestra la figura 1.



Fuente: http://es.wikipedia.org/wiki/Copo_de_nieve_de_Koch. Fecha de consulta 6 de junio de 2010.

Figura 1.

Después se realiza el mismo procedimiento sobre un triángulo equilátero para formar el Copo de Nieve de Koch (FGPU, 2005) con el cual se puede apreciar una figura acotada, pero con un perímetro de longitud infinita.

La dificultad a nivel pedagógico está en la experiencia previa que tiene el estudiante y los contextos utilizados para mencionar los conjuntos, donde difícilmente se consigue evidenciar lo que es un conjunto infinito. Históricamente, estaríamos adoptando una enseñanza que permite un pensamiento similar al de los griegos;
“…Aristóteles, quien consideraba que el infinito es “lo que no se deja recorrer y carece de límite”. Distinguió dos clases diferentes de infinito: El infinito actual, cuya infinitud es independiente del tiempo, y el infinito potencial, que es una construcción a lo largo del tiempo.

Dos de los factores que impidieron a los griegos concebir el infinito actual fueron:

1. Los argumentos aristotélicos en contra del infinito actual.
2. El principio euclidiano de que el todo es mayor que cualquiera de sus partes.

Aristóteles negaba al infinito actual toda existencia física o matemática.” (FGPU, 2005)

Desde la experiencia los estudiantes comparten la reflexión realizada por Aristóteles, pero deben avanzar hacia la idea de Cantor, desligando el tiempo del infinito y observando que las propiedades para conjuntos finitos e infinitos son diferentes.

Para el trabajo matemático se requiere la idea de infinito, pero en especial, lo infinitesimal, caso para el cual se considera importante presentar a los estudiantes el método de exhaución utilizado por Arquímedes. Este método utiliza la idea de infinitesimal, aproximando una circunferencia, haciendo uso de un polígono cada vez con mayor cantidad de lados.

"Cien años después de Eudoxo, Arquímedes (287-212 a.C.) lo empleó en varios procedimientos geométricos…para calcular el área de un círculo C de radio r, sabiendo que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ (notación moderna)…" (FGPU, 2005)

La idea de infinitesimal es clave en la elaboración que realizan Leibniz y Newton, por ejemplo Leibniz considera una curva como la unión de infinitos segmentos de recta, situación que permite aproximarse a las áreas bajo la curva. En este aspecto es conveniente el uso de videos informativos sobre el cálculo, en los cuales se enfatiza el método de Arquímedes. Además, sería pertinente analizar el escrito de Arquímedes en su obra El Arenario, donde presenta una perspectiva de lo que en ese tiempo se consideraba infinito.

"Hay algunos, rey Gelón, que creen que el número de los granos de arena es infinito por su multitud; y cuando digo arena no solamente me refiero a la que existe alrededor de Siracusa y del resto de Sicilia sino también a la que se puede encontrar en toda región, ya sea habitada o deshabitada. También hay algunos que, sin creer que sea infinita, piensan sin embargo que no existe ningún número que sea lo bastante grande como para superar tanta abundancia. Y está claro que aquellos que sostienen este punto de vista, si se imaginaran una masa totalmente compuesta de arena y tan grande como la masa de la Tierra, incluyendo en ella a todos los mares y valles de la tierra repletos hasta una altura igual a la de la más elevada de las montañas, estarían mucho más lejos todavía de reconocer que pueda expresarse un número que supere la multitud de granos de arena así deducida. Pero voy a tratar de probarle, mediante demostraciones geométricas que usted podrá seguir, que entre los números que yo menciono y doy en el trabajo que envié a Zeuxipo, hay algunos que no solamente superan al número de granos de arena que equivale en magnitud a la Tierra repleta en la forma descrita, sino también a los que cabrían en una masa igual en magnitud al Universo." (El contador de protones, http://www.librosmaravillosos.com/delosnumerosysuhistoria /capitulo14.html).

El infinito es entendido como una cantidad extremadamente grande, muchos granos de arena, similar a la cantidad de puntos que tiene una línea. Concebir infinitos puntos en una línea permite acercarse a la idea de Newton cuando establece la pendiente de la recta tangente a un punto en una línea y cómo ésta describe velocidad.

Es claro que la intencionalidad es una ambientación muy superficial con el fin de inquietar a los estudiantes frente a este concepto matemático ya que históricamente su elaboración no es tan simple y no transcurre de un instante a otro, sino que, requiere de un proceso para lograr su aceptación, el objetivo no es presentar un símbolo de la nada como una receta, desconociendo, por lo menos el devenir histórico y lo que esta construcción matemática significó para la evolución del concepto de cálculo.

En la revista latinoamericana de investigación en matemática educativa 2001, se revisan textos de trabajo matemático con el fin de determinar cómo se aborda el concepto de límite infinito, entrevistando a los estudiantes y entrevistando a los maestros sobre un caso particular como lo es la división de un número entre cero a/0, la respuesta común es que el resultado es infinito, producto de una operación, olvidando consideraciones de fondo que permiten llegar a este resultado.

"Los docentes anidan de manera irreflexiva a la operación como una parte del concepto que sirve de eslabón final, para evitar procesos algebraicos que llevan a los alumnos a las imprecisiones de la división por cero. Habilidad y creencia que momentáneamente son útiles y sacan del apuro tanto al profesor como al alumno; la expresión $a/0=\infty$ No forma parte de la transición histórica que llevó a establecer la definición actual y axiomática del concepto de límite infinito. De aquí, que la "operación" no pueda ser considerada un argumento para su enseñanza dado que, como hemos mostrado, ello provoca conflictos en los estudiantes." (RLIME, 2001)

Lo que enfatiza nuevamente la necesidad de un contexto histórico de trabajo y una precisión en el lenguaje por parte de los docentes con el fin de orientar correctamente a los estudiantes.

Por ello, se sugiere el uso de la historia como una herramienta para contextualizar, motivar y dinamizar el deseo de conocimiento de los estudiantes con el fin de generar inquietudes cada vez más fuertes conceptualmente, situación a la que el docente debe responder con responsabilidad, claridad y sencillez. Es por esto que en principio se sugiere para el trabajo en aula, los primeros pensadores sobre temas matemáticos cercanos a la idea de infinito, hasta llegar a la construcción del infinito de Cantor, que no está ligada al tiempo y que permite comparar conjuntos infinitos.

DISCUSIÓN

- El infinito actual dista de la idea de infinito de Aristóteles (infinito ligado al tiempo).
- La idea de infinito permite la aparición de una de las herramientas matemáticas importantes, como lo es el análisis y por ende en él aparece el cálculo diferencial.
- Para apoyar la clase de cálculo se sugiere una ambientación con el uso de los fractales.
- Se debe hacer énfasis en la diferencia entre el infinito potencial y el infinito actual.
- Desde el punto de vista pedagógico no es posible enseñar un tema sin que el estudiante tenga una aproximación al tema o una idea previa que le contextualice.
- La idea de infinito permite realizar el descubrimiento del cálculo y sin ella Leibniz y Newton no hubieran podido desarrollar sus teorías.
- Debe reconocerse un devenir histórico antes del concepto de infinito.

REFERENCIAS

Caldeiro, Graciela Paula (2006) Filósofos Presocráticos. http://filosofia.idoneos.com/index.php/280933. Fecha de consulta: 6 junio 19:28

Castro Chadid y Pérez Alcázar (2007).Un paseo finito por lo infinito: el infinito en matemáticas Bogotá ed., Pontificia Universidad Javeriana, pp. 1-124

Díaz Navarro, Pedro. Reflexiones Didácticas sobre el concepto de Infinito. Escuela de Matemática Universidad de Costa http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/infinito/node7.htmlsituacion Fecha de consulta, 3 abril de 2010 20:00 pm.

Fundación Gabriel Piedrahita Uribe, (2005). Discusión sobre el infinito y la iteración. Copyright Traducción al Español http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/discussions/infinity.html. Fecha de consulta, 15 abril 22:15 pm.

Fundación Gabriel Piedrahita Uribe, (2005) Introducción a los fractales: Infinito, auto-similaridad y recursión Copyright. Traducción al Español http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/lessons/frac1.html fecha de consulta 15 abril 22:45 pm

Fundación Gabriel Piedrahita Uribe, (2005) Fractales de figuras planas. Copyright Traducción al Español http://www.eduteka.org/MI/master/interactivate/discussions/geom.html fecha de consulta 5 junio 2010 22:45 pm

Martínez Eduardo (2004) Jueves 30 Diciembre. Un satélite de la Nasa confirma la "música de las esferas". http://www.tendencias21.net/Un-satelite-de-la-Nasa-confirma-la-musica-de-las-esferas_a494.html,fecha de consulta 8 junio 2010 4:30 pm

Números Figurados. J. Ma. Fernández, J.M. Barragán y A. Molina (2010) http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/algebra/patrones/patrones.htm. Fecha de consulta 6 mayo, 22:35pm

Reflexiones sobre El Concepto de Infinito. Pedro Díaz Navarro. Escuela de Matemática Universidad de Costa Rica http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/infinito/index.html fecha de consulta 7 junio 2010 2:00 pm

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2001) Vol. 4 n3 noviembre. pág. 262