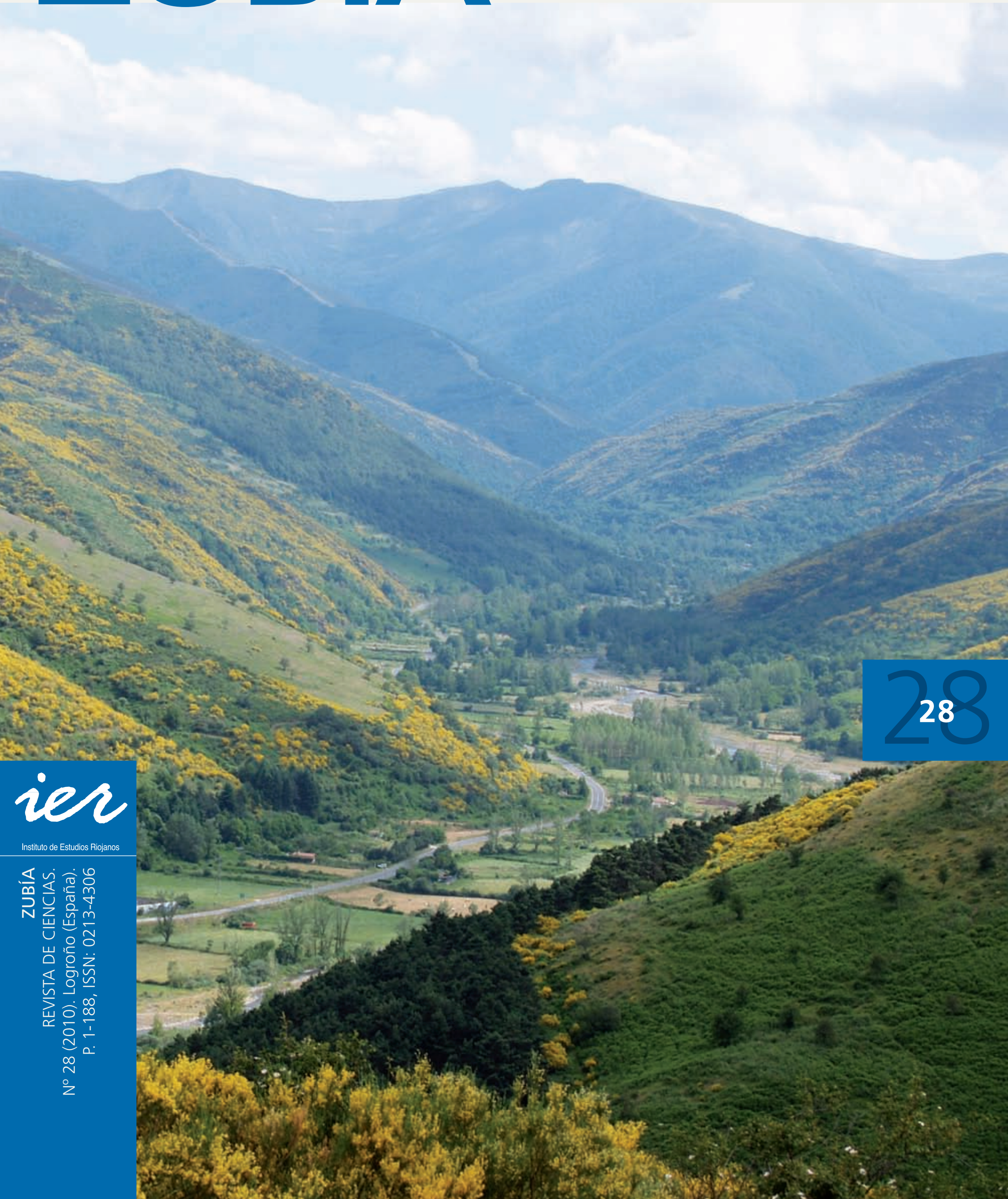
ZUBÍA

REVISTA DE CIENCIAS



28

ier

Instituto de Estudios Riojanos

ZUBÍA
REVISTA DE CIENCIAS.
Nº 28 (2010). Logroño (España).
P. 1-188, ISSN: 0213-4306

Zubía 28 139-166 Logroño 2010

JULIO REY PASTOR Y EL ANÁLISIS ALGEBRAICO: DE LOS APUNTES DE 1914-16 A TRES LIBROS DE TEXTO (1917-1925)

LUIS ESPAÑOL[1]
Mª. ÁNGELES MARTÍNEZ[1]
YOLIMA ÁLVAREZ[1]
CLAUDIA VELA[1]

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es plantear y justificar la siguiente tesis: el matemático español Julio Rey Pastor inició las enseñanzas de su cátedra en Madrid (1914-16) proponiendo un modelo de introducción al análisis matemático que sigue la tradición europea del "análisis algebraico" elemental, representada por la obra *Istituzioni di Analisi Algebrica* (1909) de A. Capelli. La propuesta de Rey Pastor moderniza la situación vigente en España, influenciada por una obra anterior y más elemental, *Elemente der Mathematik* (1860) de R. Baltzer. Los apuntes de Rey Pastor para sus primeros cursos evolucionaron dando lugar a su primer libro de texto *Elementos de Análisis Algebraico* (1917) que recogió condensada la esencia elemental de dicha materia, y a otros posteriores *Lecciones de Álgebra* (1924) y *Teoría de las Funciones Reales* (1925), que se ampliaron en una línea más especializada. Realizamos la descripción y análisis de este proceso y verificamos una estrecha correspondencia entre la obra de Capelli y el conjunto de las tres citadas de Rey Pastor.

Palabras clave: Historia de las matemáticas, Enseñanza de las matemáticas, Análisis matemático, Análisis algebraico, Álgebra, Siglos XIX y XX, España, Julio Rey Pastor.

The aim of this paper is to propose and justify the following thesis: the Spanish mathematician Julio Rey Pastor began the teaching at Madrid (1914-1916) proposing a model of the introduction in mathematical analysis that follows the European tradition of the elementary "algebraic

1. Luis Español y Mª. Ángeles Martínez son los miembros del Grupo de Investigación en Historia de las Matemáticas de la Universidad de La Rioja, en el que Yolima Álvarez y Claudia Vela están realizando el doctorado. Yolima Álvarez es miembro del grupo de investigación en Ciencias Básicas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Este artículo conjunto ha contado con una ayuda del Instituto de Estudios Riojanos (IER, Consejería de Educación, Cultura y Deporte del Gobierno de La Rioja) en su convocatoria de 2009. Otros artículos seguirán a éste como resultado de las investigaciones realizadas por los autores gracias a la mencionada ayuda.

analysis", represented by the book Istituzioni di Analisi Algebrica (1909), by A. Capelli. Rey Pastor's proposal modernized the current situation in Spain, influenced by an earlier and more elementary work, Elemente der Mathematik (1860), by R. Baltzer. Rey Pastor's lecture notes for his first courses evolved until his first textbook Elementos de Análisis Algebraico (1917), who collected in a condensed way the elementary essence of the matter, and later Lecciones de Álgebra (1924) and Teoría de las Funciones Reales (1925), which were extended in a more specialized line. We describe and analyze this process and verify a close correspondence between Capelli's book and all three written by Rey Pastor.

Keywords: History of mathematics, Mathematics education, mathematical analysis, algebraic analysis, algebra, XIX-XXth centuries, Spain, Julio Rey Pastor.

1. INTRODUCCIÓN

Julio Rey Pastor[2] es el representante en matemáticas de una generación de científicos que, bajo la dirección intelectual del filósofo José Ortega y Gasset (1883-1955), se esforzaron por renovar la ciencia española emulando a la europea. En esta corriente de renovación se inscribe la creación de la JAE en 1907, que propició la salida a universidades europeas prestigiosas de los jóvenes científicos mejor preparados. Rey Pastor se hizo matemático en Zaragoza, en 1908, de donde pasó a Madrid para realizar el doctorado, que culminó en 1909. Dos años después ganó una cátedra de Análisis Matemático en la Universidad de Oviedo, a la que correspondían asignaturas de primer y segundo curso en las carreras de Ciencias. En la universidad asturiana, donde no había Sección de Exactas, sólo ejerció el curso 1912-13, pues al finalizar éste logró el traslado de su cátedra a la Universidad Central de Madrid, donde empezó a impartir docencia el curso 1914-15. Antes había permanecido dos cursos en Alemania pensionado por la JAE, el 1911-12 en Berlín y el 1913-14 en Gotinga, donde mejoró notablemente su formación bajo la influencia de prestigiosos matemáticos alemanes. Con el bagaje de ser el mejor matemático español, catedrático en Madrid a los 25 años, y formado en análisis y geometría superior en las dos mejores universidades europeas, Rey Pastor acometió la tarea renovadora que caracteriza a su generación durante aquellos años, mientras España permanecía al margen de los enfrentamientos de la Primera Guerra Mundial.

2. Julio Rey Pastor (Logroño 1888 – Buenos Aires 1962). Para su biografía véase [Ríos *et al.* 1979], o bien [Millán 1988]. También los trabajos de varios autores en [Español (ed.) 1985, 1990].

Las lecciones de sus primeros cursos en la Facultad de Ciencias de Madrid fueron reproducidas con mimeógrafo como apuntes para los estudiantes. Sus títulos respectivos, abreviados[3], son:

Resumen de las lecciones de análisis matemático (primer curso) 1914–15
Resumen de las lecciones de análisis matemático (segundo curso) 1915-16

En lo sucesivo nos referiremos a estos apuntes con las abreviaturas *Resumen 1* y *Resumen 2* respectivamente, o bien escribiremos *Resúmenes* para referirnos a ambos volúmenes, lo que haremos con frecuencia porque nuestro propósito es resaltar su significado unitario. A partir de estos primeros textos provisionales, publicó en imprenta, bajo su propia iniciativa editorial, tres libros de texto de muy amplia difusión, que citamos por la fecha de su primera edición y precedidos de las siglas que utilizaremos para referirnos a ellos[4]:

(EAA) *Elementos de Análisis Algebraico*, 1917.
(LA) *Lecciones de álgebra*, 1924.
(TFR) *Teoría de las funciones reales*, 1925.

Todos ellos tuvieron numerosas reediciones y reimpresiones posteriores, como se describe en otros trabajos[5] que se han dedicado aisladamente a cada uno de ellos.

Pero el objetivo de este artículo es resaltar que los tres se originaron en un proyecto docente único inspirado en la tradición europea de libros de texto de análisis algebraico, lo que se aprecia de modo germinal en su primeros apuntes antes citados, si bien su dilatada aparición en el tiempo hizo que terminaran siendo libros de aspecto independiente.

En las páginas que siguen dedicaremos un espacio (sección 2) a señalar el origen y el cuerpo doctrinal del análisis algebraico en su enfoque educativo, describiendo someramente los dos libros europeos que más influyeron en el desarrollo en España de esta tendencia. A continuación (sección 3) dibujaremos el panorama de la enseñanza inicial del análisis matemático en la universidad española de los primeros años del siglo XX, lo que nos servirá de contexto para exponer (sección 4) la forma en que Rey Pastor se sumó a la corriente europea del análisis algebraico. Cerraremos el cuerpo central del artículo verificando (sección 5) que las obras de Rey Pastor que comentamos forman un conjunto

3. Referencia completa: [Rey Pastor 1914, 1916]. Hemos consultado los ejemplares de la biblioteca del IER (Logroño), que fueron propiedad del catedrático D. Graciano Silván González (1874-1943), quien fuera profesor de Rey Pastor en la Universidad de Zaragoza. La familia los donó por intermedio de Dª. María José Silván, directora de la bilbioteca del IER hasta su reciente jubilación.

4. Las referencias a las respectivas primeras ediciones son [Rey Pastor, 1917, 1924, 1925].

5. Para *EAA* véase [Español 1998a], para *LA* [Español 1998b] y para *TFR* [Español *et al.* 2006, 2008].

equiparable al grueso volumen de Capelli. El artículo se cerrará con unas conclusiones (6), un apéndice (7) en el que se reproduce la presentación de *Resúmenes* y las referencias (8) mencionadas a lo largo del texto.

2. EL ANÁLISIS ALGEBRAICO

La tradición europea del análisis algebraico se remonta al primer tomo de *Introductio in Analisin Infinitorum* de Euler (1748), donde el genial suizo presenta las funciones en cuanto son dadas por desarrollos en serie de potencias, extensión infinita de la expresión de los polinomios, a las que se aplica un cálculo formal algebraico y el álgebra de los infinitesimales, con carácter previo al estudio del cálculo diferencial e integral y a la aplicación de las funciones al estudio de las curvas. Algebraico es también el enfoque que presenta Lagrange en *Théorie des functions analytiques* (1797), usando series de potencias (desarrollo de Taylor) pero no infinitesimales. Esta forma de entender el análisis significaba una segunda etapa histórica, tras la inicial que vinculaba el cálculo con la geometría. A pesar de sus diferencias de enfoque, Euler y Lagrange

> … comparten un énfasis explícito en el carácter analítico o "algebraico" del cálculo diferencia e integral, lo mismo como una descripción fundacional que como un motivo para unificar las diferentes ramas del tema; en la necesidad de separar el cálculo de la geometría, pero continuando con el cultivo de las aplicaciones geométricas y mecánicas; y en una creencia en la generalidad como un objetivo primario de las matemáticas. [Fraser 1989, p. 319]

El modo de proceder de Euler calculando con funciones y series infinitas de modo puramente formal, sin preocupaciones por la convergencia, distinguía entre las expresiones consideradas formalmente y sus valores numéricos, aspecto que fue muy desarrollado por la escuela combinatoria alemana durante los últimos años del siglo XVIII y buena parte del siglo XIX[6], dando así una interpretación peculiar del análisis algebraico.

En la Escuela Politécnica de París, Cauchy reinterpretó esta forma de introducir el análisis matemático en su *Cours d'analyse. Première partie*: *Analyse algébrique* (1821), que es, como en Euler, un curso que precede a su *Calcul infinitesimal* (1823). La primera parte del análisis algebraico de Cauchy trata, principalmente, de límites y continuidad de las funciones reales y complejas, de la convergencia y suma de las series y de los desarrollos en series de potencias de las funciones elementales. Así inicia Cauchy la etapa siguiente del cálculo, diferenciándose de los supuestos compartidos por Euler y Lagrange e iniciando

6. Véase [Jahnke 1993], donde se estudia la evolución del análisis de la fórmula del binomio y los trabajos en esta línea de C.F. Hindenburg y M. Ohm.

Núm. 28 (2010), pp. 139-166
ISSN 0213-4306 Zubía

el periodo de análisis clásico en variable real y compleja[7]. También se incluyen en el curso de Cauchy las funciones más sencillas, los polinomios ("funciones racionales enteras"), y con ellos la interpolación y la resolución de las ecuaciones algebraicas, temas conocidos como de "álgebra clásica".

El desarrollo en serie de potencias de las funciones elementales, era el objetivo principal del análisis algebraico y por ello, desde el punto de vista especializado, el análisis algebraico se concentraba en la variable compleja, donde los desarrollos alcanzaban su más perfecta expresión, de modo que este tipo de análisis aparece como antecedente de la teoría de las funciones analíticas de Weierstrass:

> En la primera mitad del siglo XVIII, un cierto número de geómetras se aplicaron a establecer las propiedades de las funciones elementales con independencia del cálculo infinitesimal, haciendo uso de procedimientos más bien algebraicos. Más tarde se dio el nombre de *Análisis Algebraico* al cuerpo de doctrina así constituido fuera del análisis infinitesimal.
>
> El empleo de los métodos algebraicos en el estudio de las funciones elementales tuvo como consecuencia no sólo proporcionar nuevas formas de desarrollo de estas funciones (tales como su desarrollo en producto infinito o en fracción continua), ajenos al análisis infinitesimal, sino también y sobre todo introducir sistemáticamente, en el estudio de las funciones, las cantidades imaginarias.
>
> …
>
> Bajo el nombre de Análisis algebraico se puede comprender, todavía hoy, el estudio de los algoritmos ilimitados de números reales o complejos y el de los métodos especiales que permiten representar con ayuda de series, productos infinitos o fracciones continuas, las funciones elementales. [Pringsheim *et al.* 1992, pp. 1, 4.]

En el artículo citado de la *Enciclopedia Teubner*, Pringsheim y Faber ponen el énfasis en explicar el desarrollo del tema a lo largo del siglo XIX en el caso general de variable compleja, dejando que las funciones reales aparezcan sólo como casos particulares[8].

Análisis algebraico elemental

Pero este enfoque tuvo también un desarrollo en diversos niveles educativos elementales, en los que el alcance máximo del análisis algebraico quedaba disminuido. El análisis algebraico elemental inspiró el núcleo de la

7. En [Fraser 1989] el autor señala y argumenta la radicalidad del corte que Cauchy significa frente a Euler-Lagrange.

8. La versión francesa de este artículo, realizada por J. Molk, es de 1911 y el original alemán de Pringsheim y Faber se publicó en 1908. El artículo forma parte del volumen dedicado a funciones de variable compleja.

formación inicial en matemáticas preconizada en la reforma educativa diseñada en Prusia por Humboldt, y fue desarrollado durante la primera mitad del XIX por la llamada escuela combinatoria. Bajo esta tendencia, el análisis algebraico se convirtió en el núcleo de la enseñanza escolar, ya que se consideraba como un modelo elemental de las matemáticas puras y estaba en completa armonía con el propósito educativo de la mencionada reforma. Hacia mediados del siglo XIX el movimiento combinatorio alemán reconoció la necesidad de asumir los puntos de vista y los contenidos de Cauchy, así que la convergencia de las series se fue introduciendo en la enseñanza[9]. Los textos de (o con) análisis algebraico se fueron reconfigurando en un relación dialéctica entre la coherencia sistémica de la materia y las necesidades impuestas por los programas de enseñanza, obligados a administrar y priorizar las materias a impartir en el tiempo disponible, incorporando, en la medida de lo posible, las novedades matemáticas de cada tiempo. Particularmente significativo fue, en la segunda mitad del siglo XIX, el proceso de aritmetización de las matemáticas. En este modelo fue jugando un papel metódico clave la ampliación de los sistemas numéricos, sobre lo cual Janhke escribe:

> Más tarde, las progresivas extensiones de los sistemas de números siguiendo el principio de permanencia de las operaciones algebraicas se convirtieron en el centro de todos los programas de tipo aritmético algebraico. [Jahnke 1993, p. 281]

El "principio de permanencia de las operaciones algebraicas" (o "de las leyes formales de la aritmética", como también se dice) fue establecido por Hankel[10] en 1867, como consecuencia de su reflexión sobre los trabajos de Hamilton sobre los complejos y los cuaternios. Hankel reclamaba con valor de "principio" que al seguir el procedimiento genético de obtener sucesivos sistemas de números, la nueva definición de número y sus operaciones contenía a la anterior como caso particular, y mantenía la validez de las propiedades (asociativa, conmutativa, etc.) que satisfacen las operaciones (así sucedía de los naturales a los complejos, pero ya no con los cuaternios). Hankel sostenía que estas leyes tenían un carácter "formal" y el principio de su mantenimiento podía verse también como la concordancia entre los procedimientos formales del cálculo con números y la realidad concreta a la que esos cálculos se aplicaban[11].

9. Según [Pringsheim, Faber 1992] el libro de análisis algebraico [Schlömilch, 1845] tuvo mucha influencia en la asimilación de Cauchy por la escuela combinatoria alemana.

10. Hermann Hankel (1839-1873). La referencia es [Hankel 1867].

11. Este aspecto formal resaltado por Hankel, al igual que Boole, Peackok, Hamilton y otros que apreciaron el significado de los cálculos según reglas con independencia de los objetos a que los cálculos se refieren, marca un camino hacia la definición axiomática de las estructuras algebraicas.

Núm. 28 (2010), pp. 139-166
ISSN 0213-4306 | Zubía

Se consideraba altamente educativo comprender este proceso de extensión de los números, bajo el control del principio de permanencia, a la vez que utilizarlo de modo que cada nuevo sistema permitía resolver nuevas ecuaciones mediante un nuevo tipo de "operación inversa". Un curso o libro de este tenor consistía en abordar, organizados de un modo otro, estos dos asuntos: A) La definición progresiva de los números y sus operaciones, de los naturales hasta los reales en un principio y más tarde hasta los complejos. B) La exposición de los temas básicos del análisis algrebraico, colocados todos ellos después de los números o diseminados a lo largo de este recorrido genético, colocando después de cada tipo de número los temas que le son propios.

Completaremos este apartado describiendo el contenido de dos obras europeas de amplia difusión que siguen el esquema del análisis algebraico y tuvieron influencia en España.

Baltzer: *Die Elemente der Mathematik*

La obra del alemán Baltzer[12] es la más antigua de las dos que vamos a comentar. Se publicó en 1860 y tuvo siete ediciones alemanas, la última de 1885. Ejerció influencia en Italia a través de la traducción que hizo Cremona[13], y también en España una década después. La traducción al castellano, *Elementos de Matemáticas*, tuvo formato de bolsillo y se dividió en cinco volúmenes (el original tenía dos) que se fueron publicando entre 1879 y 1881 con estos títulos: Aritmética vulgar, Aritmética universal, Álgebra, Geometría, Trigonometría. Se utilizó como libro de texto en institutos de enseñanza secundaria y en la Institución Libre de Enseñanza[14]. El primer tomo es demasiado elemental, desde luego pensado para una etapa anterior a la universitaria. En el prólogo a la traducción española escribía Echegaray[15]:

> … a pesar de la modestia de su porte y de las materias elementales que trata, es libro de verdadero mérito y de indiscutible utilidad, que puede prestar, a no dudarlo, grandes servicios en la enseñanza… es una gimnasia del espíritu, útil y provechosa al mismo tiempo. [Baltzer 1879-81, v. 1, pp. vi-vii]

12. [Baltzer 1860]. Richard Baltzer (1818-1887) ya había alcanzado notoriedad en 1857 con una obra sobre determinantes.
13. [Baltzer 1865-68]. Versión italiana realizada por Luigi Cremona (1830-1903) a partir de la segunda edición alemana.
14. [Baltzer 1879-81]. Los volúmenes de contenido más elemental, 1, 4 y 5, se tradujeron de la quinta edición alemana de 1875, y el 2 y el 3 de la sexta de 1879. Los volúmenes 2, 3 y 4 aparecieron en 1880 y el último en 1881. Veáse [Núñez, Servat 1988] y [Milllán 1991].
15. José Echegaray (1832-1916), para su biografía véase [Sánchez Ron 1990].

Se entendía por aritmética “vulgar” el estudio de los números basado en su representación decimal, comprendiendo a los números naturales y los racionales, con la divisivilidad elemental (máximo común divisor y mínimo común múltiplo), la regla de tres y los repartos proporcionales.

El contenido de análisis algebraico propiamente dicho lo forman los volúmenes segundo y tercero, cuyo desglose en “libros” aparece en la Tabla 1.

TABLA 1.
ANÁLISIS ALGEBRAICO EN EL LIBRO DE BALTZER

Aritmética Universal	Las cuatro especies del cálculo literal La potencia, la raíz, el logaritmo y la progresión geométrica El binomio, la combinatoria y sus aplicaciones Las fracciones continuas, y las series, exponencial, binómica y logarítmica.
Álgebra	Las ecuaciones en general y las funciones y ecuaciones cuadráticas en particular Las ecuaciones cúbicas y bicuadráticas, las numéricas y las indeterminadas. Teoría de las funciones algébricas.

La aritmética “universal” da un paso en abstracción respecto a la “vulgar”, estudia los diferentes sistemas de números, hasta los complejos, con independencia de su representación en un sistema de numeración, usando el cálculo literal; es un estadio más general y apropiado para el inicio de la enseñanza universitaria. Sobre ella escribía Echegaray en un segundo prólogo:

> … un tratado de *Aritmética universal*, es decir, una Aritmética a la cual se aplica el algoritmo ordinario del Álgebra, y que comprende el estudio de las principales propiedades de los números y de sus combinaciones y formas; pero son *números* representados por *letras* y *propiedades numéricas* representadas por *fórmulas algebraicas*.
>
> … las letras representan números enteros o fraccionarios, conmensurables o inconmensurables, reales o imaginarios (complejos); pero números, al fin, en un riguroso sentido. Y por esto excluye de ella las teorías en que los signos… representan otras [operaciones] distintas y de orden superior… Ejemplo de ello, … la admirable creación de Hamilton, es decir, sus célebres *cuaternios*. [Baltzer 1979-81, v. 2, pp. ii-iii]

Es digno de ser destacado, como apunta Echegaray, el carácter formal de la exposición que Baltzer hace de los números. No menciona expresamente de qué números se trata, tampoco introduce definiciones específicas por un “método genético” explícito, sino que va exponiendo las operaciones básicas, suma, producto y potencia con expresiones formadas por letras (polinomios) y los números más generales (negativos, racionales, etc.) van apareciendo a medida que considera las operaciones inversas de las tres básicas anteriores; todo ello porque las propiedades formales de la aritmética valen para todos los

Núm. 28 (2010), pp. 139-166
ISSN 0213-4306 Zubía

números, como diría Hankel, que no es mencionado en la obra. El punto más delicado en este proceso es la introducción de los números irracionales, que solventa con una idea de aproximación indefinida a través de la expresión decimal de los números. Además de la introducción de los números, en el volumen segundo se exponen temas básicos de aritmética, álgebra y análisis, los que indican los títulos de los “libros” que forman el volumen (ver Tabla 1) y además teoría de números básica (congruencias etc.), aritmética mercantil, determinantes, números figurados y probabilidades.

El volumen tercero se dedica al álgebra entendida al modo clásico como resolución de ecuaciones, el traductor Jiménez[16] lo expecifica en el prólogo a este volumen:

> El *Álgebra*, según Baltzer, es la *Teoría de las funciones algebraicas,* caso particular de la *Teoría de las funciones* o del *Análisis*,… el objeto del *Álgebra* es la *Resolución de las ecuaciones algebraicas*. [Baltzer 1979-81, v. 3, p. viii]

Este volumen se inicia con una insistencia en la idea de los irracionales, esta vez como razón de cantidades inconmensurables a la manera euclídea, seguida de nociones intuitivas de función, continuidad y derivada (cociente incremental), para entrar enseguida en la resolución de ecuaciones algebraicas, más a través de ejemplos que de métodos generales. El último capítulo, que el autor califica como “análisis algebraica, o sea teoría de las funciones”, es algo más teórico; trata sobre polinomios de una variable, interpolación, descomposición de una fracción racional y resolución numérica de ecuaciones (teorema de Sturm, de Cauchy sobre los ceros contenidos en un recinto plano, de Gauss o teorema fundamental del álgebra). Termina con una mención al método de Gräffe[17] y a la resultante por el método de Euler.

Capelli: *Instituzioni di Analisi Algebrica*

Se encuentran diseminadas por la notas que cierran los capítulos de los *Resúmenes* gran cantidad de citas bibliográficas que indican las referencias utilizadas por el autor y las recomendaciones que hace para estudios más avanzados. Entre ellas las hay específicas para ciertos temas, pero también otras dirigen a “tratados” de contenido muy extenso que son citados frecuentemente, entre ellos varios de análisis algebraico[18]:

16. Eulogio Jiménez (1834-1884), matemático vinculado a la Institución Libre de Enseñanza.

17. Remitiendo para su estudio a la memoria de [Encke 1879], lo que aprovechan los traductores para indicar en una nota que estaba “traducida al castellano, y explicada aún más” por el astrónomo Miguel Merino y Melchor (1831-1905).

18. Los tres aparecen citados en artículos de la *Enciclopedia Teubner* dedicados a algoritmos indefinidos y análisis algebraico. Esta pudo ser la fuente usada por Rey Pastor para seleccionar sus obras de referencia.

Cesàro, E., *Corso di Analisi Algebrica*, 1894.
Burkhardt, H., *Algebraishe Analysis*, 1908.
Capelli, A., *Istituzioni di Analisi Algebrica*, 1909.

Estos libros presentan un nivel superior al de Baltzer, a cuya traducción italiana Cesàro remite para evitar ocuparse de las cuestiones más elementales. Entre las mejoras que incorporan se encuentra una presentación muy clara del método genético de ampliación de los sistemas de números respetando el principio de Hankel, incorporando la construcción aritmética de los reales por cortaduras (Dedekind) o sucesiones convergentes (Cantor, Meray). Por otra parte, la exposición de los diversos capítulos de las matemáticas se va escalonando a lo largo del libro, intercalando temas entre los diferentes sistemas de números, según un criterio en parte pedagógico y en parte sistemático que cada autor hace más o menos explícito. El libro de Burkhardt es un representante genuino de la construcción de los sistemas de números por el método genético, pero ofrece poco contenido matemático complementario en sus doscientas páginas. El de Cesàro es un libro de contenido más amplio, surgido de los cursos impartidos por el autor en Nápoles entre 1886 y 1891. Sobre el programa dice el autor que es "sabiamente ecléctico" pero "desgraciadamente demasiado diverso" por las exigencias de la ordenación de los estudios de matemáticas. Es muy frecuente en este periodo, en torno a 1900, que los autores se quejen del desajuste entre lo que sería un libro sistemáticamente organizado desde el punto de vista de la materia y, por otra parte, el contenido de los cursos a impartir que viene obligado por los planes oficiales. Quizás por ello, por ser libros ajustados a cursos con programas limitados, ambos traten los desarrollos de las funciones elementales en variable real.

Pero la obra citada de Capelli[19], la más moderna de las tres, perteneciente ya al siglo XX, es la más adecuada para apreciar la evolución del análisis algebraico en el inicio de la enseñanza universitaria, y también nos interesa porque tuvo mayor influencia que las otras en la forja de la versión del análisis algebraico que enseñó Rey Pastor. El ***Análisis algebraico*** de Capelli, un grueso volumen de casi mil páginas, consta de veintidós capítulos, cuyos títulos vamos a presentar en la Tabla 2 agrupados (por nosotros, no por el autor) en cuatro partes y resaltando en negrita para cada una de ellas un rótulo que indica el sistema de números que la determina (el primero se refiere al número natural). Pretendemos así resaltar claramente la existencia de un criterio para escalonar el contenido matemático a medida que se van poniendo en circulación los sistemas de números.

19. [Capelli 1909]. Esta obra tuvo una edición menos completa en 1902. A. Capelli (1855-1910). Estudió en Roma en 1877 y completó su formación en Berlín, donde recibió la influencia de Kronecker y Weierstrass. En 1881 es nombrado profesor de análisis algebraico de la Universidad de Palermo. Fue especialista en teoría de las formas y ecuaciones algebraicas.

Núm. 28 (2010), pp. 139-166
ISSN 0213-4306 Zubía

Tabla 2.
Índice del libro de Capelli

Método genético	Temas propios
I. Génesis combinatoria de la **aritmética** e introducción al cálculo literal.	II. Divisibilidad y propiedades elementales de los números naturales. III. Elementos de análisis combinatorio.
IV. Operaciones con **números racionales.**	V. Aplicaciones de los números racionales. VI. Teoría de los determinantes y su aplicación en la resolución de problemas algebraicos de primer grado. VII. Elementos del cálculo de las funciones racionales enteras. VIII. Divisibilidad de las funciones enteras de una o más variables.
IX. Operaciones con los **números reales.**	X. Series de términos reales - Fracciones continuas infinitas. XI. Continuidad y derivabilidad de las funciones de variables reales. XII. Las funciones trigonométricas. XIII. Propiedades generales de las ecuaciones con coeficientes reales. XIV. Resolución numérica de las ecuaciones.
XV. Operaciones con **números complejos.**	XVI. Series de potencias enteras y positivas de una variable. XVII. Las funciones elípticas. XVIII. De las raíces de la ecuación de grado n. XIX. Teoría general de la divisibilidad y de la eliminación. XX. Transformación de las ecuaciones. Resolución general de las ecuaciones de los cuatro primeros grados. XXI. Principios de la teoría de los irracionales algebraicos. XXII. Transformación lineal de las formas algebraicas. Invariantes y covariantes.

Capelli llega a exponer los desarrollos en serie de potencias de las funciones trascendentes elementales en variable real, que es el objetivo estándar del análisis algebraico tradicional, pero en la introducción de su obra expone una concepción del análisis algebraico algo distinta:

> Se define por *análisis algebraico* la rama del análisis matemático que tiene por objeto el estudio de las *funciones algebraicas*. [Capelli 1909, p. xi]

El autor italiano entiende las funciones algebraicas en sus términos más generales, como explica en la misma página del libro; para una variable, son las funciones implícitas $y=f(x)$ que resultan de una ecuación $F(x,y)=0$, donde $F(x,y)$ es un polinomio en dos variables[20]. Pero sucede que el estudio de estas funciones con toda generalidad entra en los dominios del análisis superior, incluso de variable compleja, de modo que los libros dirigidos a la enseñanza de los dos primeros cursos universitarios, como los antes citados, reducen también el alcance teórico del análisis algebraico así concebido, limitándose al estudio de las funciones algebraicas más sencillas, los polinomios.

3. LA SITUACIÓN EN ESPAÑA

Para los fines de este artículo basta considerar la última parte del siglo XIX, pasada ya la Ley Moyano (1857) que creó las Facultades de Ciencias

20. A partir de una ecuación polinomial de la forma $F(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=0$ surgen las funciones algebraicas de varias variables.

(Exactas, Físicas y Naturales), y los primeros años del XX[21]. En la reforma de planes de estudios 1866 (del Ministro de Fomento Manuel de Orovio) se consolidó una situación que venía de años anteriores, en la que para ser Bachiller en Ciencias se estudiaba, entre otras materias, una asignatura de Complementos de Álgebra, Geometría y Trigonometría en primer curso y otra de Geometría Analítica en segundo. Luego, para ser Licenciado en Ciencias Físico-Matemáticas se cursaban en un primer curso (tercero en el cómputo total) Cálculo Diferencial e Integral y Geometría Descriptiva, además de Física etc. Todas estas asignaturas tenían clase diaria, al igual que la Mecánica Racional de segundo de Licenciatura (cuarto en el cómputo total) que culminaba la formación teórica del licenciado. En este esquema, el contenido de análisis algebraico elemental estaba en el Complemento de Álgebra, previo al estudio del cálculo infinitesimal[22]. La reforma de Orovio planteaba que los primeros años de los estudios de Ciencias Físico-Matemáticas fueran los de acceso a las ingenierías, que perdían así independencia en la formación de sus profesionales; los ingenieros protestaron, liderados por los de Caminos, reclamando para ellos mismos la formación en la matemática de aplicación y, por otra parte, que en la Facultad se elevara el nivel teórico, lo que suponían innecesario para los ingenieros. En esta línea argumental se expresaba un artículo publicado sin firma en la *Revista de Obras Públicas*, en el que su autor consideraba[23] insuficiente el Complemento de Álgebra y reclamaba la presencia en nuestros centros superiores de cursos de álgebra (parte del análisis algebraico) como los que Serret impartía en la Sorbona, en los que se explicaran, además de los temas más elementales de la resolución de ecuaciones que en nuestro país se enseñaban, otros como las congruencias, la teoría de los determinantes y un asomarse a la teoría de Galois, aspecto de álgebra superior que ya quedaría fuera del marco del análisis agebraico. En esa fecha el libro de Serret andaba por su tercera edición y se estaban traduciendo en Italia los *Elemente* de Baltzer, libro que avanzaba en la dirección propuesta, pues el autor reconoce el influjo de Serret en la parte relativa a la resolución de ecuaciones (anterior a la teoría de Galois), aunque la obra del francés tiene mayor nivel que la del alemán. Estas críticas de 1866 no surtieron efecto hasta la reforma de 1887, en la que la asignatura antes citada desapareció surgiendo dos llamadas Análisis Matemático 1º y 2º, con el mismo contenido de álgebra y trigonometría que la desaparecida[24]. El contenido de las nuevas asignaturas antes citadas, según el decreto de creación de las cátedras correspondientes, debía ser el siguiente:

21. La evolución de la enseñanza universitaria de las matemáticas, programas, textos y profesores, desde principios del siglo XIX, puede verse en [Outerelo 2009].

22. Textos de referencia para estas materia y época son, entre otros, los bien conocidos de Juan Cortázar y Abasolo (1809-1873). Formado en los años treinta como ingeniero de caminos en París y, a su regreso a España, influyente catedrático de matemáticas los años centrales del siglo.

23. Véase una amplia cita en [Garma 1988, p. 125].

24. El cambio de nombre sin cambiar el contenido se explica por la ambigüedad mantenida en la época entre los significados de los términos "álgebra" y "análisis", que se mantuvo hasta entrado el presente siglo. Ver por ejemplo la relación de planes y textos en [Lusa 1994].

> El primer curso comprenderá las teorías de Aritmética, no explicadas en la segunda enseñanza; el álgebra elemental en toda su extensión y la trigonometría rectilínea y esférica con el análisis de las funciones circulares.
>
> Comprenderá el segundo curso el Álgebra superior con la teoría general de ecuaciones y la introducción al estudio de las teorías modernas del álgebra[25].

Se observa la similitud de este programa general con el contenido del libro de Baltzer antes descrito, en lo que se refiere a análisis algebraico más trigonometría. Las asignaturas eran comunes a las tres Secciones de las Facultades de Ciencias, lo que añadía un componente de necesidades docentes heterogéneas.

Los primeros catedráticos que impartieron en Madrid dichas asignaturas fueron Monreal y Ruiz de Salazar, a los que siguieron Andrés y Villafañe, incorporándose en 1898, procedente de Zaragoza, el más joven Octavio de Toledo[26], de edad similar a Marzal, quien protagonizó el cambio de siglo en Barcelona[27].

Llegamos así a la famosa reforma general educativa de 1900, a cargo del ministro García Álix. Afectó a la universidad y, en particular, al plan de estudios de matemáticas (Sección de Exactas en las Facultades de Ciencias), en el que no se modernizaron los estudios de análisis matemático, permaneciendo las tres asignaturas sucesivas en los tres primeros cursos: Análisis Matemático 1º, Análisis Matemático 2º, Elementos de Cálculo Infinitesimal. La licenciatura constaba de cuatro años, pero en cuarto no se ampliaba el estudio del análisis, sino que se aplicaba lo aprendido a la asignatura Mecánica Racional[28]. Este plan recibió también numerosas críticas, esta vez desde el propio campo de las matemáticas, que reclamaban la incorporación de más análisis y su aplicación a la geometría[29]. Cuando arrancó este plan en Madrid, el catedrático de Análisis Matemático 1º era Octavio de Toledo, y Villafañe el de Análisis Matemático 2º, mientras que Irueste impartía Elementos de Cálculo Infinitesimal.

La mejor manera de entender lo que significaba la somera descripción oficial de las asignaturas es consultar los manuales o programas de los

25. Real Decreto de 30 de noviembre de 1877, Gaceta de 1 de diciembre.

26. Veáse Outerelo [2009], donde hay sucintas biografías de Agustín Monreal y García (1824-1889), Emilio Ruiz de Salazar y Usategui (1843-1895), José María Villafañe y Viñals (1830-1915) y Luis Octavio de Toledo y Zulueta (1857-1934). Para Villafañe véase también [Llombart, Lorenzo, 2001], para Octavio de Toledo [Peralta 2005].

27. Miguel Marzal y Bertomeu (1856-1915), catedrático de Análisis Matemático, primero en la Universidad de Valencia y luego en la de Barcelona.

28. Este plan de estudios ofrecía también una secuencia de cuatro Geometrías sucesivas mayoritariamente sintéticas, tres de matemática pura con un remate de aplicada: Métrica, Analítica, de la Posición (proyectiva) y Descriptiva. Finalmente el tercer vial lo formaban asignaturas de formación científica: Qímica, Física, Cosmografía y Astronomía.

29. El paladín de esta crítica fue Zoel García de Galdeano (1846-1924), al que emuló su discípulo Rey Pastor. Véase su biografía en [Hormigón 1983, 2004].

profesores. Bien significativo es el libro que producía Marzal en Barcelona, fiel seguidor de Baltzer, con alguna adición y mejora[30]. Su colega en Madrid, Octavio de Toledo, también en la línea de Baltzer, editó en 1900 su programa[31] para la asignatura Análisis Matemático 1º y más tarde publicó libros de texto[32]. De modo que la obra del alemán, traducida al castellano el año 1878 y siguientes, era una clara referencia para los profesores (Madrid y Barcelona) de las asignaturas que nos ocupan en la parte final del siglo XIX y primeros años del XX. El resultado de la presión crítica a favor de más análisis matemático ejercida desde el inicio del nuevo siglo fue el paulatino aumento de horas dedicadas a esta materia. En 1909 se pasó a la Geometría Métrica (de primer curso) el contenido de trigonometría, lo que permitió desplazar al Análisis Matemático 2º algo de cálculo diferencial de varias variables, perdiendo así en parte su carácter exclusivo de "análisis algebraico", igual que hemos visto en los libros adaptados a la enseñanza de Baltzer y de Capelli.

Con esta tradición entroncaron los *Resúmenes* de Rey Pastor, llegado a Madrid en 1913 para sustituir al jubilado Villafañe. Desde su creación en 1909 se encargaba de Complementos de Cálculo Infinitesimal José Ruiz-Castizo, el catedrático de Mecánica Racional, que compartió la asignatura con Rey Pastor una vez que en 1915 la nueva asignatura aumentó una hora semanal de clase. Cuando en 1918 se jubiló Irueste, el encargo de Elementos de Cálculo Infinitesimal pasó a Rey Pastor[33], que de este modo expandía su tarea docente en la dirección del análisis superior, sin llegar, como era su ferviente deseo, a la asignatura de análisis el doctorado, que tenía acumulada Octavio de Toledo. En el periodo 1914-20 hubo una clara competencia entre los dos catedráticos de análisis matemático, separados por treinta años de edad, tanto en el ámbito académico cuanto en el de la producción de libros de texto[34].

4. LOS *RESÚMENES* DE REY PASTOR

La costumbre que tenían los catedráticos responsables de cada una de las asignaturas Análisis Matemático 1º y 2º de turnarse en la impartición de

30. Marzal empezó como luego haría Rey Pastor, con unos *Resúmenes de las lecciones de*… litografiados en varios volúmenes, pero no llegó a sacar a imprenta su anunciado "tratado de análisis matemático". El esquema de su obra era: para primer curso, en tres volúmenes, Álgebra universal (I Calculatoria, II Combinatoria), Álgebra elemental, Trigonometría rectilínea y esférica; para el segundo curso otros tres: Teoría de funciones, Teoría general de ecuaciones, Teoría elemental de las formas algébricas. Publicó su obra en varias ediciones entre 1893 y 1910.

31. [Octavio de Toledo 1900]. El programa constaba de 48 lecciones de análisis algebraico más 12 de trigonometría.

32. Véase [Peralta 2005].

33. No por mucho tiempo, pues marchó a Buenos Aires en 1921.

34. Véase [Español 2006].

ambas, de modo que cada profesor enseñaba los dos primeros cursos a un mismo grupo de estudiantes, permitió a Rey Pastor que, aunque su cátedra específica era la de primer curso, que enseñó en 1914-15, pasara a impartir el segundo en 1915-16. Esta es una buena razón para considerar conjuntamente los dos *Resúmenes*, pues tienen una unidad que ha de articularse en dos cursos según la secuencia marcada por el plan de estudios vigente, que era el promulgado en 1900 por el ministro García Alix, con la trigonometría segregada desde 1909.

En los apuntes del primer curso no aparecieron los algoritmos indefinidos (límites, series y fracciones continuas) que eran parte natural del curso. Estos temas encabezaron los apuntes del segundo curso, con esta explicación del autor:

> El plan primitivo de este curso comprendía la aritmética universal completa, es decir, incluso los algoritmos indefinidos más importantes: series, productos infinitos, fracciones continuas infinitas y determinantes infinitos. La brevedad extraordinaria de este año académico nos ha obligado a suprimir esta parte, con la cual comenzaremos el segundo curso antes de entrar en la teoría de funciones. [Rey Pastor, 1914, p. 423]

Los *Resúmenes* tienen desde el principio la estructura en cuatro partes propia del esquema del análisis algebraico, que Rey Pastor elabora con una sistemática muy rigurosa en la línea de Capelli. En cada parte, explícitamente rotulada, define el número que toca (natural, racional, real y complejo)[35], las operaciones que pueden hacerse con ellos y las propiedades que tienen estas operaciones, insistiendo en cada ampliación del sistema en el "principio de permanencia de las leyes formales de la aritmética". Introducido el número y su operativa, pasa a desarrollar en cada parte aquellos temas de la matemática que le son propios. El conjunto unificado de los dos *Resúmenes* queda reflejado en la Tabla 3, en el que los números romanos indican los capítulos de cada uno de ellos en su columna respectiva. Completaremos después esta tabla con otra, Tabla 4, que describe el contenido con más detalle. En la columna derecha queda indicada la obra posterior en la que se desarrollaron los temas de los *Resúmenes*, a las que nos referiremos en la sección siguiente.

35. Rey Pastor no considera el número entero porque introduce los negativos a la vez que las fracciones y en toda la primera parte la resta y la división sólo se hacen cuando es posible; esto era frecuente en libros de principios del siglo XX. De este modo, situada en los números naturales la divisibilidad pierde elegancia, sobre todo en las cuestiones asociadas a la fórmula de Bezout.

TABLA 3.
LOS *RESÚMENES* DE REY PASTOR

Resumen 1	*Resumen 2*	Libros
Parte Primera: El número natural		
I.–Fundamentos de la aritmética II.–Teoría de la divisibilidad numérica III.–Combinatoria		EAA
Parte Segunda: El número racional		
I.–Operaciones elementales y fracciones continuas II.–Función racional III.–Algoritmo de los determinantes		EAA
Parte Tercera: El número real		
I.–Operaciones elementales		EAA
	I.–Algoritmos indefinidos II.–Funciones de variable real	EAA TFR
Parte Cuarta: El número complejo		
I.–Operaciones elementales		EAA
	III.–Funciones de variable compleja IV.–Algebra	EAA/LA LA

En el primer resumen los capítulos están numerados internamente a cada parte, mientras que en el segundo hay un orden general para toda la obra. El *Resumen 1* está más matizado en su división interna que el *Resumen 2*, pues ambos tienen un número similar de páginas (430, 412 respectivamente). Estas características reflejan la urgencia con que el autor realizaba estos apuntes, pero no merman claridad a su diseño educativo. En la tabla siguiente vamos a sintetizar de modo más libre y amplio su contenido:

TABLA 4.
EL CONTENIDO DE LOS *RESÚMENES*

Método genético	Temas propios
Números naturales Rey Pastor define los números naturales a partir de la coordinación (correspondencia biyectiva) de conjuntos finitos, y las operaciones con ellos mediante la suma y el producto de conjuntos.	Sistemas de numeración. Divisibilidad y congruencias. Ecuaciones diofánticas lineales. Combinatoria. Grupos de sustituciones.
Números racionales Definidos mediante fracciones (positivos) y fracciones con signo (negativos), introduciendo la igualdad (equivalencia) entre las mismas. Luego se definen las operaciones con independencia de la fracción representante del número racional.	Fracciones continuas. Polinomios y sus derivadas (formales). Fórmula de Taylor. Interpolación. Divisibilidad de polinomios de una variable. Determinantes. Sistemas lineales

Núm. 28 (2010), pp. 139-166
ISSN 0213-4306 Zubía

Números reales Definidos mediante pares de sucesiones convergentes de números racionales, lo que exige un criterio de igualdad (equivalencia) entre ellos, para establecer esta igualdad utiliza las cortaduras de números racionales.	Raíces. Potencias. Logaritmos. Límites. Series. Fracciones decimales indefinidas. Fracciones continuas indefinidas Funciones de variable real (una y varias variables). Continuidad y derivadas. Fórmula de Taylor. Series de funciones. Desarrollo de funciones en serie de potencias.
Números complejos Se definen como pares ordenados de números reales sometidos a operaciones. Luego se dan otras representaciones numéricas y geométricas.	Raíces. Potencias. Logaritmos. Límites y series. Funciones de variable compleja. Funciones elementales. Límites. Argumento. Teorema fundamental del álgebra. Exceso algébrico. Separación y aproximación de raíces. Método de Graffe. Funciones simétricas. Eliminación. Resolución algebraica de ecuaciones de grado menor que cinco. Teorema de Ruffini. Problemas geométricos de tercer grado.

Una vez explicado el número natural y sus operaciones, complementadas con el cálculo literal propio de la Aritmética universal, Rey Pastor tiene elementos para exponer el "objeto y plan de la asignatura", adelantando también el de la asignatura siguiente[36]. El primer curso ha de tratar los "sistemas de números" y sus "operaciones elementales" (las "básicas, adición y multiplicación, la potenciación y sus inversas), los "algoritmos finitos" y los "algoritmos indefinidos" y, finalmente, el "álgebra elemental" entendida como el estudio inicial de las "funciones enteras" (polinomios). El segundo curso completará el estudio de las funciones enteras entrando en el "álgebra superior" y empezará el estudio del "análisis matemático propiamente dicho", lo que significa iniciar la "teoría de las funciones de variable real". Este plan, que se detalla en la Tabla 4, consiste en el "análisis algebraico" típico de la enseñanza, con una ligera incorporación de la teoría de funciones, igual que en la obra de Capelli. Pero Rey Pastor aporta claramente elementos personales en el diseño.

Por una parte, hace completamente explícito y nítido el espíritu del tradicional análisis algebraico basado en la génesis de los números y el principio de permanencia:

> La palabra *número* tiene, pues, en cada una de estas fases, un significado cada vez más amplio, y en cada una de ellas definiremos de nuevo las dos operaciones fundamentales (adición, multiplicación) de tal modo que se conserven las mismas propiedades formales anteriores (uniforme, conmutativa, asociativa).
>
> Este principio, que sirve de norma al definir las operaciones en un sistema ampliado, se llama *principio de permanencia de las leyes formales*. [Rey Pastor 1914, p. 51]

36. Véase [Rey Pastor 1914, pp. 50-56].

Rey Pastor reconoce, en las notas al final del capítulo, que las leyes formales de las operaciones entre “magnitudes cualesquiera” se pueden desarrollar de modo puramente formal, siguiendo a Grassmann y Hankel, para luego ser aplicadas a casos concretos, pero no entra en esta forma abstracta de álgebra que va abriendo camino hacia la teoría de las estructuras. No obstante, interpreta el principio de permanencia de las leyes formales con esa tendencia a la abstracción, así, por ejemplo, lo que se expone en la parte de los números racionales valdrá para cualquier “cuerpo de números” cuyas operaciones respondan a las mismas leyes que los racionales, lo que Rey Pastor hace explícito cuando trata de los números reales y de los números complejos.

Por otra, probablemente pensando en el concepto de análisis algebraico dado por Capelli, deja claro que va a exponer un análisis algebraico en versión elemental, sin considerar funciones algebraicas generales; al considerar sólo las explícitas el análisis algebraico se reduce al álgebra:

> El estudio de las funciones algebraicas se reduce a la teoría de las funciones enteras o polinomios; y esta teoría, especialmente la investigación de los valores que anulan al polinomio o sea la resolución de ecuaciones algebraicas, se llama *Álgebra*. [Rey Pastor 1916, p. 303].

El estudio de las funciones algebraicas generales (implícitas) queda fuera del análisis algebraico (elemental) para ser estudiado como parte del análisis “trascendente”.

Señalemos por último el gusto de Rey Pastor por el término “algoritmo”, entendido como una combinación de las operaciones básicas y sus inversas. Un algoritmo puede ser “finito”, por ejemplo el algoritmo de los determinantes[37] o “indefinido” si además utiliza la operación de paso al límite, por ejemplo las series numéricas. El uso de este término fue llevado todavía más allá en *EAA* (1917), donde el estudio de los polinomios, que son combinaciones de operaciones básicas e inversas (que representan funciones), es llamado “algoritmo algebraico”; de modo correlativo, las series de potencias son algoritmos indefinidos con los que expresar funciones[38].

5. DE LA UNIDAD DE CAPELLI A LA DIVERSIDAD DE REY PASTOR

Como hemos visto, a lo largo de 1914-16 Rey Pastor ha concebido dos cursos de introducción al análisis con su versión personal del análisis

37. Rey Pastor advierte en las notas que también hay una teoría de los determinantes infinitos, definidos mediante un paso al límite (en el entonces incipiente análisis funcional). Mientras que los finitos pertenecen al ámbito del número racional, los infinitos pertenecerían al del número real, donde la teoría de límites tiene pleno sentido.

38. Véase también el expresivo título de su libro [Rey Pastor 1931, 2006]. La línea de investigación sobre sumación de series divergentes que Rey Pastor desarrolló intensamente entre 1919 y 1936 es en cierto modo una continuación natural de su interés por los algoritmos ilimitados del análisis algebraico.

algebraico en la línea de Capelli. Es notorio, basta comparar las Tablas 2 y 3-4, que los contenidos expuestos por Capelli y Rey Pastor son altamente similares, las diferencias de contenido son mínimas y si se quieren buscar matices diferenciales debe hacerse en el orden expositivo, el estilo de cada autor o en el grado de concisión de las explicaciones. Capelli es riguroso y escueto, utilizando abundante lenguaje simbólico; Rey Pastor no le va a la zaga en rigor al italiano, pero se explica con más detalle usando en menor medida el lenguaje simbólico. En este sentido, el autor español se sitúa en un nivel intermedio entre Capelli y los autores españoles de las primeras décadas del siglo XX, que escriben textos muy retóricos[39].

Para comparar de un modo íntegro las obras de Capelli y Rey Pastor habría que confrontar la del italiano, además de con los *Resúmenes*, con las obras que los desarrollaron: *EAA* (1917), *TFR* (1921-25), *LA* (1924), y que en conjunto cubrían con exceso todo el temario de las asignaturas de Análisis matemático 1º y 2º, entrando en la de Elementos de Cálculo Infinitesimal de tercer curso. Por las circunstacias que conforman la biografía del autor en esos años, el desarrollo del proyecto plasmado en los *Resúmenes* hasta quedar recogido en las obras impresas como se indica en la Tabla 3, se produjo a lo largo de un periodo demasiado dilatado, por lo que el carácter unitario que pudiera tener el proyecto inicial se fue difuminando. Repasaremos las cuatro partes de Capelli observando la ubicación de sus contenidos en la obra de Rey Pastor.

Las primeras partes (número natural) en la obra de Capelli y en el *Resumen 1* de Rey Pastor son equivalentes. Rey Pastor incorporó esta primera parte a la primera edición de *EAA*, con mejoras y adiciones que no desdibujan el aspecto general de los capítulos correspondientes. Casi lo mismo puede decirse de la segunda parte (número racional), pero hay que mencionar que Capelli trata la divisibilidad de polinomios en varias variables, caso general notablemente más complicado que el de una variable que aparece como "algoritmo algebraico" en *Resumen 1*; pero Rey Pastor corrigió esta falta de generalidad al publicar *EAA* (1917).

En las partes tercera y cuarta (número real y número complejo) la situación cambia. Capelli completa de modo muy exhaustivo los temas que son propios de cada sistema de números, mientras que Rey Pastor tiende a ajustar más su obra escrita a la marcha real de los dos cursos, dejando en *Resumen 1* lo básico de los temas asociados a reales y complejos y reuniendo el resto del material en *Resumen 2*. Así por ejemplo, Capelli explica en la parte tercera la resolución numérica de las raíces reales de las ecuaciones algebraicas (con coeficientes reales), mientras que Rey Pastor pasa todo el tema de la resolución de ecuaciones, ya sea numérica o algebraica, al

39. Los autores de este trabajo publicarán en breve otros artículos en los que se realizará una comparación de detalle en ciertos temas (algoritmos algebraicos lineales y algoritmos indefinidos) entre Capelli, Rey Pastor y Octavio de Toledo.

campo complejo, unificando el tratamiento de esta parte del álgebra en el segundo curso.

Con este criterio, *EAA* quedó rápidamente diseñada como texto del que tomar materiales para el primer curso, apropiándose del calificativo de análisis algebraico en su versión elemental y del prólogo insertado en *Resumen 2* (la Advertencia reproducida en el apéndice). El contenido de *EAA* es el de *Resumen 1*, articulado en sus cuatro partes, con el añadido del primer capítulo del *Resumen 2*, los algoritmos indefinidos reales, y la parte inicial del segundo que trata las series de números complejos. Esta decisión de adaptar más sus libros a los cursos ya se aprecia en los *Resúmenes* y el autor la hace explícita en el prólogo de *EAA*:

> En su más amplia acepción, suele llamarse *Análisis matemático* a la ciencia edificada sobre el concepto de número, y se divide en *algebraico* y *trascendente*.
>
> Llamamos *Análisis algebraico* al estudio de las operaciones con los números, y de los diversos algoritmos que resultan de combinar éstas, incluso el algoritmo algebraico, compuesto de las operaciones racionales e irracionales. El *Análisis trascendente* comprende el estudio general de las funciones de varias variables reales y complejas, continuas y discontinuas, analíticas y no analíticas, algebraicas implícitas y trascendentes.
>
> …
>
> El desarrollo ulterior de cada uno de los capítulos que componen el Análisis algebraico da origen a ramas diversas: la Aritmética, la Teoría de los números, la Combinatoria, el Álgebra… [Rey Pastor, 1917, pp. 3 y 4]

En definitiva, Rey Pastor recrea con *EAA* una versión elemental del análisis algebraico con los sistemas de números y unos pocos temas propios de cada uno de ellos, formando un conjunto adaptado a un primer curso universitario y adaptando a este esquema una definición particular del análisis algebraico. El resto del material incluido en el libro de Capelli y en *Resumen 2* tomará vida propia como rama especializada.

Con el capítulo II de *Resumen 2* inició Rey Pastor en 1918 la peripecia de escribir *TFR*, de la que aquí recogemos tan sólo unos detalles de su inicio[40], que completaremos con algunos datos adicionales. En 1921 publicó Rey Pastor un avance de su futuro libro, que constaba de

> … tan sólo unas páginas de texto (1-248) guardadas por tapas rústicas con los datos básicos del libro en la cubierta. Esta obra es, exactamente, la parte inicial (Introducción y Capítulos I a VII) de la primera edición definitiva (1925)… [Español *et al.* 2008, p. 225].

40. Está descrita con amplitud en [Español *et al.* 2008]. Rey Pastor empezó a escribir *TFR* en 1918, publicó unos fascículos iniciales en 1921, añadió más en 1924 y completó la primera edición en 1925.

El contenido de este primer fascículo está en clara correspondencia con la parte del capítulo II de *Resumen 2* (§7-15, págs. 77-163) dedicado a funciones de una variable real, si bien el texto de 1921 está más elaborado; la Tabla 5 muestra dicho paralelismo.

Tabla 5.

Correspondencia parcial entre *Resumen 2* y *TFR*

Capítulo II de *Resumen 2*	Capítulos en *TFR* (1921)
§7. Conjuntos abstractos §8. Conjuntos lineales	Introducción: La Aritmética trasfinita I. Variables independientes reales
§9-10. Funciones de una variable y sus límites	II. Funciones de una variable
§11. Continuidad de las funciones de una variable	III. Funciones continuas
§12-14. Derivadas, variación de las funciones derivables	IV. Funciones derivables
	V. Funciones enteras
§15. Fórmula de Taylor	VI. Funciones derivables n veces. Fórmula de Taylor
§16-20. Sucesiones y series de funciones. Series potenciales. Desarrollo de las funciones elementales	VII. Funciones analíticas

El capítulo V de *TFR* (1921) representa un cierto retroceso momentáneo en la evolución de Rey Pastor, retomando un aspecto del libro de Capelli ya comentado, el tratamiento de la resolución numérica de ecuaciones restringido al campo real, lo que no hizo en *Resumen 2*, donde toda la resolución de ecuaciones fue reunida como álgebra en el campo complejo, independientemente de considerar los casos particulares de raíces racionales o reales. Este capítulo desaparecerá en la siguiente entrega de *TFR* incorporándose definitivamente a *LA*. Por el contrario, la parte del capítulo II de *Resumen 2* dedicada a funciones de varias variables (§21-25, págs. 210-264) aparecerá mejorado en la segunda entrega de *TFR* (1924). Cuando un año después apareció la primera edición completa de *TFR* estos temas no sufrieron variaciones significativas. Hay que notar que el capítulo VII incluye el desarrollo en serie de potencias de las funciones elementales, en el caso de variable real, que queda así separado del análisis algebraico elemental que el autor ha identificado con *EAA*[41].

Al igual que en el libro de Capelli, la variable compleja tiene un tratamiento muy sucinto en las obras paralelas de Rey Pastor. El breve capítulo

41. Vimos que también Capelli hizo una adaptación del concepto de análisis algebraico, pero la definición más general seguía vigente en esos años. Así por ejemplo, Félix Klein (1849-1925) describió en 1908 el proceso general seguido en la enseñanza, que era el estudio del que estamos llamando análisis algebraico elemental (números y polinomios) al que "sigue en seguida el llamado Análisis algebraico, que enseña a *desarrollar en series infinitas las funciones más sencillas*…" Luego, dice Klein, viene un nivel superior que consiste en la "*Teoría de Weierstrass de las funciones de variable compleja*, que parte de las *series potenciales*". Hemos citado de la traducción española [Klein 1927]. Klein realizó esta descripción del sistema de enseñanza vigente cuando proponía su modificación para introducir cuanto antes el cálculo infinitesimal.

III de *Resumen 2* (ver Tablas 3 y 4 trata las series de números complejos, tema que se incorporó a *EAA*, la continuidad de la función compleja y la variación de su argumento, justo lo que necesita para demostrar, ya en el capítulo IV, el teorema fundamental del álgebra. Este capítulo IV (págs. 303-467) fue publicado, con ligeras variaciones y mejoras, como primera edición de *LA* en 1924, un pequeño libro de 142 páginas. También esta parte de Álgebra, la resolución de ecuaciones algebraicas, tiene un alcance muy similar al de Capelli. La ampliación posterior de *LA* con la introducción de la teoría de Galois cae ya fuera del marco del primitivo análisis algebraico.

Quedan únicamente dos capítulos del libro de Capelli que no fueron tratados por Rey Pastor en este bloque de libros de texto, el XVII y el XXII, dedicados respectivamente a las funciones elípticas y a la teoría de invariantes.

Terminaremos con una observación sobre la unidad de los tres libros de Rey Pastor. En la publicación de *TFR* (1925) hay una página previa al prólogo con este rótulo: «Tratado de Análisis Matemático. Vol. II». El volumen primero sería *EAA*, pues decía el autor en el prólogo que *TFR* era "natural continuación" de *EAA*. Pero esta primera obra había tenido una segunda edición en 1922 sin que se mencionara que fuera el primer volumen de un tratado. Por otra parte *LA* (1924) también es, aunque en otra dirección, "natural continuación" de *EAA*, pero no se presentó como parte de un tratado. Aunque en sucesivas ediciones ambos libros, al igual que *LA*, van a evolucionar por separado, parece que Rey Pastor, una vez superados los límites naturales del análisis algebraico, tuviera pensado seguir la costumbre —que practicaron Marzal y Octavio de Toledo entre otros— de componer un "tratado de análisis matemático" en varios volúmenes; pero el tiempo confirmó que *EAA* quedó pronto estabilizado, mientras que *TFR* y *LA* fueron evolucionando independientemente. En particular, ya en los años treinta, *TFR* dio paso a un nuevo libro *Elementos de la Teoría de Funciones*[42] en el que se estudia el desarrollo en serie de potencias de las funciones elementales de variable compleja, llegando así a exponer el objetivo final del análisis algebraico superior.

6. CONCLUSIONES

1. El análisis algebraico, que se originó en Euler, consistía en el estudio de los temas básicos del análisis matemático previos al cálculo infinitesimal. Se ocupa de las operaciones básicas con los números y los algoritmos finitos o indefinidos con ellos. Incluía el estudio de los polinomios (álgebra) y su objetivo máximo era el desarrollo en series de potencias de las funciones elementales. Cauchy le dio un nuevo impulso incorporando la convergencia y la variable compleja.

42. Véase [Español *et al.* 2006].

2. En el ámbito educativo secundaria-universidad, el análisis algebraico se adaptó a planes docentes y tuvo versiones de menor alcance, quedando estructurado por la construcción de los sistemas de números, y el estudio con ellos de los temas elementales del análisis matemático. Si se llegaba a expresar como series de potencias las funciones elementales se hacía sólo con variable real.
3. El análisis algebraico que Rey Pastor encontró en la universidad española, en las asignaturas Análisis Matemático 1º y 2º, estaba basado en un libro *Elementos de Matemáticas* de R. Baltzer, traducido en España entre 1879 y 1881. Las necesidades docentes plasmadas en planes de estudios obligaron a mezclar el análisis algebraico con otras materias. Primero fue la trigonometría y luego la derivación de las funciones reales.
4. Los *Resúmenes* (1914-16), que siguen la tradición del análisis algebraico europeo, aportan modernidad a la obra previa de los matemáticos españoles en ese campo docente universitario, en la línea de una referencia de más nivel y actualidad, el libro *Istituzioni di Analisi Algebraica* de A. Capelli (1909).
5. El contenido de *Resúmenes* fue desarrollado en tres libros del autor, *Elementos de Análisis Algebraico* (1917), *Teoría de las Funciones Reales* (primer fascículo de 1921) y *Lecciones de Álgebra* (1924), que forman un conjunto expositivo personal pero muy similar a la obra citada de Capelli, abarcando el análisis algebraico (con los desarrollos de las funciones elementales tratado en variable real) más la derivación de las funciones reales.
6. En *Elementos de Análisis Algebraico* (1917) el autor estableció un concepto restingido del análisis algebraico ajustado a lo que se enseñaba en Análisis Matemático 1º.
7. Las ampliaciones posteriores de *Lecciones de Álgebra* y *Teoría de las Funciones Reales* (1925) añaden otros temas que salen del campo delimitado por el tradicional análisis algebraico.

7. APÉNDICE: LA "ADVERTENCIA" EN *RESUMEN 2*

En el *Resumen 1* el autor entró en materia sin ningún tipo de presentación, pero al año siguiente insertó en las primeras páginas la "advertencia" programática que reproducimos a continuación. Es claro que ese preámbulo sirve para el conjunto de los dos cursos, aunque no apareciera en el primero[43], sin duda por la premura con que fue elaborado.

43. Sin embargo, la Advertencia pasó a ser, con algunos cambios y añadidos, la introducción de *EAA*.

Advertencia

Solamente después de haber luchado con las dificultades que el estudio de los tratados modernos (aun siendo franceses o italianos) presenta a los alumnos de los primeros cursos de Facultad, nos hemos decidido a publicar las lecciones de este año académico con análogo plan concebidas y por el mismo método expuestas que las del curso anterior.

Es tan heterogénea la composición de estas clases, comunes a matemáticos físicos, químicos y arquitectos, que cualquier plan adoptado es para unos u otros fatalmente defectuoso. Necesitan ineludiblemente los primeros educarse en la Matemática lógica, conviene a los otros más la Matemática intuitiva. Interesa a estos sobre todo el Cálculo aproximado, numérico y gráfico, para aquellos son esenciales en cambio las teorías abstractas.

No podíamos adoptar el cómodo recurso de sacrificar las necesidades de una clase de alumnos a la conveniencia de los otros; ni reducir el programa a los elementos comunes necesarios a todos ellos, pues el carácter de estos primeros cursos no es solamente preparatorio, sino que los estudios de Álgebra y Funciones en ellos realizados tienen carácter definitivo, por ser los únicos que figuran en toda la carrera de Ciencias exactas, y ésta la única encargada del cultivo de la Matemática superior en España.

Procuramos obviar esta incompatibilidad sin eludir la obligación de importar en España las teorías modernas de Matemática especulativa, explicando escuetamente en la clase general un programa mínimo, con las cuestiones capitales que a todos interesan; y organizando todos los años un curso breve de ampliación y complemento, o bien de carácter monográfico, para los alumnos aventajados, en el cual tendrán lugar adecuado multitud de teorías esenciales solamente para los matemáticos, o solamente para físicos y químicos, las cuales son objeto de uno o varios cursos en casi todos los países, y en nuestro desdichado plan de estudios no tienen cabida.

Este año hemos iniciado en esta clase especial la Teoría elemental de funciones analíticas y persistiremos en este ensayo, variando siempre de materia; pues el único modo de mostrar a los alumnos la amplitud inmensa del campo matemático en cualquiera de sus direcciones, y de iniciar en ellos la necesaria especialización, es recorrerla en años sucesivos, siguiendo itinerarios diferentes.

El programa mínimo, completado con varios §§ menos esenciales y no explicados en la clase general, constituye el contenido de este tomo. Fuera presuntuoso llamar aquí la atención sobre aquellos capítulos en que mayor labor original hemos aportado; haremos solamente dos observaciones.

Huyendo de la tendencia a elevar los asuntos elementales, dotándoles de algoritmos o tecnicismos que les dan apariencia de teoría superior, nos hemos esforzado, por el contrario, en elementalizar las cuestiones difíciles, todo lo posible sin menoscabo del rigor.

El rigor constituye hoy un mandato imperativo en todo libro de Matemática pura. Toda demostración no rigurosa se considera como de valor nulo. Demostraciones no rigurosas, tantas como se quieran, pueden darse de toda propiedad falsa. Las necesidades de la enseñanza pueden obligar a suprimir una demostración, si esta es larga y difícil; lo inadmisible de todo punto es dar como satisfactoria una demostración a medias, que exigiendo un complemento de fe en el alumno, ahoga en él su sentido crítico, inutilizándolo para toda ulterior obra original.

Sin titubear hemos adoptado, pues, el método *lógico*, y no el *intuitivo*; pero en las explicaciones orales procuramos aclarar todos los conceptos con oportunas representaciones gráficas, y en las clases prácticas hemos dedicado atención preferente al Cálculo numérico, utilizando los necesarios medios auxiliares (máquinas, reglas de cálculo, tablas diversas, etc).

Hemos puesto especial cuidado en omitir toda clase de detalles supérfluos o secundarios, que sólo desorientación producen en un primer estudio. Deteniéndonos solamente en las estaciones principales, es posible llegar en poco tiempo bastante lejos, sin gastar mares de tinta y montañas de papel. Perderse en una selva de detalles y casos particulares, que confunden y oscurecen los troncos primarios, es condenarse voluntariamente a no salir nunca de la Matemática elemental.

Un curso general no es un tratado; es una excursión exploradora por el campo de una Ciencia, que sirve de preparación al estudio de los tratados. Sólo de los más convenientes para los alumnos españoles daremos en estos apuntes amplias noticias bibliográficas (no un simple catálogo de librería), que orienten al alumno de Ciencias exactas.

Cuando estos alumnos amplíen sus conocimientos en tales tratados modernos, juzgarán (y a su fallo inapelable nos sometemos) si ha sido o no acertada la selección de materiales que constituye este modesto ensayo, hecho con carácter provisional, en espera de una organización más racional de la carrera de Ciencias.

Con esta Advertencia el autor nos indica el espíritu "renovador" con el que se lanzó a la tarea de preparar sus apuntes desde el primer curso 1914-15, espíritu que fue fervientemente reconocido y aplaudido en la reseña de los *Resúmenes* publicada por M. Correa [1914-15, 1915-16] en la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, lo que era una crítica implícita a la situación previa existente en la enseñanza universirtaria de esta materia.

REFERENCIAS

Baltzer, R. (1860) *Die Elemente der Mathematik* (2 Band), Leipzig.

Baltzer, R. (1865-68) *Elementi di matematica*, trad. L. Cremona de la 2ª ed. alemana. Genova.

Baltzer, R. (1879-81) *Elementos de matemáticas* (5 vols.), trad. E. Jiménez y M. Melero, Madrid, F. Góngora y Cía.

Capelli, A. (1909) *Istituzioni di analisi algebraica*. 4ª ed., Nápoles, B. Pellerano.

Correa, M. (1914-15) "Reseña de Rey Pastor: *Resumen de las lecciones de análisis matemático (primer curso)*, 1914-15", *Revista de la Sociedad Matemática Española* 4, 295-298.

Correa, M. (1915-16) "Reseña de Rey Pastor: *Resumen de las lecciones de análisis matemático (segundo curso)*, 1915-16", *Revista de la Sociedad Matemática Española* 5, 268-270.

Encke, J.F. (1879) *Resolución general de las ecuaciones numéricas por el método de Gräffe*, trad. M. Merino, Madrid, Imp. de la v. e h. de D.E. Aguado.

Español, L. (ed.) (1985) *Actas I Simposio sobre Julio Rey Pastor*, IER, Logroño.

Español, L. (ed.) (1990) *Estudios sobre Julio Rey Pastor*, IER, Logroño.

Español, L. (1998a) "Rey Pastor ante los cambios en el álgebra de su tiempo". En L. Español, (ed.) *Matemática y Región: La Rioja*. IER, Logroño, págs. 63-122.

Español, L. (1998b) "Un libro de texto viejo pero con categoría". *Suma* 27, 121-124.

Español, L. (2006) "Julio Rey Pastor: Primeros años españoles: hasta 1920". *La Gaceta de la RSME* 9.2, 546-585.

Español, L., Fernández, E., Mínguez, Mª. C. (2006) "El libro de texto de Rey Pastor *Elementos de la teoría de funciones*". En: *Actas del IX Congreso de la Siciedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas (27-30 de septiembre de 2005)*. SEHCYT, Cádiz, pp. 837-847.

Español, L., Fernández, E., Mínguez, Mª. C. (2008) "La peripecia (1918-1939) de un libro de texto de Julio Rey Pastor: *Teoría de las funciones reales*". En: Mª.A. Velamazán, F. Vea, J. Cobos, C. Martín (coords.), *La Historia de la Ciencia y de la Técnica: un Arma Cargada de Futuro. Ensayos en Homenaje a Mariano Hormigón*. Diputación de Cádiz, Cádiz, pp. 221-235.

Fraser, C.G. (1989) "The Calculus as Algebraic Análisis: some observations on Mathematical Análisis in the 18th Century", *Arch. Hist. Exact. Sci.* 39, 317-335.

Garma, S. (1988) "Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX". En J.M: Sánchez Ron (ed.) *Ciencia y sociedad en España*, Ed. el Arquero / CSIC, Madrid, pp. 93-127.

Hankel, H. (1867) *Théorie der complexen Zahlensysteme*. Leipzig, L. Voss.

Hormigón, M. (1983) "Una aproximación a la biografía científica de García de Galdeano", *El Basilisco* 16, 38-47.

Hormigón, M. (2004) "Una aproximación a la biografía científica de Zoel García de Galdeano", *La Gaceta de la RSME* 10.1, 281-294.

Jahnke, H.N. (1993) "Algebraic Analysis in Germany, 1780-1840: some mathematical and philosophical issues", *Historia Mathematica* 20, 265-284.

Klein, F. (1927) *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, vol. I: Aritmética, Álgebra, Análisis. Trad. R. Araujo, Biblioteca Matemática (dir. J. Rey Pastor), Madrid. Hay una reedición reciente: Nivola 2006.

Llombart, J., Lorenzo, J. (2001) “”De la Escuela General Preparatoria a la Universidad Central (Madrid): Biografía académica-científica del matemático hispano cubano José María Villafañe y Viñals (1830-1915). *Revista Ciencias Matemáticas* 19(2), 120-132.

Lusa, G. (1994) “Matemáticas en la ingeniería: el cálculo infinitesimal durante la 2ª mitad del siglo XIX”. En J.M. Camarasa et al. (Coords.) *I Trobades d’Història de la Ciència i de la Tèctica (Maó, 11-13 setembre 1991)*, Barcelona, Institut d’Estudis Catalans & Institut Menorquí d’Estudis, pp. 263-282.

Millán, A. (1988) *El matemático Julio Rey Pastor*, Universidad de La Rioja / IER, Logroño, 1988.

Millán, A. (1991) “Los estudios de geometría superior en España en el siglo XIX”, *Llull* 14, 117-186.

Núñez, J.M., Servat, J. (1988) “La matemática y la institución libre de la enseñanza: concepciones teóricas y pedagógicas”, *Llull*, 11(20), 75-96.

Octavio de Toledo, L. (1900) *Programa de Análisis Matemático*. Primer Curso. Madrid, Fortanet.

Outerelo, E. (2009) *Evolución histórica de la licenciatura en matemáticas (exactas) en la Universidad central*. Facultad de Matemáticas de la UCM, Madrid.

Peralta, J. (2005) “Octavio de Toledo, la sucesión de los promotores de nuestro despertar matemático", *La Gaceta de la RSME* 8.2, 527-547.

Pringsheim, A., Faber, G. (1992) “Analyse algèbrique”. En: J. Molk (ed.) *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, t. II, v. 2, Gabay, París, pp. 1-93.

Rey Pastor, J. (1914) *Resumen de las lecciones de Análisis Matemático (Primer Curso) explicadas por D. Julio Rey Pastor en la Universidad de Madrid. Curso de 1914-1915*. Madrid. Artes Gráficas Mateu, Paseo del Prado, 34.

Rey Pastor, J. (1916) *Resumen de las lecciones de Análisis Matemático (Primer Curso) explicadas por D. Julio Rey Pastor en la Universidad de Madrid. Curso de 1915-1916*. Madrid. Artes Gráficas Mateu, Paseo del Prado, 34.

Rey Pastor, J. (1917) *Elementos de Análisis Algebraico*, Madrid, Fortanet.

Rey Pastor, J. (1924) *Lecciones de Álgebra*, A. Medina (Toledo), Madrid.

Rey Pastor, J. (1925) *Teoría de las Funciones Reales*, Imp. R. Velasco, Madrid.

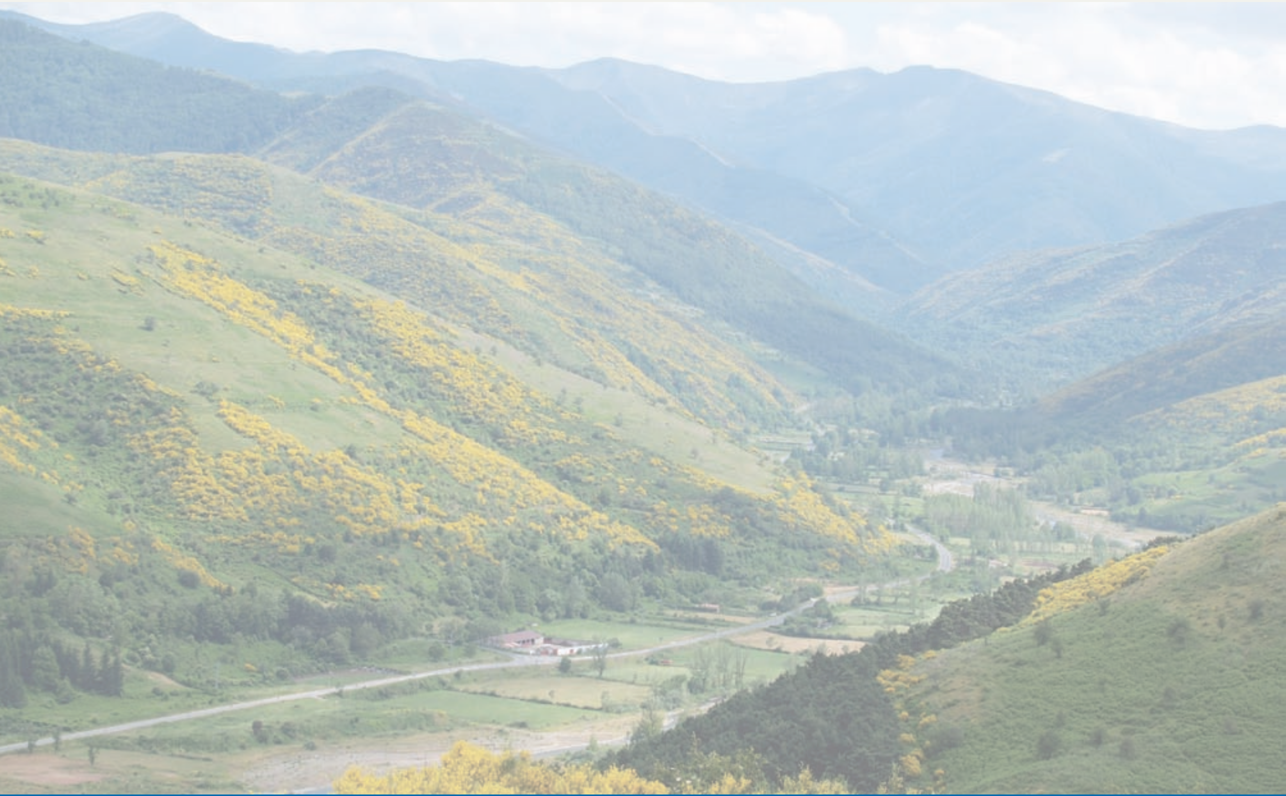
Rey Pastor, J. (1931) *Teoría de los Algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, Imp. de la Universidad, Buenos Aires.

Rey Pastor, J. (2006) *Teoría de los Algoritmos lineales de convergencia y de sumación*, con notas y comentarios de E. Fernández Moral y estudios introductorios de A. Durán y L. Español, IER, Logroño.

Ríos, S., Santaló, L.A. y Balanzat, M. (1979) *Julio Rey Pastor, matemático*, Instituto de España, Madrid.

Sánchez Ron, J.M. (1990) "José Echegaray: matemático y físico-matemático". En J.M. Sánchez Ron (ed.), *José Echegaray*, Fundación Banco Exterior de España, Madrid, pp. 11-132.

Schlömilch, O. (1845) *Handbuch der algebraischen Analysis*, Jena.



ZUBÍA

28

Gobierno de La Rioja
www.larioja.org

Instituto
de Estudios
Riojanos