



Control de sistemas lineales de parámetros variantes

Variant parameter linear systems control

PEDRO ANTONIO TEPPA GARRÁN¹

pteppa@usb.ve

Universidad Simón Bolívar

JOSÉ MANUEL ANDRADE DA SILVA²

jma28@leicester.ac.uk

University Road, Leicester, England - U.K.

Recibido: 05/03/2008

Aceptado: 11/06/2008

Resumen

En este trabajo se consideran dos estrategias de control de un sistema lineal de parámetros variantes (LPV). En la primera estrategia, el sistema LPV es representado en el espacio de estado a través de incertidumbres politópicas convexas. Tal caracterización permite el empleo de un enfoque robusto y en

¹ Pedro A. Teppa G. recibió el título de Ingeniero Electricista en la Universidad Metropolitana, (Caracas, Venezuela) en 1989. Los grados de Magíster en la Universidad Simón Bolívar, (Caracas, Venezuela) en Ingeniería Electrónica y Matemáticas, en 1994 y 1998, respectivamente; y el Ph.D en Sistemas de Control en la Universidad Paul Sabatier (Toulouse, Francia). Actualmente es Profesor Titular del Departamento de Procesos y Sistemas de la Universidad Simón Bolívar. Su área de investigación incluye el control no lineal, robusto, óptimo y difuso.

² José Manuel Andrade recibió el título de Ingeniero Electricista en la Universidad Metropolitana, (Caracas, Venezuela) en 1998 y el grado de Magíster en Ingeniería de Sistemas en la Universidad Simón Bolívar, (Caracas, Venezuela) en 2002. Actualmente es un estudiante de Ph.D. en la University of Leicester del Reino Unido. Es Profesor Asistente del Departamento de Procesos y Sistemas de la Universidad Simón Bolívar y su área de investigación incluye el control no lineal y de estructura variable.



particular, la noción de estabilidad cuadrática. Situación que abre la puerta de métodos numéricos muy poderosos para la síntesis de leyes de control dentro del formalismo de las desigualdades matriciales lineales (LMI). En el contexto de la segunda estrategia, las ecuaciones que describen al sistema LPV son interpretadas como una familia de sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) provenientes de mediciones en tiempo real del vector de parámetros. Esto permite proponer una estrategia de control del tipo Programación de Ganancias. Ahora bien, dentro de la técnica de Programación de Ganancias nos concentramos en el mecanismo de interpolación entre los diferentes controladores lineales invariantes en el tiempo, los cuales han sido diseñados para cada miembro de la familia de modelos LTI. Se plantea una metodología de interpolación inspirada en modelos difusos de Takagi-Sugeno, con la ventaja de no necesitar, en absoluto, de la maquinaria difusa (definición de conjuntos difusos, establecimiento de la base de reglas, adopción del mecanismo de inferencia, etc.).

Palabras clave: Sistemas LPV, sistemas politópicos, programación de ganancias, modelos difusos Takagi-Sugeno.

Abstract

This paper presents two strategies for controlling Linear Parameter Varying (LPV) Systems. In the first one, the LPV system is represented by a polytopic uncertain linear system. Such a model allows the use of a robust control approach based on the quadratic stability concept. This scheme opens the door to powerful numerical methods for the synthesis of control laws using the Linear Matrix Inequalities (LMI) formalism. In the second strategy, the LPV system is represented by a family of Linear Time Invariant Systems (LTI) by the measure in real time of the parameter vector. The family of LTI systems is exploited to propose a gain scheduling control law. In the context of the gain scheduling approach, we work in the interpolation mechanism of the LTI controllers obtained for each LTI family member. An interpolation methodology inspired by Takagi – Sugeno Fuzzy models is proposed, with the advantage that it does not need the fuzzy machinery (fuzzy sets, inference system, rule base, etc.).

Key words: LPV Systems, polytopic systems, gain scheduling, Takagi- Sugeno Fuzzy Models.



Notación: La notación es estándar. Letras mayúsculas A, B, \dots denotan matrices de dimensión adecuada dependiendo del contexto. A^T corresponde a la transpuesta de la matriz A . $A > 0$ (≥ 0) significa que la matriz A es definida (semi-definida) positiva, $A > B$ ($\geq B$) que $A - B > 0$ (≥ 0) y $A < 0$ (≤ 0) que $-A > 0$ (≥ 0).

Introducción

Tres clases importantes de sistemas lineales pueden ser considerados (i) Sistemas Lineales Invariantes en el Tiempo (LTI), (ii) Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo (LTV); y (iii) Sistemas Lineales con Parámetros Variantes (LPV).

Los sistemas LTI (Brogan, 1991; Chen, 1999) representan la clase que aparece con mayor frecuencia en la literatura especializada de los sistemas de control; alrededor de éstos se ha desarrollado una exitosa y auto-contenida teoría. Los sistemas LTI son descritos en el espacio de estado a través de la ecuación:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

donde $x(t) \subseteq \mathfrak{R}^n$ es el vector de estado, $u(t) \subseteq \mathfrak{R}^m$ es el vector de control y las matrices de estado A y de entrada B poseen dimensión $n \times n$ y $n \times m$, respectivamente.

Los sistemas LTV (Rugh, 1995) no tienen asociada una teoría de análisis y síntesis en un nivel de madurez como la encontrada en los sistemas LTI, en consecuencia, las potenciales aplicaciones están restringidas a problemas con una estructura particular (por ejemplo, la matriz de estado satisface una condición global de Lipschitz, es T-periódica, entre otros). La descripción en variables de estado de los sistemas LTV está completamente definida a través de la dependencia explícita del tiempo de las matrices $A(t), B(t)$, como se aprecia en la ecuación:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2)$$

Un sistema LPV (Biannic, 1996; Courties, 1999; Pham, 2007) depende explícitamente de un parámetro o de un vector de parámetros $\theta(t)$ variante en el tiempo. El mismo es descrito $\forall t \geq 0$ por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\theta(t))x(t) + B(\theta(t))u(t) \\ \theta(t) &= [\theta_1(t) \quad \dots \quad \theta_r(t)]^T \in \Omega \subset \mathfrak{R}^r \end{aligned} \quad (3)$$

Tal modelo permite tomar en cuenta las variaciones paramétricas de un sistema dinámico (masa, temperatura, concentración, velocidad, presión dinámica, ángulo de ataque en un avión, entre otros). El modelo evoluciona en función de una trayectoria paramétrica admisible. Los puntos que conforman la trayectoria admisible pertenecen en todo instante al conjunto compacto $\Omega \subset \mathfrak{R}^r$, esto es, el vector de parámetros satisface en todo tiempo t la condición:

$$\theta(t) \in \Omega = \left\{ \theta(t) : \theta_i^- \leq \theta_i(t) \leq \theta_i^+ \quad \forall i = 1, 2, \dots, r \right\} \subset \mathfrak{R}^r \quad (4)$$

con θ_i^- y θ_i^+ las cotas inferior y superior del parámetro $\theta_i(t)$.

Ahora bien, los sistemas LPV pueden dar origen a dos interesantes interpretaciones: (i) pueden verse como sistemas lineales sujetos a incertidumbres $\theta(t)$, y en consecuencia, la síntesis de un controlador debe abordarse desde la perspectiva del control robusto; (ii) pueden verse como una familia de sistemas lineales provenientes de la linealización de un sistema no lineal sobre una variedad (*manifold*) de equilibrio. Esto último conduce a un esquema de programación de ganancias.



En este trabajo, ambas interpretaciones nos permiten formular dos estrategias de control. En la *primera estrategia* el sistema LPV es representado en el espacio de estado a través de incertidumbres politópicas convexas (Geromet et al., 1991). Lo que da pie a un enfoque robusto y en particular, al empleo de la noción de estabilidad cuadrática (Barmish, 1985). En el contexto de la *segunda estrategia*, las ecuaciones que describen al sistema LPV son interpretadas como una familia de sistemas LTI provenientes de mediciones en tiempo real del vector de parámetros. La disponibilidad del vector de parámetros y la interpretación del sistema LPV como una familia de modelos LTI es explotada a fin de proponer una estrategia de control del tipo *Programación de Ganancias* (Rugh y Shamma, 2000; El Farra et al, 2008). Ahora bien, dentro de la técnica de Programación de Ganancias, nos concentramos en el mecanismo de interpolación entre los diferentes controladores lineales invariantes en el tiempo, los cuales han sido diseñados para cada miembro de la familia de modelos LTI. Se plantea una metodología de interpolación inspirada en modelos difusos de Takagi y Sugeno (1985), con la ventaja de no necesitar en absoluto de la maquinaria difusa (definición de conjuntos difusos, establecimiento de la base de reglas, adopción del mecanismo de inferencia, etc.). El artículo está organizado de la siguiente forma: en la sección II se describe la primera estrategia basada en control robusto; la sección III estudia la segunda estrategia de control, se plantea el algoritmo general de programación de ganancias y se muestra el esquema analítico de interpolación que sustituye el mecanismo de interpolación del modelo difuso Takagi-Sugeno que describe al sistema LPV. Finalmente, en la sección IV se comparan ambas estrategias a través de simulaciones sobre un modelo matemático de un sistema LPV con dos parámetros variantes.

Primera estrategia (enfoque robusto)

Con el propósito de desarrollar una estrategia de control de sistemas LPV inspirada en un enfoque robusto, se considera un sistema de esta clase descrito por (3). Las combinaciones extremas de los parámetros en el interior del conjunto compacto definido en (4) se representan a través de los vectores:

$$\theta^{(i)}(t) = [\theta_1^{(i)}(t) \quad \dots \quad \theta_r^{(i)}(t)]^T, \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

A partir de los vectores $\{\theta^{(i)}\}_{i=1}^N$ se construyen modelos locales (LTI) para el sistema LPV haciendo:

$$(A_i, B_i) = (A(\theta^{(i)}), B(\theta^{(i)})), \quad i = 1, \dots, N \quad (6)$$

Por lo que ahora es posible describir el sistema LPV (3) dentro del conjunto Ω (4) a través del siguiente sistema politópico (Geromet et al., 1991; Teppa, 2003):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A \in D_A, B \in D_B \quad (7)$$

Con D_A y D_B dominios de incertidumbre politópica definidos como:

$$A \in D_A \hat{=} \left\{ A \in \mathfrak{R}^{n \times n} : A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}, \quad (8)$$

$$B \in D_B \hat{=} \left\{ B \in \mathfrak{R}^{n \times m} : B = \sum_{i=1}^N \gamma_i B_i, \gamma_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \gamma_i = 1 \right\}. \quad (9)$$

En lo que sigue se va a estudiar la estabilidad cuadrática (Barmish, 1985; Boyd et al., 1994) del sistema politópico no forzado ($u(t) = 0$).

Teorema 1: *El sistema politópico no forzado $\dot{x}(t) = Ax(t)$, $A \in D_A$ es cuadráticamente estable si y sólo si existe una matriz $P = P^T \in \mathfrak{R}^{n \times n} > 0$ tal que $A_i^T P + P A_i < 0$, $i = 1, \dots, N$*



Demostración: La estabilidad cuadrática requiere que todas las trayectorias de estado converjan al estado de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$. Una condición necesaria y suficiente es la existencia de una función de Lyapunov definida positiva $V(x) = x^T P x$ decreciente a lo largo de las trayectorias de estado. Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(x) &= \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} < 0, \quad A \in D_A \\ &\Leftrightarrow x^T [A^T P + P A] x < 0, \quad A \in D_A, \\ &\Leftrightarrow A^T P + P A < 0, \quad A \in D_A, \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^N \alpha_i (A_i^T P + P A_i) < 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \\ &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right)^T P + P \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i A_i \right) < 0, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \\ &\Leftrightarrow A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{10}$$

Si pre y post multiplicamos la ecuación (10) por la matriz no singular $P^{-1} > 0$ tenemos la condición dual de estabilidad cuadrática siguiente:

$$S = P^{-1} > 0, \quad S A_i^T + A_i S < 0, \quad i = 1, \dots, N \tag{11}$$

A continuación nos planteamos bajo qué condiciones el sistema incierto politópico (7 - 9) que representa al sistema LPV (3) en el conjunto compacto

de variación paramétrica (4), es cuadráticamente estabilizable a través de una ley de control de realimentación de estado dada por:

$$u(t) = Kx(t), \quad K \in \mathfrak{R}^{m \times n} \quad (12)$$

A ese fin se tiene el resultado siguiente (Teppa, 2003):

Teorema 2 *El sistema (7 – 9) es cuadráticamente estabilizable por (12) si y sólo si existe una matriz $S = S^T \in \mathfrak{R}^{n \times n} > 0$ y una matriz $R \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ (arbitraria) tales que:*

$$SA_i^T + A_i S + R^T B_i^T + RB_i < 0, \quad i = 1, \dots, N \quad (13)$$

con $K = RS^{-1}$ la matriz de realimentación de estado.

La demostración del Teorema 2 es similar a la anterior. Es evidente que la condición de estabilizabilidad cuadrática (13) corresponde a un problema LMI de factibilidad en las variables S y R (Boyd et al., 1994). Ahora bien, si adicionalmente se exige el cálculo de $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tal que se verifique:

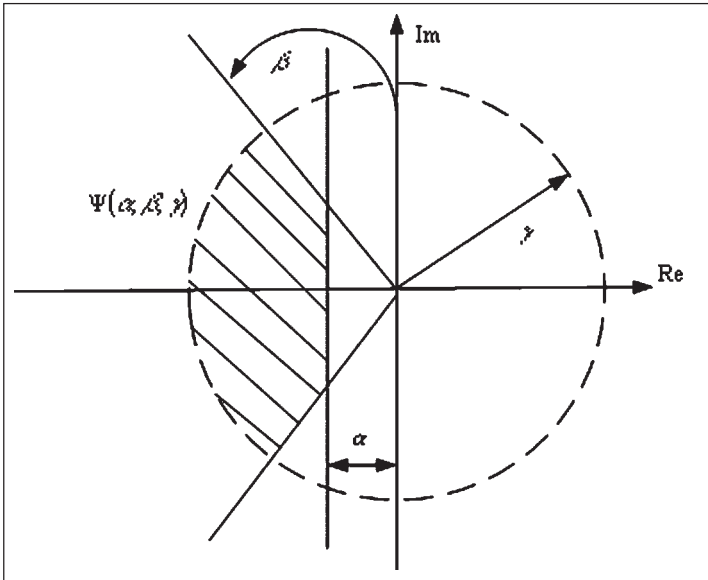
$$sp(A + BK) \in \Psi(\alpha, \beta, \gamma) \quad (14)$$

Donde $sp(\cdot)$ denota el espectro de una matriz y Ψ es una región compacta en el plano complejo, como se ilustra en la figura N° 1. El parámetro α regula la velocidad de la respuesta, β el amortiguamiento y γ las dinámicas más rápidas, esto último es un factor crítico en la especificación de los actuadores del sistema de control.

La condición (14) se satisface a través del siguiente resultado (Chilali y Gahinet, 1995):



FIGURA N° 1
 REGIÓN DE UBICACIÓN DE LOS AUTOVALORES A LAZO CERRADO
 DE LA MATRIZ A + BK



Teorema 3. El sistema lineal incierto politópico (7-9) es cuadráticamente estabilizable por (12) y sus autovalores a lazo cerrado verifican la condición (14) si y sólo si existen matrices $S = S^T > 0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ y $R \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ (arbitraria) tales que:

$$A_i S + S A_i^T + B_i R + R^T B_i^T + 2\alpha S < 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} -\beta S & A_i S + B_i R \\ * & -\beta S \end{bmatrix} < 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \text{sen } \gamma (A_i S + S A_i^T + B_i R + R^T B_i^T) & * \\ \text{cos } \gamma (S A_i^T - A_i S + R^T B_i^T - B_i R) & \text{sen } \gamma (A_i S + S A_i^T + B_i R + R^T B_i^T) \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$



la ganancia estabilizante es $K = RS^{-1}$, $i = 1, \dots, N$. (* denota bloque transpuesto).

El teorema 3 corresponde igualmente a la resolución de un problema de factibilidad dentro del formalismo de desigualdades matriciales lineales.

Segunda estrategia (enfoque de programación de ganancias)

La técnica de Programación de Ganancias (Rugh y Shamma, 2000; El Farra et al, 2008) es empleada normalmente en el control de plantas no lineales cuando se conoce la relación entre la dinámica de la planta y las condiciones de operación y donde un modelo sencillo lineal invariante en el tiempo no es suficiente para propósitos de control. Se adaptará la metodología general de programación de ganancias a los efectos de controlar los sistemas LPV. La misma evoluciona de la siguiente forma:

- i. Representar el sistema LPV dado por (3) en las combinaciones extremas del vector de parámetros (5), obteniéndose un conjunto de sistemas LTI de la forma (6).
- ii. Determinar un controlador lineal para cada modelo LTI a través de técnicas convencionales de síntesis de controladores lineales e invariantes en el tiempo.
- iii. Elaborar una ley de control global, que puede consistir por ejemplo, en la interpolación adecuada de los controladores lineales o en la conmutación de éstos.
- iv. Asegurar la estabilidad y el desempeño del sistema LPV a través de simulaciones.

En el paso (ii) se empleará la realimentación lineal de las variables de estado en la síntesis de los controladores locales (Brogan, 1991; Chen, 1999). En el paso (iii) se utilizará un esquema de interpolación analítica inspirado en un modelo difuso Takagi-Sugeno del sistema LPV (3). A ese



fin, se considera una descripción en el dominio compacto paramétrico Ω del sistema LPV a través de un conjunto de sistemas LTI dados por (6). La i -ésima regla difusa $R_d^{(i)}$ de la base de reglas de un modelo Takagi-Sugeno de (3) es:

$$R_d^{(i)} : \text{Si } x_1(t) \text{ es } FS_1^{(i)} \text{ and ... and } x_n(t) \text{ es } FS_n^{(i)}$$

Entonces $\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), i = 1, \dots, N$

Las variables de decisión que aparecen en el antecedente de cada regla difusa corresponden a las componentes del vector de estado, $u(t)$ es el vector de control, N el número de reglas y los términos $FS_j^{(i)}$ denotan conjuntos difusos. Se define:

$$w^{(i)}(x_1(t), \dots, x_n(t)) = w^{(i)}(x(t)) = \prod_{j=1}^n \mu_j^{(i)}(x_j(t)) = w^{(i)} \quad (18)$$

donde $\pi_j^{(i)} : \mathfrak{R} \rightarrow [0,1]$ es la función de membresía del conjunto difuso $FS_j^{(i)}$. Dado un par $(x(t), u(t))$ el sistema difuso resultante se infiere como el promedio ponderado de los modelos locales y tiene la forma:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n \mu_j^{(i)}(x_j(t)) (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^n \mu_j^{(i)}(x_j(t))} = \frac{\sum_{i=1}^N w^{(i)} (A_i x(t) + B_i u(t))}{\sum_{i=1}^N w^{(i)}} \quad (19)$$

Si se hace

$$\rho_i = \frac{w^{(i)}}{\sum_{i=1}^r w^{(i)}} \quad (20)$$

la ecuación (19) se transforma en:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^N \rho_i (A_i x(t) + B_i u(t)) = \left(\sum_{i=1}^N \rho_i A_i \right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^N \rho_i B_i \right) u(t)$$

o sea,

$$\dot{x}(t) = A(\rho)x(t) + B(\rho)u(t) \quad (21)$$

La ecuación (21) representa formalmente un sistema politópico, ya que se cumple:

$$\alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$$

La idea asociada al mecanismo de interpolación del modelo Takagi-Sugeno (promedio ponderado de los modelos locales) es empleada en la formulación de *un esquema analítico de interpolación* que es independiente de toda la maquinaria difusa vinculada con los modelos Takagi-Sugeno. A ese fin, se retoma el sistema LPV (3) considerándose las combinaciones extremas del vector de parámetros $\{ \theta^{(i)} \}_{i=1}^N$ (5). Inmediatamente, se determinan los modelos LTI (6) y se diseña un controlador LTI por realimentación de estado $u(t) = K_i x(t)$ para cada modelo local. El cómputo de los controladores locales se hace garantizando que los autovalores de la matriz de estado a lazo cerrado $(A_i + B_i K_i)$ estén contenidos en el interior de la región $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ de la figura (1). El vector de parámetros $\theta(t)$ se emplea para construir un controlador global que interpole los controladores locales. A ese fin, para todo instante de tiempo t , el vector $\theta(t)$ puede expresarse como:

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) \theta^{(i)}(t), \quad \sum_{i=1}^N \mu_i(t) = 1 \quad (22)$$



Los pesos $\mu_i(t)$ pueden calcularse para todo instante de tiempo t a través del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \mu_1(t)\theta^{(1)}(t) + \dots + \mu_N(t)\theta^{(N)}(t) = \theta(t) \\ \mu_1(t) + \dots + \mu_N(t) = 1 \end{cases}$$

o sea,

$$\begin{bmatrix} \theta^{(1)}(t) & \dots & \theta^{(N)}(t) \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \vdots \\ \mu_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resultando:

$$\begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \vdots \\ \mu_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^{(1)}(t) & \dots & \theta^{(N)}(t) \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} \theta(t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde $[\cdot]^+$ denota la pseudoinversa de la matriz. La ecuación (23) corresponde al esquema de interpolación analítico que se utilizará en este trabajo. El sistema LPV (3) puede aproximarse entonces, combinando los modelos locales según:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^N \mu_i(t) A_i x(t) + \sum_{i=1}^N \mu_i(t) B_i u(t) \\ &= \tilde{A}(t)x(t) + \tilde{B}(t)u(t) \end{aligned} \quad (24)$$

Empleando los mismos pesos, una matriz de realimentación de estado global $\tilde{K}(t)$ se construye a partir de las matrices de realimentación de estado locales calculadas con antelación, esto es:

$$\tilde{K}(t) = \sum_{i=1}^N \mu_i(t) K_i, \quad u(t) = \tilde{K}(t)x(t), \quad (25)$$

donde los pesos $\mu_i(t)$ se calculan resolviendo (23) de manera continua en el tiempo. Esto resulta en el sistema a lazo cerrado siguiente:

$$\dot{x}(t) = (\tilde{A}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{K}(t))u(t) \quad (26)$$

Ejemplo numérico

Considérese un sistema LPV con dos parámetros variables descrito por la ecuación de estado:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\theta_1(t) & -\theta_2(t) \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (27)$$

Los parámetros variables están confinados $\forall t \geq 0$ a los intervalos $\theta_1(t) \in [-1, 1]$ y $\theta_2(t) \in [-2, 2]$. El conjunto de variación paramétrica se muestra en la figura N° 2.

Las combinaciones extremas de los parámetros corresponden a:

$$\{\theta^{(i)}\}_{i=1}^4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

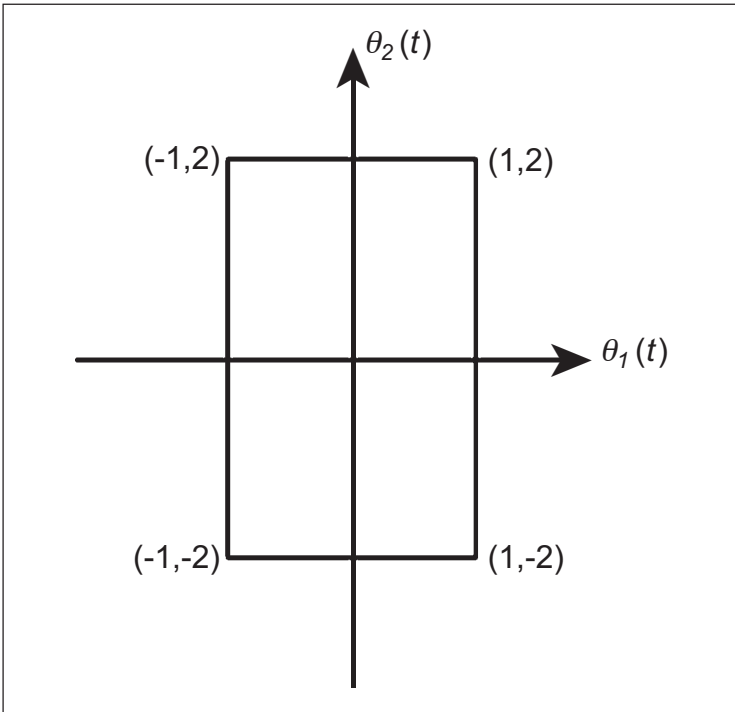
Por lo que los sistemas LTI asociados a cada vértice son:

$$\{A_i, B_i\} = \left\{ \begin{array}{l} A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (28)$$



FIGURA N° 2

CONJUNTO COMPACTO DE VARIACIÓN DE LOS PARÁMETROS $\theta_1(t)$ Y $\theta_2(t)$

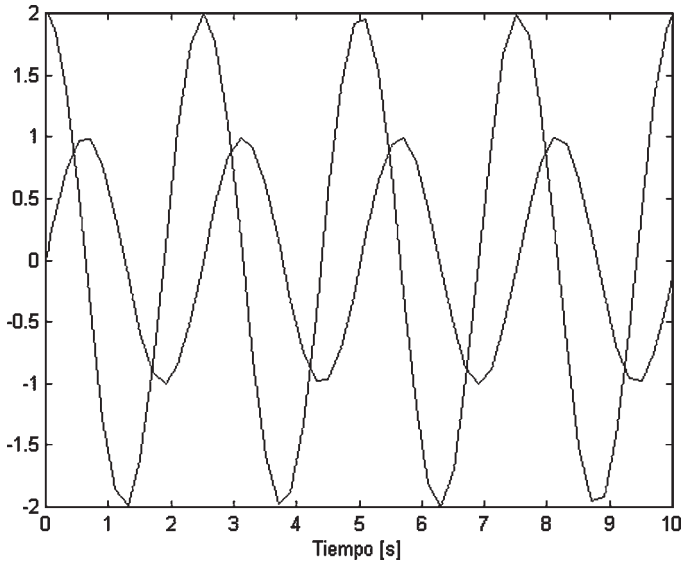


Los sistemas asociados a los vértices 2, 3 y 4 son inestables. Para efectos de la simulación se supone que el vector de parámetros es:

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(w_1 t) \\ 2 \cos(w_2 t) \end{bmatrix} \quad (29)$$

como se aprecia en la figura N° 3.

FIGURA N° 3
VARIACIÓN DE PARÁMETROS INCIERTOS DENTRO DE LAS COTAS PREVISTAS



Estrategia 1

En este caso, el sistema LPV (27) se representará en el interior del conjunto de variación paramétrica de la figura N° 2 a través del sistema politópico:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \quad (30)$$

$$A \in D_A \hat{=} \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A = \sum_{i=1}^4 \alpha_i A_i, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 1 \right\} \quad (31)$$



Donde las matrices $A_i, i = 1, \dots, 4$ son dadas en la ecuación (28). A continuación, se emplea el Teorema 3. A ese fin, se va a determinar la matriz $K \in \mathfrak{R}^{1 \times 2}$ tal que los polos a lazo cerrado del sistema (30-31) con $u(t) = Kx(t)$ se encuentren en el interior de la región del plano complejo $\Psi(\alpha, \beta, \gamma) = \Psi(4, 10, \pi/4)$. La resolución del problema LMI de factibilidad empleando Matlab® (Gahinet et al., 1995) proporciona:

$$K = [-44.5076 \quad -11.8704] \quad S = \begin{bmatrix} 0.0361 & -0.1904 \\ -0.1904 & 1.5412 \end{bmatrix}, \quad R = [0.6525 \quad -9.8209] \quad (32)$$

El código de Matlab® que resuelve el problema LMI de factibilidad del Teorema 3 se incluye en la figura N° 4.

FIGURA N° 4

CÓDIGO MATLAB® PARA RESOLVER EL PROBLEMA LMI DE FACTIBILIDAD DEL TEOREMA 3

<pre>clear A1=[0 1;-1 -2]; A2=[0 1;-1 2]; A3=[0 1;1 -2]; A4=[0 1;1 2]; B=[0;1]; % Definición de la región LMI Alfa=input('Introduzca el valor de Alfa, '); Ro=input('Introduzca el valor de Ro, '); theta=input('Introduzca el valor de Theta, '); setlmis([]) S=lmivar(1,[4 1]); % S(2,2) simétrica R=lmivar(2,[1 4]); % R(1,2) % S > 0 lmiterm([-1 1 1 S],1,1);</pre>	<pre>% Restricciones asociadas a parámetro Alfa lmiterm([2 1 1 S],A1,1,'s'); lmiterm([2 1 1 R],B,1,'s'); lmiterm([2 1 1 S],2*Alfa,1); lmiterm([3 1 1 S],A2,1,'s'); lmiterm([3 1 1 R],B,1,'s'); lmiterm([3 1 1 S],2*Alfa,1); lmiterm([4 1 1 S],A3,1,'s'); lmiterm([4 1 1 R],B,1,'s'); lmiterm([4 1 1 S],2*Alfa,1); lmiterm([5 1 1 S],A4,1,'s'); lmiterm([5 1 1 R],B,1,'s'); lmiterm([5 1 1 S],2*Alfa,1); % Restricciones asociadas a Ro</pre>
--	--



Continuación Figura N° 4

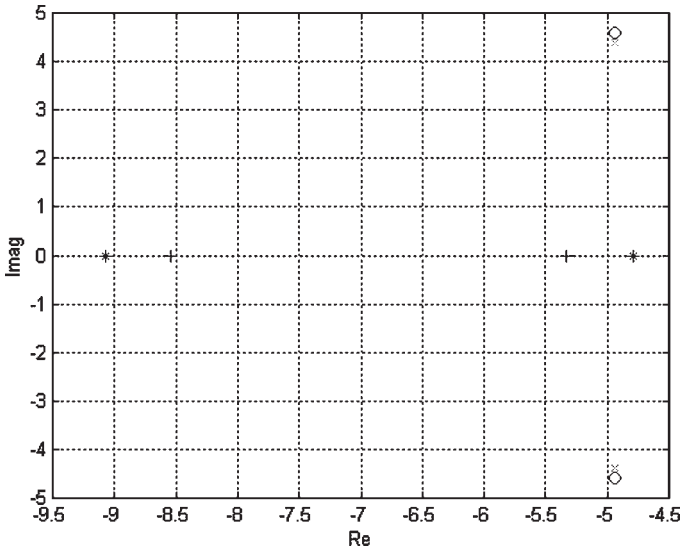
<pre> lmiterm([6 1 1 S],-Ro,1); lmiterm([6 1 2 S],A1,1); lmiterm([6 1 2 R],B,1); lmiterm([6 2 2 S],-Ro,1); lmiterm([7 1 1 S],-Ro,1); lmiterm([7 1 2 S],A2,1); lmiterm([7 1 2 R],B,1); lmiterm([7 2 2 S],-Ro,1); lmiterm([8 1 1 S],-Ro,1); lmiterm([8 1 2 S],A3,1); lmiterm([8 1 2 R],B,1); lmiterm([8 2 2 S],-Ro,1); lmiterm([9 1 1 S],-Ro,1); lmiterm([9 1 2 S],A4,1); lmiterm([9 1 2 R],B,1); lmiterm([9 2 2 S],-Ro,1); % Restricciones asociadas a theta lmiterm([10 1 1 S],sin(theta)*A1,1,'s'); lmiterm([10 1 1 R],sin(theta)*B,1,'s'); lmiterm([10 2 1 S],cos(theta)*(-A1),1); lmiterm([10 2 1 S],1,cos(theta)*(A1)); lmiterm([10 2 1 R],cos(theta)*(-B),1); lmiterm([10 2 1 -R],1,cos(theta)*B); lmiterm([10 2 2 S],sin(theta)*A1,1,'s'); lmiterm([10 2 2 R],sin(theta)*B,1,'s'); lmiterm([11 1 1 S],sin(theta)*A2,1,'s'); lmiterm([11 1 1 R],sin(theta)*B,1,'s'); </pre>	<pre> lmiterm([11 2 1 S],cos(theta)*(-A2),1); lmiterm([11 2 1 S],1,cos(theta)*(A2)); lmiterm([11 2 1 R],cos(theta)*(-B),1); lmiterm([11 2 1 -R],1,cos(theta)*B); lmiterm([11 2 2 S],sin(theta)*A2,1,'s'); lmiterm([11 2 2 R],sin(theta)*B,1,'s'); lmiterm([12 1 1 S],sin(theta)*A3,1,'s'); lmiterm([12 1 1 R],sin(theta)*B,1,'s'); lmiterm([12 2 1 S],cos(theta)*(-A3),1); lmiterm([12 2 1 S],1,cos(theta)*(A3)); lmiterm([12 2 1 R],cos(theta)*(-B),1); lmiterm([12 2 1 -R],1,cos(theta)*B); lmiterm([12 2 2 S],sin(theta)*A3,1,'s'); lmiterm([12 2 2 R],sin(theta)*B,1,'s'); lmiterm([13 1 1 S],sin(theta)*A4,1,'s'); lmiterm([13 1 1 R],sin(theta)*B,1,'s'); lmiterm([13 2 1 S],cos(theta)*(-A4),1); lmiterm([13 2 1 S],1,cos(theta)*(A4)); lmiterm([13 2 1 R],cos(theta)*(-B),1); lmiterm([13 2 1 -R],1,cos(theta)*B); lmiterm([13 2 2 S],sin(theta)*A4,1,'s'); lmiterm([13 2 2 R],sin(theta)*B,1,'s'); LMISYS=getlmis; [tmin,xffeas]=feasp(LMISYS); S=dec2mat(LMISYS,xffeas,S) R=dec2mat(LMISYS,xffeas,R) K=R*inv(S) </pre>
--	--

Los polos a lazo cerrado se encuentran en el interior de la región escogida, como se ilustra en la figura N° 5.

La figura N° 6 muestra la evolución del vector de estado hacia la posición de equilibrio para una condición inicial $x(0) = [-2 \ 10]^T$ y el esfuerzo en la señal de control.



FIGURA N° 5
POLOS A LAZO CERRADO DEL SISTEMA POLITÓPICO



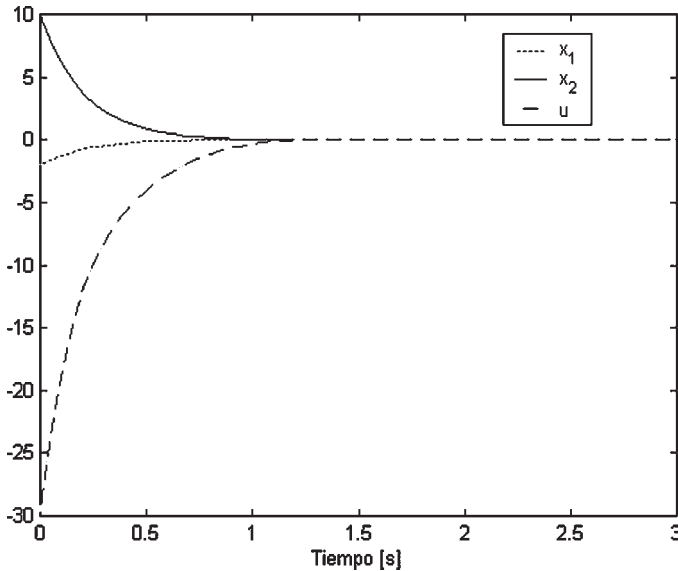
Estrategia 2

Para cada sistema (28) se diseña un controlador lineal por realimentación de las variables de estado (Brogan, 1991; Chen, 1999), de forma que los polos a lazo cerrado de cada sistema local (vértices en la figura N° 2) sean $\{-4 \pm j2\}$. Lo que resulta en las ganancias de realimentación:

$$K_1 = [19 \ 6], \quad K_2 = [19 \ 10], \quad K_3 = [21 \ 6], \quad K_4 = [21 \ 10] \quad (33)$$

Luego, se implementa la ley de control (25) empleando los pesos calculados a través de la resolución continua para todo instante de tiempo del sistema de ecuaciones (23). Los pesos resultantes se aprecian en la figura N° 7, en la misma se evidencia que para todo instante de tiempo t se cumple la condición $\mu_1(t) + \mu_2(t) + \mu_3(t) + \mu_4(t) = 1$.

FIGURA N° 6
TRAYECTORIAS DE ESTADO Y SEÑAL DE CONTROL
PARA LA PRIMERA ESTRATEGIA



La figura N° 8 muestra la evolución del vector de estado hacia la posición de equilibrio para una condición inicial de $x(0) = [-2 \ 10]^T$ conjuntamente con la señal de control.

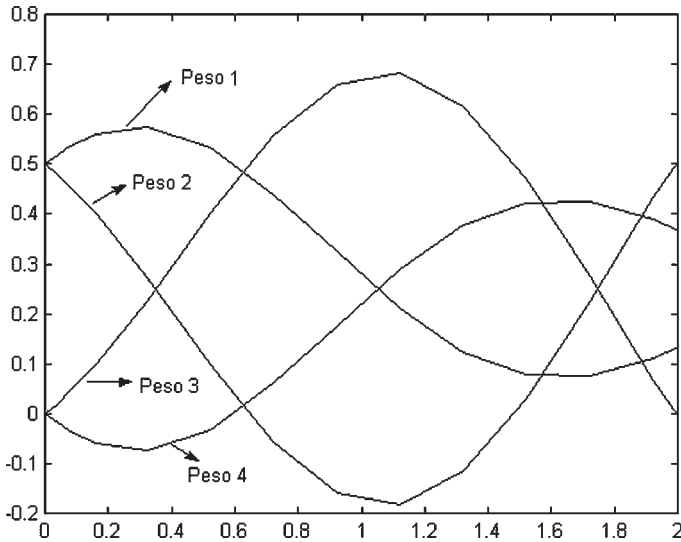
Para ambas estrategias los resultados de las simulaciones confirman la efectividad de la técnica en cuanto a su robustez. Dicho de otra forma, a pesar de los cambios en los parámetros de la planta el diseño efectuado es bastante satisfactorio.

Conclusiones

En este trabajo se considera el problema de regulación (estabilización) de un sistema lineal de parámetros variantes a través de dos enfoques: control robusto y ganancia programada.



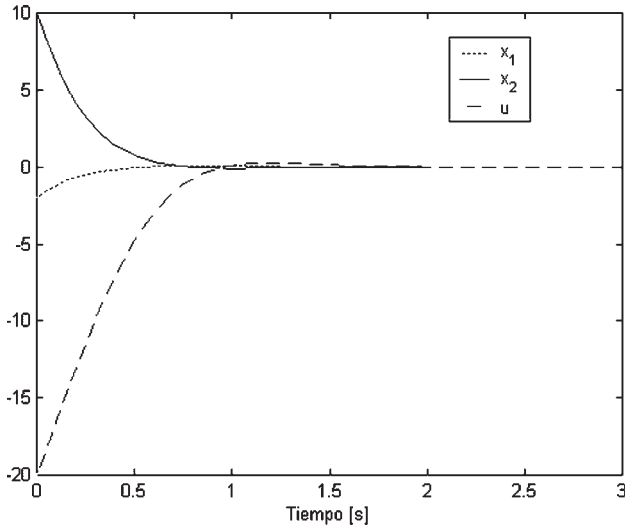
FIGURA N° 7
PESOS DEL ESQUEMA DE INTERPOLACIÓN ANALÍTICO



Inicialmente se determinan las combinaciones extremas de los parámetros variantes en el conjunto compacto de variación. En estos puntos se obtienen aproximaciones LTI, estas últimas son empleadas posteriormente en la síntesis de leyes de control estabilizantes.

Los resultados de ambas estrategias son similares para el problema de regulación planteado. Esto es, en lo concerniente al desempeño del sistema no hay diferencias, ni en las características dinámicas ni en el esfuerzo de control. En lo relativo a la síntesis del controlador, la estrategia 1 es mucho más intensa que la segunda desde un punto de vista computacional. Sin embargo, en lo que respecta a la implementación del controlador, la primera estrategia es más simple, ya que la misma es invariante en el tiempo, a diferencia de la segunda, que amerita un esquema de implementación variante en el tiempo que requiere del cálculo continuo de los pesos de interpolación analítica.

FIGURA N° 8
EVOLUCIÓN DEL VECTOR DE ESTADO Y LA SEÑAL DE CONTROL
PARA LA SEGUNDA ESTRATEGIA DE CONTROL



En los actuales momentos se estudia el caso de información parcial del vector de estado. A ese fin, se está planteando un esquema basado en el principio de separación (Controlador – Observador de estado) a ambas estrategias.



Referencias

- BARMISH, B. (1985) "Necessary and sufficient condition for a quadratic stabilizability of an uncertain system". *Journal of Optimization Theory and Application*, Vol. 46, N° 4, pp. 399-408.
- BIANNIC, J. (1996) *Commande robuste de systèmes à paramètres variables: Application en Aéronautique*. Ph.D. Thesis, ENSAE, Francia.
- BOYD, S.; EL GHAOUI, L.; FERON, E. y BALAKRISHNAN, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, USA, Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, Vol. 15.
- BROGAN, W. (1991). *Modern Control Theory*. New Jersey, USA: Prentice Hall.
- CHEN, C. (1999) *Linear System Theory and Design*. New York, USA: Oxford University Press.
- CHILALI, M. y GAHINET, P. (1995) "H_∞ design with pole placement constraints: an LMI approach", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 41, N° 3, pp. 358-367.
- COURTIES, C. (1999) *Sur la commande robuste et LPV de systèmes à paramètres lentement variables*, Ph.D. Thesis, Rapport LAAS-CNRS n° 99552, Institut National des Sciences Appliquées. Toulouse, France.
- EL-FARRA, N.H.; DEMETRIOU, M.A. y CHRISTOFIDES, P.D. (2008). "Actuator and controller scheduling in non-linear transport-reaction process", *Chemical Engineering Science*, Vol. 15, N° 13, pp. 3537-3550.
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A.J. y CHILALI, M. (1995) *LMI Control Toolbox*. The Math Works Inc.
- GEROMEL, J.; PERES, P. y BERNUSSOU, J. (1991) "On a convex parameter space method for linear control design of uncertain systems". *SIAM Journal of Control and Optimization*. Vol. 29, N° 2, pp. 381-402.
- PHAM, H.; ANH, N. y TOSHIKI, N. (2007). "Stability radius of linear parameter-varying systems and applications". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. Vol. 328, N° 1, pp. 170-191.
- RUGH, W. (1995) *Linear System Theory*. New Jersey, USA: Prentice Hall.
- RUGH, W. y SHAMMA, J. (2000) "Research on gain scheduling". *Automática*, Vol. 36, pp. 1401-1425.
- TAKAGI, T. y SUGENO, M. (1985). "Fuzzy identification of systems and its applications to modelling and control", *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*? Vol. 15, N° 1, pp. 116-132.
- TEPPA, P. (2003). *Commande par séquençement de gains robustes pour systèmes non lineaires*. Ph.D. Thesis, Université Paul Sabatier. Toulouse, France.