Ciencias - Física

Conservación de masa y ecuación de Navier – Stokes para un fluido ideal desde la relatividad especial

Conservation of mass and equation of navier - stokes for an ideal fluid from the special relativity

Sandino, John Martín [I], Castrillón, Arjuna.[II]

Resumen. En este trabajo se formularán la ecuación de conservación de masa y la ecuación de Navier-Stokes para un fluido ideal en el marco de la relatividad especial. Para tal efecto, se postularán una ley del movimiento y un tensor de energía-momento. En los resultados obtenidos aparecen términos adicionales a los que se presentan en tales ecuaciones en su versión clásica, en especial en la ecuación de Navier Stokes, la cual posee un término proporcional a $p_0(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$ y que supondría la no conservación de la cantidad de movimiento a nivel local. Sin embargo, desde la relación entre masa y energía relativista, dicho término se interpretará como un flujo de momento causado por la presión sobre el fluido en movimiento, restaurando de esta forma el principio de conservación de masa y de momento. Finalmente, se mostrarán a través de un análisis gráfico las diferencias en el comportamiento de un fluido ideal incompresible en el caso clásico y en el caso relativista.

Palabras clave: Mecánica de Fluidos, Relatividad Especial, Tensor Energía – Momento, Conservación de la masa, Ecuación de Navier - Stokes.

Abstract. In this work the conservation mass equation and the Navier – Stokes equation for ideal fluid in the special relativity frame are formulated. For this propose the movement law and the energy – momentum tensor are postulated. Results show an additional term that not appears in the classical form of these equations, especially in Navier – Stokes equation, which has a term proportional to $p_0(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$ and this suppose the no conservation of momentum at local level. However, according to the relativistic relation between mass and energy, this term is interpreted as a momentum flowing from the press over the fluid in movement, so this permit the restitution of mass and momentum conservation principle. Finally, we use graphic analysis to present the differences in the behavior of an incompressible fluid in the classic and the relativistic case.

I Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
II Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona – España. Correo electrónico:[1]galileo86@hotmail.com

Key words: Fluid Mechanics, Special Relativity, Energy – Momentum Tensor, Mass Conservation, Navier – Stokes equation.

1. INTRODUCCIÓN

Después de la aparición de la teoría de la relatividad especial, Einstein estudió la dinámica relativista de un sistema físico continuo considerando las ecuaciones de movimiento relativistas de un gas ideal de electrones (Liu,1992) (Tolman,1987). Posteriormente, en 1960, Tolman y Landau considerarían el estudio de un fluido desde la perspectiva de un medio puramente mecánico, encontrando las ecuaciones de conservación de masa, de momento y de Navier – Stokes para un fluido ideal en el marco de la relatividad especial (Tolman, 1987). Por muchos años la investigación en hidrodinámica relativista se vio inmersa en un periodo de poca producción científica como consecuencia de la falta de aplicaciones que esta teoría poseía en los fenómenos naturales cotidianos (Liu,1992). Sin embargo, después de la década de 1980, la hidrodinámica relativista encontró en los jets galácticos (flujos colimados de plasma) un fenómeno en el cual se podía aplicar sus principales conceptos (Buchert, 2001).

De esta forma, actualmente las investigaciones en hidrodinámica relativista están centradas en describir teorías de la hidrodinámica en el marco de la relatividad general para poder explicar la magnetohidrodinámica de los jets galácticos en presencia de intensos campos gravitacionales (Buchert, 2001). Sin embargo, la hidrodinámica en relatividad especial no deja de ser importante, pues describe correctamente la dinámica de los jets cuando éstos no se encuentran en las vecindades de un campo gravitacional intenso, razón por la cual varios artículos y libros de texto incluyen a la hidrodinámica relativista especial como una generalización de la mecánica clásica de los fluidos al plano relativista (D' Inverno, 1998).

En esencia, la hidrodinámica relativista especial estudia la siguiente problemática: en un sistema de referencia inercial Σ_0 existe un fluido ideal cuyo flujo de velocidad $\vec{u}_0$ se especifica por el campo vectorial $\vec{u}_0 = (v_{ox}, v_{oy}, v_{oz}, t_0)$ (v_{ox}, v_{oy}, v_{oz} son las componentes cartesianas de la velocidad y t_0 el tiempo referido a Σ_0), la densidad ρ_0 por el campo escalar $\rho_0 = (\vec{r}_0, t_0)$ (con $\vec{r}_0$ la posición de un elemento de fluido particular) y la presión p_0 por el campo escalar de presiones $p_0 = (\vec{r}_0)$ (D' Inverno, 1998). En este sistema de referencia inercial se pueden establecer las ecuaciones de continuidad y de Navier – Stokes de la forma en que se hace en la mecánica clásica desde que $\|\vec{u}\| \ll c$, en donde c es la velocidad de la luz en el vacío.

Ahora, existe un sistema de referencia inercial Σ desde el cual Σ_0 posee una velocidad v, la cual posee un valor considerable respecto a c. De esta forma, será de interés calcular la ecuación de continuidad y de Navier – Stokes para el mismo flujo del fluido desde el sistema de referencia inercial Σ en función de las magnitudes que se pueden conocer en Σ_0 (D' Inverno, 1998) (Figura 1.).

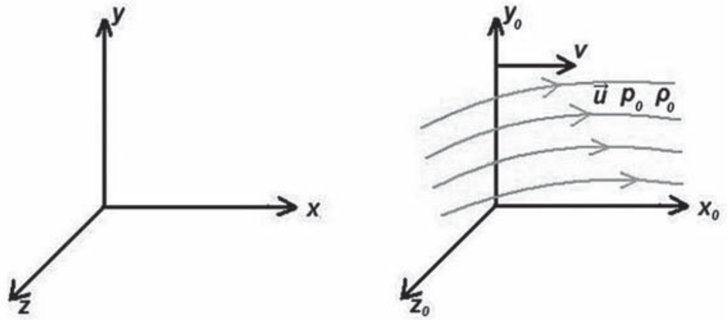

Figura 1. Hidrodinámica relativista.

En este trabajo se desarrollará la ecuación de continuidad para la densidad de masa – energía y la ecuación de Navier – Stokes para un fluido ideal relativista, con el fin de analizar las diferencias explícitas en la perspectiva clásica y relativista del vector flujo de densidad de masa y el tensor flujo de densidad de momento a través de las transformaciones de Lorentz de dichas cantidades. En el caso relativista aparecen términos adicionales para dichas ecuaciones, las cuales retornaran a la forma funcional exigida por los postulados de la relatividad especial al considerar la relación entre masa - energía y cómo la presión introduce energía al fluido.

Usualmente estos análisis se suelen hacer con base en la termodinámica de los sistemas físicos relativistas (Callen y Horwitz, 1971). Sin embargo en este trabajo se concluirán las mismas interpretaciones de flujo de masa y de momento relativistas desde el contexto de la hidrodinámica relativista, en la cual el único requerimiento es que las ecuaciones que describen el fluido posean el mismo significado físico en todos los sistemas de referencia inerciales.

2. FLUIDO IDEAL CLÁSICO

El estado mecánico de un fluido ideal se puede especificar teniendo en cuenta el conocimiento explícito de la forma funcional de la velocidad del flujo $\vec{u}(\vec{r},t)$, un campo escalar de densidad de masa $\rho(\vec{r},t)$, y un campo escalar de presiones $p(\vec{r})$ (D' Inverno, 1998).

En la hidrodinámica clásica, se pueden obtener ecuaciones que rindan cuenta del flujo de masa, de energía y de momento hacia un sistema a través de lo que se denomina ecuación de transporte de Reynolds. En términos generales dicha ecuación relaciona los cambios de alguna propiedad del fluido al seguir un elemento de fluido determinado moviéndose en el espacio, con los cambios temporales de la misma propiedad pero manteniendo fijo un determinado volumen de control (Shames, Irving, 2001).

De esta forma, supongamos que el sistema posee una propiedad extensiva $H(x,y,z,t)$ (puede ser un campo escalar o un campo vectorial). La ecuación de transporte de Reynolds o derivada sustancial para la cantidad H se expresa como [6]:

$$\frac{DH}{Dt} = u_x\frac{\partial H}{\partial x} + u_y\frac{\partial H}{\partial y} + u_z\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial t} = (\vec{u}.\vec{\nabla})H + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1)$$

en donde $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$ es la velocidad de flujo del fluido referente a un sistema de referencia inercial.

Consideremos la densidad de energía del fluido como $\omega_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$ desde un sistema de referencia inercial Σ_0 en donde el fluido posee un flujo cuyo campo de velocidad está dado por $\vec{u}_0(x_0, y_0, z_0, t_0)$. Esta densidad poseerá dos términos, uno debido al movimiento del fluido y otro debido a la energía interna como tal. Por tanto, la forma funcional de la densidad energética en Σ_0 es [7]:

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + e_0 \quad (2)$$

donde $\frac{1}{2}\rho_0 v^2$ es densidad de energía cinética y e_0 es la densidad de energía interna.

El flujo de energía total a través de un elemento infinitesimal en reposo del fluido de volumen δV_0 será $\omega_0\delta V_0$. Aplicando la derivada sustancial de $\omega_0\delta V_0$ con el fin de conocer cómo cambia el flujo energético con el tiempo se obtiene:

$$\frac{D(\omega_0\delta V_0)}{Dt_0} = \delta V_0\frac{D\omega_0}{Dt_0} + \omega_0\frac{D\delta V_0}{Dt_0} \quad (3)$$

Ahora bien, según (1), (3) se transforma en:

$$\frac{D(\omega_0\delta V_0)}{Dt_0} = \delta V_0(\vec{u}.\vec{\nabla}_0\omega_0) + \delta V_0\frac{\partial\omega_0}{\partial t_0} + \omega_0\frac{D\delta V_0}{Dt_0} \quad (4)$$

Fácilmente se puede demostrar que la derivada sustancial del elemento de fluido está dada por [6]:

$$\frac{D\delta V_0}{Dt_0} = \delta V_0 \vec{\nabla}_0 . \vec{u} \quad (5)$$

de forma tal que (4) se convierte en:

$$\frac{D(\omega_0 \delta V_0)}{Dt_0} = \delta V_0 \vec{\nabla}_0 (\omega_0 \vec{u}) + \delta V_0 \frac{\partial \omega_0}{\partial t_0} \quad (6)$$

Sin embargo, según la mecánica clásica, el cambio con respecto al tiempo de la energía total se define como la potencia disipada por una fuerza externa actuando sobre el elemento de fluido. De esta forma, (3) es la potencia disipada por una fuerza externa actuando sobre dicho elemento. Debido a la condición de que el fluido es ideal y sobre el no actúan fuerzas externas, la ecuación (6) se convierte en la ecuación para la continuidad de la densidad energética:

$$\vec{\nabla}_0 (\omega_0 \vec{u}) = -\frac{\partial \omega_0}{\partial t_0} \quad (7)$$

La ecuación (7) indica que la cantidad de energía que entra a un volumen infinitesimal del fluido es igual a la disminución de la energía en el mismo elemento. La cantidad $\omega_0 \vec{u}$ se denomina *vector flujo de densidad de energía* (Landau y Lifshitz, 1987). Este vector indica la cantidad de energía que atraviesa un elemento de área unitaria perpendicular a la dirección de la velocidad y por unidad de tiempo (Landau y Lifshitz, 1987).

Por otra parte, siguiendo un razonamiento similar al que conduce a (7) se encuentra que la densidad de masa posee la siguiente ecuación de continuidad:

$$\vec{\nabla}_0 (\rho_0 \vec{u}) = -\frac{\partial \rho_0}{\partial t_0} \quad (8)$$

(8) indica que el flujo de masa que entra a un elemento del fluido es igual a la salida de masa del sistema [6]. Similarmente, a $\rho_0 \vec{u}$ se le puede llamar v*ector flujo de densidad de masa*.

Ahora consideremos la derivada sustancial del momento que atraviesa un elemento infinitesimal en reposo del fluido. Si $\delta m_0 = \rho_0 \delta V_0$ es la masa del elemento infinitesimal, entonces $\delta m_0 \vec{v}$ será el momento introducido por el flujo en el elemento de fluido. De esta forma:

$$\frac{D(\delta m_0 \vec{v})}{Dt_0} = \delta m_0 \frac{D\vec{v}}{Dt_0} \quad (9)$$

En este caso la derivada material del elemento de masa es nula porque por definición de sistema, el elemento de fluido debe poseer siempre la misma masa.

Aplicando (1) a (9) se obtiene:

$$\frac{D(\delta m_0 \vec{v})}{Dt_0} = \rho_0 \delta V_0 (\vec{u}.\vec{\nabla}_0)\vec{u} + \rho_0 \delta V_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t_0} \quad (10)$$

Sin embargo, según la segunda ley de Newton la derivada temporal de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza neta que experimenta un sistema. De esta forma, como el fluido ideal solo está sujeto a un campo de presión (ignoramos toda fuerza de cuerpo), la única fuerza sobre el elemento de fluido será $-(\vec{\nabla}_0 p_0)\delta V_0$ [6], con lo cual (10) se transforma en:

$$-\frac{1}{\rho_0}(\vec{\nabla}_0 p_0) = (\vec{u}.\vec{\nabla}_0)\vec{u} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial t_0} \quad (11)$$

A (11) se le conoce como ecuación de Euler o ecuación de Navier – Stokes para fluidos no viscosos. Esta ecuación se puede considerar como la segunda ley de Newton para los fluidos.

A partir de (11) se puede obtener una ecuación que caracterice el flujo de momento que atraviesa el elemento de fluido en estudio. Para tal efecto, a (11) se le debe sumar y restar un término de la forma $\vec{u}[\vec{\nabla}_0.(\rho_0\vec{u})]$ [8]. De esta forma (11) se transformará en:

$$-(\vec{\nabla}_0 p_0) = \rho_0(\vec{u}.\vec{\nabla}_0)\vec{u} + \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t_0} - \vec{u}\vec{\nabla}_0.(\rho_0\vec{u}) + \vec{u}\vec{\nabla}_0.(\rho_0\vec{u}) \quad (12)$$

Sin embargo, usando (8) y agrupando términos semejantes se obtiene finalmente que:

$$\frac{\partial(\rho_0\vec{u})}{\partial t_0} = -(\vec{\nabla}_0 p_0) - \rho_0(\vec{u}.\vec{\nabla}_0)\vec{u} - \vec{u}\left(\vec{\nabla}_0.(\rho_0\vec{u})\right) \quad (13)$$

La ecuación (13) muestra el comportamiento temporal del flujo de momento hacia un elemento del fluido como consecuencia del movimiento de dicho fluido.

3. EXPRESIONES VECTORIALES Y TENSORIALES CLÁSICAS

En primera instancia se ha encontrado un vector que explica en flujo de energía hacia el interior de un elemento de fluido. Dicho vector, cuya forma funcional es $\omega_0\vec{u}$, al tener en cuenta (2) se puede escribir explícitamente como:

$$\omega_0 \vec{u} = \rho_0 \vec{u}\left[\frac{1}{2}v^2 + \epsilon_0\right] \quad (14)$$

en donde $\epsilon_0 = e_0/\rho_0$ y representa la energía por unidad de masa.

Adicionalmente, se ha encontrado que la densidad de momento está regida por la ecuación (13). Sin embargo en dicha ecuación, no es clara la forma explícita para tal magnitud. De esta forma, consideremos cada componente de la ecuación (13):

$$\frac{\partial(\rho_0 u_x)}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_0}{\partial x_0} - \rho_0\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x_0} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y_0} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z_0}\right) - u_x\left(\frac{\partial \rho_0 u_x}{\partial x_0} + \frac{\partial \rho_0 u_y}{\partial y_0} + \frac{\partial \rho_0 u_z}{\partial z_0}\right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial(\rho_0 u_y)}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_0}{\partial y_0} - \rho_0\left(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x_0} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial x_0} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z_0}\right) - u_y\left(\frac{\partial \rho_0 u_x}{\partial x_0} + \frac{\partial \rho_0 u_y}{\partial y_0} + \frac{\partial \rho_0 u_z}{\partial z_0}\right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial(\rho_0 u_z)}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_0}{\partial z_0} - \rho_0\left(u_x\frac{\partial u_z}{\partial x_0} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y_0} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z_0}\right) - u_z\left(\frac{\partial \rho_0 u_x}{\partial x_0} + \frac{\partial \rho_0 u_y}{\partial y_0} + \frac{\partial \rho_0 u_z}{\partial z_0}\right) \quad (17)$$

las cuales se pueden reescribir de una forma más compacta como:

$$\frac{\partial(\rho_0 u_x)}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_0}{\partial x_0} - \rho_0\left(u^b\frac{\partial u_x}{\partial x^b}\right) - u_x\left(\frac{\partial \rho_0 u^b}{\partial x^b}\right) \quad (18)$$

$$\frac{\partial(\rho_0 u_y)}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_0}{\partial y_0} - \rho_0\left(u^b\frac{\partial u_y}{\partial x^b}\right) - u_y\left(\frac{\partial \rho_0 u^b}{\partial x^b}\right) \quad (19)$$

$$\frac{\partial(\rho_0 u_z)}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_0}{\partial z_0} - \rho_0\left(u^b\frac{\partial u_z}{\partial x^b}\right) - u_z\left(\frac{\partial \rho_0 u^b}{\partial x^b}\right) \quad (20)$$

en donde se ha usado la convención de sumatoria de Einstein con $u^b = u_x, u_y, u_z$ y $x^b = x, y, z$. Sin embargo, estas expresiones aun se pueden simplificar en una sola introduciendo un nuevo supra-indice $u^a = u_x, u_y, u_z$ y $x^a = x, y, z$. De esta forma (18), (19) y (20) se podrán expresar como:

$$\frac{\partial(\rho_0 u^a)}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_0}{\partial x^a} - \rho_0\left(u^b\frac{\partial u^a}{\partial x^b}\right) - u^a\left(\frac{\partial \rho_0 u^b}{\partial x^b}\right) \quad (21)$$

Utilizando la regla del producto para la diferenciación finalmente se obtiene que:

$$\frac{\partial(\rho_0 u^a)}{\partial t_0} = -\frac{\partial p_0}{\partial x^a} - \left(\frac{\partial \rho_0 u^a u^b}{\partial x^b}\right) \quad (22)$$

Adicionalmente (22) se puede resumir mucho más al considerar que el término $\frac{\partial p_0}{\partial x^a}$ se puede escribir en términos del tensor delta de Kronecker de segundo orden como

$\delta^{ab}\frac{\partial p_0}{\partial x^b}$. Por tanto:

$$\frac{\partial(\rho_0 u^a)}{\partial t_0} = -\delta^{ab}\frac{\partial p_0}{\partial x^b} - \left(\frac{\partial \rho_0 u^a u^b}{\partial x^b}\right) \quad (23)$$

Se define un tensor t^{ab} de segundo orden $(a, b = 1,2,3)$ como:

$$t^{ab} = \delta^{ab} p_0 + \rho_0 u^a u^b \quad (24)$$

de forma tal que la razón de cambio de la densidad de momento (23) queda expresada por:

$$\frac{\partial(\rho_0 u^a)}{\partial t_0} = -\frac{\partial t^{ab}}{\partial x^b} \quad (25)$$

De esta forma, se ha encontrado una ecuación de continuidad similar a (7) y (8) pero en este caso se trata de una ecuación de continuidad expresada en lenguaje tensorial. t^{ab} se denomina *tensor de densidad de flujo de momento*. El significado físico de ese tensor indica la cantidad de momento que fluye hacia el elemento de fluido por unidad de tiempo (Landau y Lifshitz, 1987).

En síntesis, en mecánica clásica de fluidos el flujo de energía se puede especificar a través de un vector dado por (14), mientras que el flujo de momento por un tensor (24) (Landau y Lifshitz, 1987). Por ahora es imposible unificar el flujo de energía y el flujo de momento en un solo ente físico - matemático, pues la energía es un escalar mientras que el momento es un vector. Sin embargo, en relatividad especial esta tarea es sencilla al considerar un ente denominado tensor de momento – energía, el cual describe el estado de la energía y momento para un elemento de fluido en todo tiempo y espacio.

4. TENSOR ENERGÍA – MOMENTO PARA UN FLUIDO RELATIVISTA

Debido a la relación entre espacio y tiempo relativista, la energía (componente temporal) y el momento (componente espacial) de una partícula se pueden tratar como un solo ente denominado *cuadrimomento.* Sin embargo, para los fluidos es incorrecto recurrir al cuadrimomento para conocer la dinámica de éstos, tal como se verá a continuación.

En relatividad especial es claro el hecho de que la densidad energética del fluido y la densidad de masa se relacionan por medio de $\omega = \rho c^2$ en donde ρ es la densidad de masa relativista en un sistema de referencia inercial Σ, desde el cual el elemento de fluido posee una masa relativista δm y un volumen δV. Así mismo, c es la velocidad de la luz en el vacío. Por otra parte, la densidad de momento relativista para éste elemento de fluido será $\rho u^a + p_0 u^a/c^2$ (Aharoni, 1985), con u^a las componentes de la velocidad del flujo referente al sistema de referencia inercial Σ.

Un análisis sobre las propiedades de transformación de la densidad de cuadrimomento para el fluido, constituida ésta por la densidad energética en su componente temporal, y la densidad de momento en su componente cartesiana, indica que dichas cantidades no cumplen con las leyes de transformación de los cuadrivectores Minkowskianos, mostrando que la formulación cuadrivectorial para la dinámica de un fluido es incorrecta. De esta forma, se debe definir una cantidad tensorial denominada *tensor Energía – Momento*, la cual es covariante y posee el mismo significado físico en todos los sistemas de referencia inerciales.

El único tensor de segundo rango que permite describir la mecánica del elemento de fluido ideal teniendo en cuenta que el campo de presiones debe ser independiente del campo de densidad y del campo de flujo, y que sus componentes tengan el mismo significado físico para todos los sistemas de referencia inerciales, es [8]:

$$T^{\mu\nu} = (\rho_0 + p_0/c^2)U^\mu U^\nu - p_0 \eta^{\mu\nu} \quad (26)$$

en donde U^μ es la cuadrivelocidad del flujo de fluido referente a Σ y $\eta^{\mu\nu}$ es al métrica Mikowskiana, en la cual $\eta^{00} = 1, \eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = -1$ y $\eta^{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$. A (26) se le conoce como tensor de energía - momento.

Por ejemplo, la componente temporal T^{00} representa la densidad de energía en todo sistema de referencia inercial. Para probar esto, tengamos en cuenta que la densidad de masa, y por tanto, la densidad de energía transforma de acuerdo con [4]:

$$\omega = \rho c^2 = c^2 \gamma^2 (\rho_0 + p_0 u_x^2/c^4) \quad (27)$$

en donde $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, y v es la velocidad de Σ_0 relativa a Σ. De esta forma, según (26) y (27), T^{00} será:

$$T^{00} = c^2 \gamma^2 (\rho_0 + p_0 u_x/c^4) = \rho c^2 = \omega \quad (28)$$

Así mismo, siguiendo el mismo procedimiento anterior se puede probar fácilmente que las componentes $T^{\mu\nu}$ con $\mu, \nu = 1,2,3$ son las componentes del tensor cartesiano densidad de flujo de momento para todos los sistemas de referencia inerciales. Sin embargo, para este caso se debe tener en cuenta que la densidad de momento relativista se define como [2]:

$$g^a = \rho u^a + p_0 u^a / c^2 \quad (29)$$

Observando el tensor de densidad de flujo de momento se puede concluir que T^{11} para cualquier sistema de referencia inercial es:

$$T^{11} = p_0 + g_x u_x \quad (30)$$

Finalmente, las componentes $T^{0\nu}$ y $T^{\mu 0}$ con $\mu, \nu = 1,2,3$ son el producto de la densidad de momento definida en (29) y la velocidad de la luz [2].

5. ECUACIONES DE CONSERVACIÓN DE LA MASA – ENERGÍA Y DE NAVIER – STOKES PARA UN FLUIDO RELATIVISTA

Para conocer el estado mecánico de un fluido en cualquier sistema de referencia inercial se postula una ley de movimiento tensorial (D' Inverno, 1998), que da cuenta de la cuadrifuerza, un cuadrivector cuya componente temporal indica la potencia disipada por una fuerza externa, y la componente espacial indica la fuerza misma. De esta forma, la relación entre densidad volumétrica de la cuadrifuerza y tensor energía – momento vendrá dada por la siguiente ley de movimiento:

$$f^\mu = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} \quad (31)$$

en donde $f^\mu = (f^b u^b / c, f^b)$ es la densidad volumétrica de la cuadrifuerza, $f^b u^b / c$ es la potencia disipada por la fuerza por unidad de volumen y f^b es la fuerza externa neta que actúa sobre un elemento de fluido por unidad de volumen.

La forma funcional de $T^{\mu\nu}$ es la establecida en (26). De esta forma, para calcular la potencia disipada por una fuerza externa actuando sobre un elemento de fluido se debe tomar f^0. Así se tiene que:

$$f^0 = \frac{\partial T^{0\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{01}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{02}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{03}}{\partial x^3} \quad (32)$$

en donde $x^0 = ct,\ x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z.$ Por tanto, calculando cada una de las derivadas anteriores se obtiene:

$$f^b u^b / c = \frac{\partial \omega}{c\,\partial t} + \frac{\partial(\rho_0 + p_0/c^2)\gamma^2 c u^b}{\partial x^b} \quad (33)$$

Sin embargo, según (27) y (29) se tiene que:

$$(\rho_0 + p_0/c^2)\gamma^2 = \frac{\omega + p_0}{c^2} \quad (34)$$

De ese modo (33) se transforma en:

$$f^b u^b = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(\omega + p_0)u^b}{\partial x^b} \quad (35)$$

Finalmente, como consecuencia de que el fluido no está sometido a ninguna fuerza externa, (35) quedará expresada como:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega u^b}{\partial x^b} + \frac{\partial p_0 u^b}{\partial x^b} = 0 \quad (36)$$

La anterior ecuación puede reescribirse vectorialmente utilizando la convención de sumatoria de Einstein y agrupando términos:

$$\vec{\nabla}.[(\omega + p_0)\vec{u}] = -\frac{\partial \omega}{\partial t} \quad (37)$$

(37) es similar a la ecuación de continuidad para la densidad energética (7). De esta forma, desde Σ el vector densidad de flujo de energía se debe definir como $(\omega + p_0)\vec{u}$.

Ahora bien, para obtener una ecuación para la continuidad de la densidad de masa es necesario considerar (27) y (37). De esta forma, la ecuación para la continuidad de masa será:

$$\vec{\nabla}.[(\rho + p_0/c^2)\vec{u}] = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (38)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación para la continuidad de densidad de masa (8) si se tiene en cuenta que definimos el vector flujo de densidad de masa como $(\rho + p_0/c^2)\vec{u}$ para cualquier sistema de referencia inercial. En el caso clásico, en el cual la velocidad de la luz se puede considerar infinita, (38) automáticamente se restablece a su forma original (8).

Ahora calculemos la ecuación de Navier – Stokes para un elemento de fluido cuando es analizado desde el sistema de referencia inercial Σ. Para tal efecto, en nuestra ley de movimiento (31) consideraremos las componentes f^b con $b = 1,2,3$. De esta forma:

$$f^b = \frac{\partial T^{b\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial T^{b0}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{b1}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{b2}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{b3}}{\partial x^3} \quad (39)$$

Como el fluido no está sujeto a fuerzas externas, y según (26) se obtiene:

$$\frac{\partial g^b}{\partial t} + \frac{\partial g^b u^a}{\partial x^a} + \delta^{ab}\frac{\partial p_0}{\partial x^a} = 0 \quad (40)$$

Esta ecuación posee tres ecuaciones linealmente independientes, una para coordenada espacial. Considerando (26), (29) y (40) se obtiene para cada una de las componentes las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\varphi}{c^2}\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial(\varphi/c^2)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi u_x u^a}{c^2\partial x^a} = -\frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (41)$$

$$\frac{\varphi}{c^2}\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_y\frac{\partial(\varphi/c^2)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi u_y u^a}{c^2\partial x^a} = -\frac{\partial p_0}{\partial y} \quad (42)$$

$$\frac{\varphi}{c^2}\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z\frac{\partial(\varphi/c^2)}{\partial t} + \frac{\partial \varphi u_z u^a}{c^2\partial x^a} = -\frac{\partial p_0}{\partial z} \quad (43)$$

en donde $\varphi = \omega + p_0 = \rho c^2 + p_0$. Finalmente, sumando vectorialmente cada una de las anteriores ecuaciones y teniendo en cuenta (37) se obtiene que:

$$-\vec{\nabla}p_0 - \frac{p_0}{c^2}(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} - \frac{\partial(p_0\vec{u})}{c^2\partial t} = \rho(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} + \rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \quad (44)$$

Esta ecuación es la de Navier – Stokes relativista para un fluido ideal. Claramente (44) difiere de su contraparte en mecánica clásica de fluidos (11), pues en el lado izquierdo aparecen dos términos nuevos, $-\frac{p_0}{c^2}(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u}$ y $-\frac{\partial(p_0\vec{u})}{c^2\partial t}$. Sin embargo, (44) incluye a (11) en el caso en el que en la mecánica clásica la velocidad de la luz es infinita.

6. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En primera instancia, las ecuaciones para la continuidad de la densidad de masa en el caso clásico (8) y en el caso relativista (38) difieren entre sí por un término proporcional a la divergencia de $p_0\vec{u}$. Este término adicional supondría la no conservación de la densidad de masa [8], pues la ecuación (38) no posee la forma funcional requerida para una ecuación de continuidad para la densidad de masa. De esta forma, para un fluido ideal relativista, el término $\vec{\nabla}\cdot[p_0/c^2\vec{u}]$ actuará como una fuente (si la divergencia es positiva) o sumidero (si la divergencia es negativa) de densidad de masa. Así mismo, de la forma funcional de (38) claramente se observa que este término no tiene su contraparte en mecánica clásica, pues depende de la velocidad de la luz. De esta forma, este término debe ser interpretado con los conceptos relativistas de masa y energía.

Para tal efecto, es necesario tener en cuenta que la masa (ya sea que esté en movimiento o en reposo) lleva consigo una determinada cantidad de energía asociada. De la misma forma, es posible considerar el caso inverso en el cual a una determinada cantidad de energía se le puede asociar una cantidad de masa (Liu,1992). Por tanto, según la relatividad especial, la masa correspondiente a una determinada cantidad de energía es:

$$m = E/c^2 \quad (45)$$

o en términos de la densidad de masa:

$$\rho = \omega/c^2 \quad (46)$$

Desde que (38) sea una ecuación relativista para la continuidad de la masa, y con el propósito de que su significado sea el mismo para todos los sistemas de referencia, $p_0/c^2\vec{u}$ debe ser interpretado como un flujo densidad de masa hacia un elemento de fluido (o equivalentemente de energía) como consecuencia de la presión que sobre él actúa. Desde que éste término sea interpretado de esta forma, la ecuación (38) será un ecuación de continuidad para la densidad de masa, de forma tal que la densidad de masa total entrante a un elemento de fluido será igual a la razón de cambio temporal de disminución de densidad de masa.

De esta forma, se definirá que el vector flujo de densidad de masa $\vec{H}$ en cualquier sistema de referencia inercial viene dado por:

$$\vec{H} = (\rho + p_0/c^2)\vec{u} = \varphi\vec{u} \quad (47)$$

en donde $\varphi = \rho + p_0/c^2$ y lo denominaremos densidad de masa generalizada; $\vec{u}$ es la velocidad del flujo desde el sistema de referencia inercial en cuestión. En la figura 2 se observan las diferencias entre la magnitud del vector flujo de densidad de masa hacia un elemento de control del fluido suponiendo que en Σ_0 el fluido posee una velocidad $\vec{u}_0 = (1,1,1)$ y que desde Σ, Σ_0 posee una velocidad $\vec{v} = (v,0,0)$.

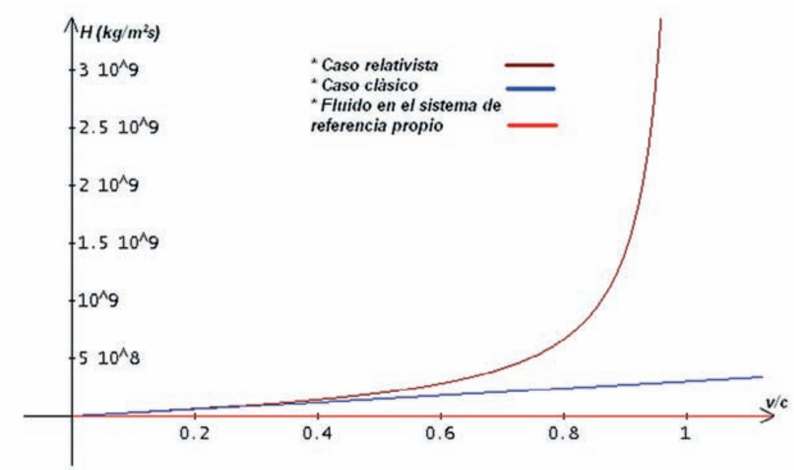

Figura 2. H contra v/c.

En la anterior gráfica se puede apreciar que un aumento de la velocidad relativa entre los sistemas de referencia se traduce en un incremento del flujo de densidad de masa hacia un elemento de fluido (línea café). Para velocidades relativas cercanas a la velocidad de la luz, el flujo de densidad de masa tiende al infinito.

Por otra parte, como era de esperarse, en Σ_0 el flujo de densidad no depende de la velocidad relativa, únicamente de la velocidad del flujo en este sistema de referencia (línea roja). Así mismo, si se adoptaran las transformaciones clásicas de velocidad para el flujo de densidad de masa clásico se obtendría que éste siempre poseerá un valor finito para cualquier velocidad relativa entre Σ y Σ_0; adicionalmente, este flujo de densidad poseerá una dependencia totalmente lineal con la velocidad relativa entre los sistemas de referencia inerciales (línea azul).

De esta forma, se concluye que en el caso relativista, comparado con el caso clásico, el flujo de densidad de masa hacia un elemento de volumen es mucho mayor a medida que la velocidad relativa entre los sistemas de referencia se incrementa. Así mismo, tal como se puede apreciar entre las líneas que caracterizan el caso relativista y el caso clásico, cuando la velocidad relativa entre los sistema de referencia inerciales es muy pequeña comparada con la velocidad de la luz, ambas descripciones arrojarán los mismos resultados.

Ahora consideremos la ecuación tensorial para el flujo de densidad de momento (40). Esta ecuación es similar a la ecuación para la continuidad de la densidad de momento (25) desde que se considere que el tensor de densidad de flujo de momento t^{ab} para cualquier sistema de referencia inercial posee la siguiente forma funcional:

$$t^{ab} = \delta^{ab} p_0 + g^a u^b \quad (48)$$

en donde g^a es la densidad de momento dada por (29) y u^b la velocidad del flujo referente a un sistema de referencia inercial determinado. Esta elección para el tensor de flujo de densidad de momento relativista se ha introducido con el fin de que la ecuación (40) sea una ecuación de continuidad para la densidad de momento, pues de lo contrario se obtendrían fuentes o sumideros de densidad de momento, lo cual supondría la presencia de fuerzas externas al elemento, y por definición de fluido ideal, éste dejaría de actuar como tal [8]. Adicionalmente, en el límite clásico, (48) se reduce al tensor densidad de flujo de momento clásico dado por (23). En la figura 3 se observa la magnitud de la componente t^{xx} en el caso relativista y en el caso clásico.

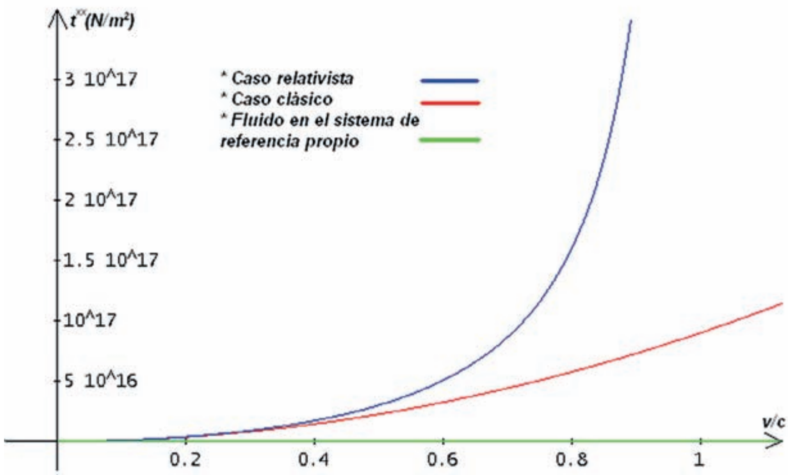

Figura 3. t^{xx} contra v/c.

En la anterior gráfica se observa cómo el flujo de densidad de momento relativista a través de un elemento de fluido (línea azul) aumenta a medida que la velocidad relativa entre sistemas de referencia también lo hace. Cuando Σ_0 posee una velocidad relativa cercana a la velocidad de la luz, el flujo de densidad de momento a través del elemento de fluido tenderá a infinito. Por otra parte, si adoptamos las transformaciones clásicas para la velocidad del flujo y la densidad de masa, se encontrará que el flujo de densidad de momento desde Σ aumenta con la velocidad relativa entre sistemas de referencia inerciales (línea roja). Así mismo, para éste caso, el flujo de momento siempre poseerá un valor finito para cualquier velocidad entre sistemas de referencia inerciales. De esta forma se observa cómo el flujo de momento es mayor en el caso relativista comparado con el caso clásico al estar siempre la línea azul por encima de la roja. En principio, lo anterior es consecuencia de que en el caso relativista el término $p_0/c^2\vec{u}$ introduce masa o energía al elemento de fluido, de tal forma que su momento también se incrementará y por tanto siempre será mayor que en el caso clásico, en donde la única contribución dinámica a la densidad de momento es el término $\rho_0\vec{u}$.

Finalmente, consideremos la ecuación de Navier- Stokes relativista (44). En el límite clásico, (44) se reduce a la ecuación de Navier - Stokes clásica (11). Consideremos los términos adicionales $-\frac{p_0}{c^2}(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u}$ y $-\frac{\partial(p_0\vec{u})}{c^2\partial t}$ para el caso del fluido ideal en el cual $p(\vec{r})$. De esta forma, (44) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$-\vec{\nabla}p_0 = (\rho + \frac{p_0}{c^2})(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} + (\rho + \frac{p_0}{c^2})\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \quad (49)$$

O equivalentemente en términos de φ:

$$-\vec{\nabla}p_0 = \varphi(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u} + \varphi\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} \quad (50)$$

Esta ecuación posee la misma estructura matemática y significado de la ecuación clásica de Navier – Stokes (11) (a saber, las fuerzas netas actuando sobre un elemento de fluido), desde que se considere que φ es la densidad de masa generalizada para cualquier sistema de referencia inercial. Los términos proporcionales a $p_0(\vec{u}.\vec{\nabla})\vec{u}$ y $p_0\frac{\partial(\vec{u})}{\partial t}$ son fuerzas volumétricas que aparecen como consecuencia del flujo de energía – masa $p_0/c^2\vec{u}$. Este flujo de energía debido a la presión modifica el momento dentro del elemento de fluido, modificando a su vez la fuerza neta que actúa sobre el elemento de fluido.

En la literatura convencional de hidrodinámica relativista se suele pasar por alto los análisis hechos anteriormente (Aharoni, 1985), (D' Inverno,1998), pues en estos trabajos solo es de interés encontrar las ecuaciones de movimiento para el fluido desde un sistema de referencia inercial generalizado, omitiendo por completo la comparación entre la perspectiva clásica y relativista del vector flujo de densidad de masa y el tensor flujo de densidad de momento llevada a cabo en este trabajo. Una aproximación conceptual se lleva a cabo en (Aharoni, 1985), en donde se analizan los términos extras presentes en las ecuaciones de continuidad y de Navier – Stokes concluyendo los mismos resultados obtenidos en el presente trabajo.

7. CONCLUSIONES

La ecuación para la continuidad de densidad de masa (38) posee el mismo significado físico para todos los sistemas de referencia inerciales si se define la densidad de masa generalizada por medio de (47). Esta definición permite que (38) sea una ecuación de continuidad relativista para la densidad de masa. Por otra parte, se ha definido el vector flujo de densidad de masa hacia un elemento de fluido por medio de (47). En relatividad especial este vector dependerá de la densidad de momento relativista $\rho\vec{u}$ y del término energético $p_0/c^2\vec{u}$, éste último se considera como un flujo de energía hacia el elemento como consecuencia de la presión y de la velocidad del flujo relativa a un determinado sistema de referencia inercial. Así mismo, en el límite clásico el vector flujo de densidad de masa dado por (46) se reduce al vector clásico para este tipo de flujo.

Adicionalmente, la magnitud del vector flujo de densidad de masa referente a un sistema de referencia inercial desde donde Σ_0 posee una velocidad determinada, es mucho mayor cuando se adoptan consideraciones relativistas para la transformación de velocidades del flujo y de la densidad de masa, que cuando se consideran las mismas transformaciones pero con consideraciones clásicas. Esta diferencia de nuevo es consecuencia del término energético $p_0/c^2\vec{u}$.

Por otra parte, para que la ecuación (40) sea considerada como una ecuación de continuidad para la densidad de momento, se ha redefinido el tensor de densidad de flujo de momento para un sistema de referencia inercial arbitrario por medio de (48). Si bien esta definición es casi idéntica que la dada en su contraparte clásica por (24), en (48) la densidad de momento no sólo la densidad de momento no sólo posee el término clásico de la densidad de momento $\rho\vec{u}$, sino que también posee el término $p_0/c^2\vec{u}$, esto como consecuencia de la definición generalizada para la densidad de masa dada por (46). Debido a la presencia de este término extra, y al considerar la transformación de Lorentz para la densidad de masa y la velocidad del flujo, se obtiene que la magnitud de las componentes del tensor de densidad de flujo de momento siempre será mayor para algún valor particular de velocidad relativa entre Σ y Σ_0, comparado con la magnitud de las componentes de dicho tensor cuando se consideran las transformaciones clásicas de la densidad de masa y la velocidad de flujo.

Así mismo, la nueva definición del tensor densidad de flujo de momento contiene la definición clásica de dicho tensor, tal y como es de esperar en todas las ecuaciones relativistas que se obtengan.

Finalmente, la ecuación de Navier – Stokes relativista para un fluido ideal (44) se reescribió teniendo en cuenta la definición de densidad de masa generalizada, de forma tal que la estructura matemática y significado físico de dicha ecuación fuera el mismo que en la mecánica clásica de fluidos, a saber, la fuerza neta sobre un elemento de fluido (50). Sin embargo, como la densidad de masa generalizada introduce un término adicional para la masa – energía, la cantidad de momento, y por tanto, la fuerza sobre el elemento se modificarán de tal suerte que la fuerza neta desde el sistema de referencia Σ también se modifique.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Liu, Chuang. (1992). *Einstein and Relativistic Thermodynamics in 1952*. The British Journal for the History of Science. Vol. 25, pp. 185 – 206.

[2] Tolman, Richard. (1987). *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. Nueva York: Dover Publications Inc.

[3] Buchert, Thomas. (2001). *On Average Propieties of Inhomogeneous Fluids in General Relativity: Perfect Fluid Cosmology.* Disponible en línea en http://arxiv.org./PS_cache/gr-qc/pdf/0102/0102049v2.pdf. Consultado el 20 de Agosto de 2010.

[4] D' Inverno, Ray. (1998). *Introducing Einstein's Relativity*. Nueva York: Oxford University Press.

[5] Callen y Horwitz. (1971). *Relativistic Thermodynamics*. American Journal Physics, Vol. 39.

[6] Shames, Irving. (2001). *Mecánica de Fluidos*. Bogotá: Mc Graw Hill.

[7] Landau, L. D. y Lifshitz E. M. (1987). *Fluid Mechanics*. Nueva York: Pergamon Press.

[8] Aharoni, J. (1985). *The Special Theory of Relativity*. Londres: Dover Publications Inc.

Referencia	Fecha de recepción	Fecha de aprobación
Sandino, John Martín, Castrillón, Arjuna. Conservación de masa y ecuación de navier – stokes para un fluido ideal desde la relatividad especial Revista *Tumbaga* (2010), 5, 165-182	Día/mes/año 16/09/2009	Día/mes/año 30/10/09