RAZONAMIENTO EN LA TRANSICIÓN DE LAS ESTRATEGIAS MANIPULATIVAS A LA GENERALIZACIÓN

María C. Cañadas. Universidad de Granada

Lourdes Figueiras. Universitat Autònoma de Barcelona

RESUMEN

Describimos el proceso seguido por estudiantes de 11-12 años para descubrir patrones de conteo en un problema básico de combinatoria. Hacemos énfasis en la transición de estrategias manipulativas para el conteo directo a la generalización. En esta transición aparecen, de forma espontánea, diagramas de árbol y algunos estudiantes recurren a estrategias comunes en pensamiento numérico. Resaltamos el interés de resolver problemas de combinatoria sin haber aprendido fórmulas previas para que los estudiantes den significado a la regla del producto y relacionamos los resultados obtenidos con aspectos didácticos de la multiplicación en educación primaria.

ABSTRACT

We describe the procedure used by 11-12 years old students in order to solve counting problems to discover patterns in basic combinatory problems. We emphasize the transition from manipulative strategies for direct counting all possibilities to generalization. In this transition, the students sometimes use spontaneously tree diagrams of mathematical ideas and some students use numerical thinking strategies. We highlight the interest of solving combinatory problems in order to let the students make sense of the multiplication rule. We relate the results to didactics of multiplication at Primary School.

Cañadas, M.C., Figueiras, L. (2009). Razonamiento en la transición de las estrategias manipulativas a la generalización. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 161-172). Santander: SEIEM.

El tratamiento de la combinatoria se restringe, en muchos casos, al uso de fórmulas que limitan el desarrollo de razonamientos. Las investigaciones de English (1991) y Fischbein y Gazit (1988) ponen de manifiesto el interés de los procesos de razonamiento de los estudiantes en la resolución de problemas combinatorios y sus implicaciones didácticas. Cuando se realizaron tales investigaciones, la teoría piagetiana avalaba su relevancia para la psicología cognitiva, en tanto que para esta teoría, la combinatoria representa una componente fundamental del razonamiento. Actualmente, el creciente interés por la matemática discreta vuelve a impulsar la reflexión sobre la enseñanza y el aprendizaje de tales contenidos, como se puso de manifiesto en el *11th International Congress on Mathematics Education*. En particular, Hußmann (2008) y Spira (2008) se centran en la resolución de problemas, la toma de decisiones y el uso del razonamiento en la matemática discreta, como se demanda en la actualidad y, en particular para el logro de la competencia matemática (Boletín Oficial del Estado, 2007; Rico y Lupiáñez, 2008, p. 186).

Investigaciones previas relacionadas con esta se han centrado en los primeros años de la educación y, por tanto, las estrategias que emergen son inminentemente manipulativas (Empson y Turner, 2006; English, 1991; Steel y Funnell, 2001). En esta investigación analizamos cómo estudiantes al comienzo de educación secundaria utilizan sus conocimientos previos para desarrollar estrategias que van más allá de lo manipulativo en un problema básico de combinatoria, desde la enumeración de casos hasta la generalización.

De las aportaciones didácticas extraídas del trabajo de Fischbein y Gazit (1988), se desprende una fuerte componente instruccional en relación a la utilización de los diagramas de árbol. En este trabajo pretendemos indagar sobre este hecho, destacando el papel que juegan estos diagramas en esta transición hacia lo general.

MARCO TEÓRICO

Estructuramos las aportaciones teóricas que se toman en cuenta en esta investigación de acuerdo a tres ámbitos fundamentales: problemas de estructura multiplicativa, combinatoria y generalización.

Significado de la Multiplicación y Problemas de Estructura Multiplicativa

Mullingan y Mitchelmore (1997) identifican tres modelos intuitivos para la multiplicación: (a) conteo directo, (b) adición repetida y (c) operación de multiplicación. Dickson, Brown y Gibson (1991, p. 291) afirman que muchos de los procedimientos de cálculo de invención propia se basan en técnicas de cálculo mental e identifican los siguientes modelos para la multiplicación: (a) suma repetida, (b) producto cartesiano y (c) razón. Estos trabajos justifican, entre otros, que el significado de la multiplicación que se promueve en educación primaria esté relacionado con la idea de suma repetida, el producto cartesiano y la formación de grupos (VanDenHeuvel-Panhuizen, 2001). En el contexto de la resolución de problemas, se consideran problemas de estructura multiplicativa aquellos que se resuelven con una multiplicación o una división (Castro y Castro, 2001; Greer, 1992).

Combinatoria y Producto en Situaciones Manipulativas

Cuando la combinatoria se atiende de manera explícita durante la educación primaria, suele hacerse utilizando materiales manipulativos. English (1991) investigó las dificultades de niños hasta 12 años en la resolución de problemas combinatorios, profundizando en las estrategias utilizadas. Identificó que las estrategias (todas ellas manipulativas) variaban según la edad y que el conteo fue la técnica subyacente. De manera análoga, otros modelos asociados a la multiplicación como la suma repetida o el producto cartesiano se introducen en situaciones manipulativas con diferentes recursos didácticos (Empson y Turner, 2006). El tamaño de los números permite identificar diferentes estrategias en problemas que ponen de manifiesto la comprensión del concepto de multiplicación (Steel y Funnell, 2001).

Se suele considerar que la utilización de los diagramas de árbol indica una maduración en las estrategias de conteo. Fischbein y Gazit (1988) detectan que estudiantes de 10 años pueden entender el diagrama de árbol, ayudándoles a pasar a una fórmula de manera natural en casos sencillos de ordenaciones, pero no de combinaciones. Este hecho sugiere que en la instrucción no conviene utilizarlo como única herramienta para resolver problemas de combinatoria.

Generalización

En este trabajo, seguimos la idea de generalización de Pólya (1945), considerándola una actividad empírica inductiva en la que se acumulan ejemplos y se detecta y se sistematiza una regularidad. Es, por tanto, equivalente a lo que Dörfler (1991) llama *generalización empírica*[1]. La generalización, desde esta perspectiva, es parte de un proceso inductivo más amplio y de reconocida importancia para la adquisición de conocimiento matemático y que ayuda a la comprensión de relaciones matemáticas.

Para la descripción del proceso de razonamiento inductivo, Cañadas y Castro (2007) proponen un modelo en un contexto de resolución de problemas que incluye la generalización. Este modelo está compuesto por siete pasos que, comenzando por el trabajo con casos particulares y, pasando por la organización de los mismos y la identificación del patrón, entre otros, llegan a la generalización. Estos pasos han sido útiles para describir procesos inductivos en los que la formulación de conjeturas es clave en diferentes problemas y contextos (Cañadas, Deulofeu, Figueiras, Reid y Yevdokimov, 2008). La organización de la información se presenta como un paso útil en el proceso de generalización como herencia del papel que puede jugar la visualización en la resolución de problemas ya que "el repertorio visual de cada uno puede ponerse al servicio de la resolución de problemas de forma provechosa e inspirar soluciones creativas" (Arcavi, 2003).

La mayoría de los trabajos relacionados con los procesos inductivos y la generalización suelen contextualizarse en secuencias numéricas y configuraciones geométricas. Destacamos el trabajo de Abramovich y Pieper (1996) por trabajar con problemas relacionados con la combinatoria, mostrando cómo los estudiantes llegan a la obtención de fórmulas generales a partir del trabajo con casos particulares.

1 Dörfler distingue entre dos tipos de generalizaciones: *generalización empírica* y *generalización teórica*.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

El objetivo general es describir cómo los estudiantes abandonan estrategias manipulativas por otras abstractas que los guían hacia la generalización. Este objetivo general se desglosa en dos objetivos específicos:

-Caracterizar las estrategias que utilizan los estudiantes para la resolución de un problema de combinatoria sin conocer fórmulas y que requiere cierta generalización.

-Evaluar si los estudiantes identifican la regla del producto como técnica de conteo en situaciones de independencia.

METODOLOGÍA

El trabajo se ha realizado con 25 estudiantes de 11-12 años del Proyecto ESTALMAT Cataluña. El objetivo principal del proyecto es "detectar, orientar y estimular el interés de estudiantes que se sienten especialmente atraídos por la belleza, la profundidad y la utilidad de las matemáticas" (Hernández y Sánchez, 2008, p. 116).

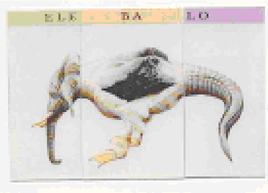
Los estudiantes se seleccionaron a partir de una prueba de resolución de problemas de contenido matemático variado y de entrevistas dirigidas a conocer su interés por participar. Se seleccionó a los que manifestaron una buena aptitud y actitud hacia las matemáticas. No son necesariamente estudiantes superdotados. Sí podemos afirmar que las sesiones se desarrollaron en condiciones óptimas por la implicación e interés de los estudiantes por la actividad.

Los estudiantes no habían trabajado la combinatoria e iniciaban tres sesiones dedicadas a ella, con el objetivo de razonar y deducir técnicas de recuento, e indagar sobre la regla del producto. Los estudiantes debían escribir todos sus razonamientos. En este trabajo nos centramos en el análisis del primer problema de conteo que introducía la sesión y que nos ofrece información concreta sobre el uso de los diagramas de árbol.

Problema Propuesto

Planteamos el siguiente problema a los estudiantes, facilitándoles las fichas a las que hace referencia.

Con las fichas que tenéis en la mesa, podéis formar diferentes animales. (Hay un total de 48 fichas: 16 cabezas, 16 cuerpos y 16 colas)



¿Cuántos animales diferentes podéis formar?

Recogimos las producciones escritas de todos los estudiantes, así como las notas que una de las investigadoras tomó durante el desarrollo de la actividad con el objetivo de llevar a cabo un análisis de casos seleccionados del total de nuestra población.

Se elaboró un primer instrumento de vaciado de datos que aportó información cuantitativa descriptiva sobre la pregunta que planteaba el problema y permitió una selección posterior de los casos. En este primer paso únicamente se consideró si el problema era resuelto correctamente o no y si en las soluciones correctas se hacía uso de la regla del producto de manera inmediata. Los casos que después resultarían interesantes para el análisis serían los estudiantes que resolvían el problema correctamente pero no hacían uso de manera inmediata de dicha regla.

Para responder a nuestros intereses, nos centraremos en los estudiantes que inicien la resolución del problema de manera manipulativa. El hecho de que en un grupo más o menos homogéneo en términos de edad, interés y rendimiento hacia las matemáticas una mayoría de estudiantes utilice de forma inmediata la regla del producto como herramienta de conteo nos permite suponer que quienes aún no lo hacen están en el proceso de consolidarla y este hecho justifica porqué los casos seleccionados fueron considerados especialmente relevantes para nuestra investigación.

ESTUDIO DE CASOS Y RESULTADOS

20 estudiantes respondieron directamente a la tarea, expresando la solución como producto (16 x 16 x 16) o como potencia (16^3). Según las notas de la investigadora al inquirir sobre el proceso para llegar a esa multiplicación, todos encontraban “evidente” su respuesta, por lo que no se requería explicación adicional. Centramos nuestro trabajo en la descripción y análisis de los 5 estudiantes restantes.

Para cada uno de los cinco casos seleccionados, el proceso de razonamiento de los estudiantes se observó siguiendo los pasos del razonamiento inductivo (organización de casos particulares – identificación de un patrón – generalización).

Caso E1

E1 comienza con estrategias manipulativas y representa todos los elementos que intervienen en el problema (48). Trata de representarlos de manera organizada y siguiendo el orden que impone el problema. Utiliza un diagrama de árbol con ramas de colores para organizar los resultados (ver Figura 1).

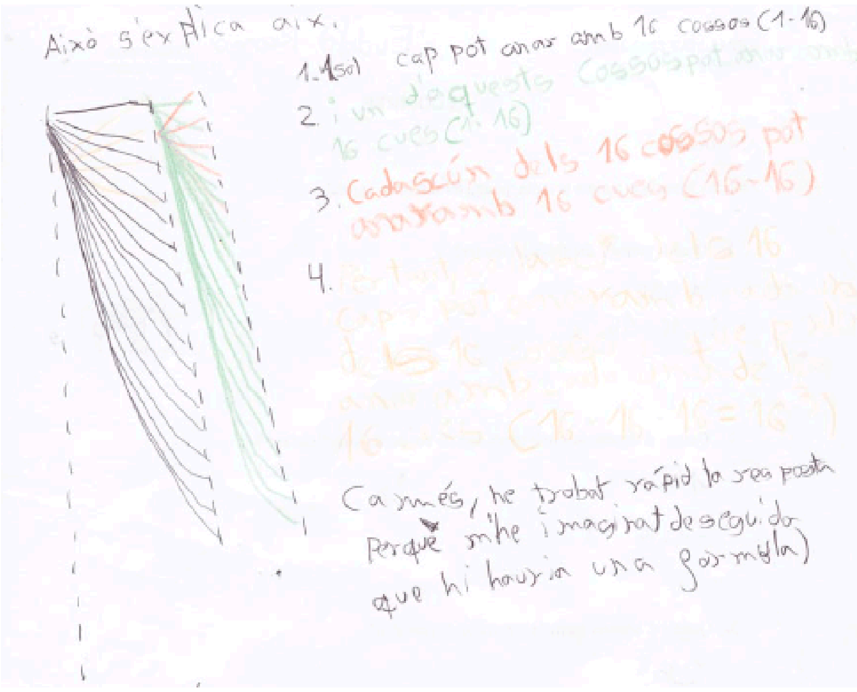


Figura 1. Diagrama de árbol de E1[2]

En la Figura 1 se observa que E1 fija una primera ficha para la cabeza del animal y cubre todas las opciones posibles de ésta con todas las posibilidades de la segunda parte del animal. Para las dos primeras fichas de esta segunda parte del animal, representa todas las opciones. Cuando el número de casos particulares es excesivo, recurre a estrategias de generalización. Para ello, resuelve un problema más sencillo, el correspondiente a que el animal estuviera formado por dos elementos, y extrapola para el problema presentado. E1 expresa 16 (posición 2) x 16 (posición 3) x 16 (posición 1), siguiendo el orden reflejado en el diagrama de árbol. Finalmente, E1 lleva a cabo un importante ejercicio de simbolización al formular su patrón algebraicamente (Figura 2).

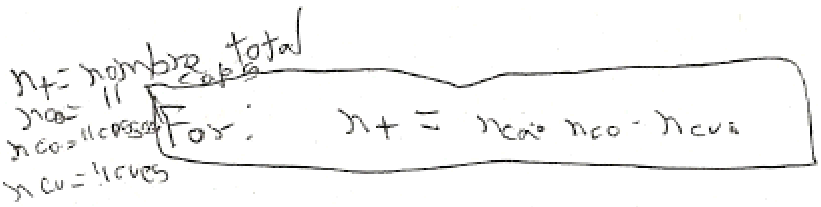


Figura 2. Expresión simbólica del patrón de E1

2 El texto numerado del estudiante lo escribió utilizando diferentes colores que corresponden a las ramas del diagrama igualmente coloreadas a las cuales hace referencia cada paso. La traducción (a cargo de las autoras) es la que sigue:
Eso se explica así:
1. Una sola cabeza puede ir con 16 cuerpos (1·16)
2. Y uno de estos cuerpos puede ir con 16 colas.
Cada uno de los 16 cuerpos puede ir con 16 colas (16·16).
Por tanto cada una de las 16 cabezas puede ir con cada una de los 16 cuerpos que pueden ir con cada una de las 16 colas (16 x 16 x 16 = 16^3).
Además, he encontrado rápido la respuesta porque me he imaginado enseguida que habría una fórmula

Caso E2

E2 comienza el problema tratando de resolver otro más sencillo, reduciendo las 16 fichas a 3. Utiliza un diagrama de árbol para representar todas las posibilidades siguiendo el orden que impone el problema (Figura 3). La representación permite el recuento de todas las posibilidades (27) y, posteriormente, expresa 3^3. Extrapola la respuesta para el problema, calculando 16^3.

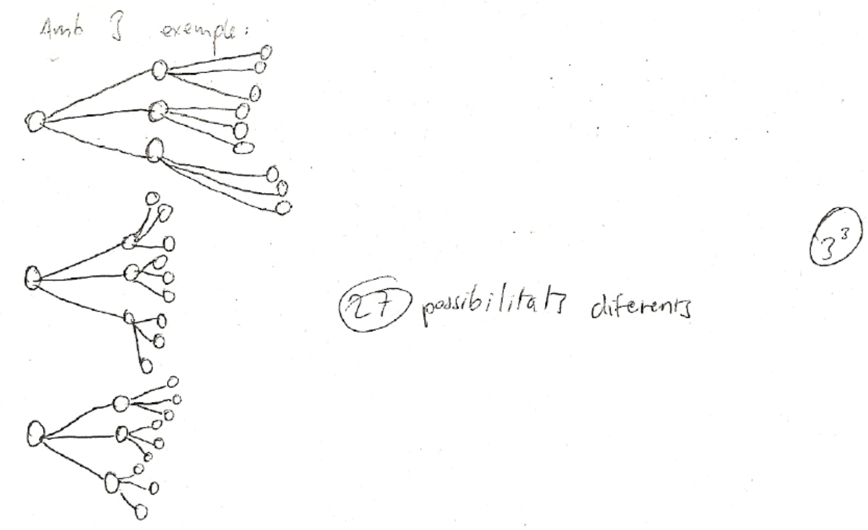


Figura 3. Diagrama de árbol de E2

Caso E3

E3 opera directamente sobre la totalidad de fichas de cada elemento y lo identifica como problema de estructura multiplicativa. Conjetura dos soluciones posibles: 16 x 3 y 16^3.

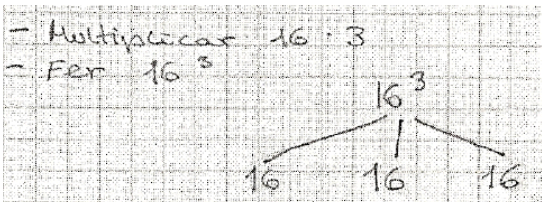
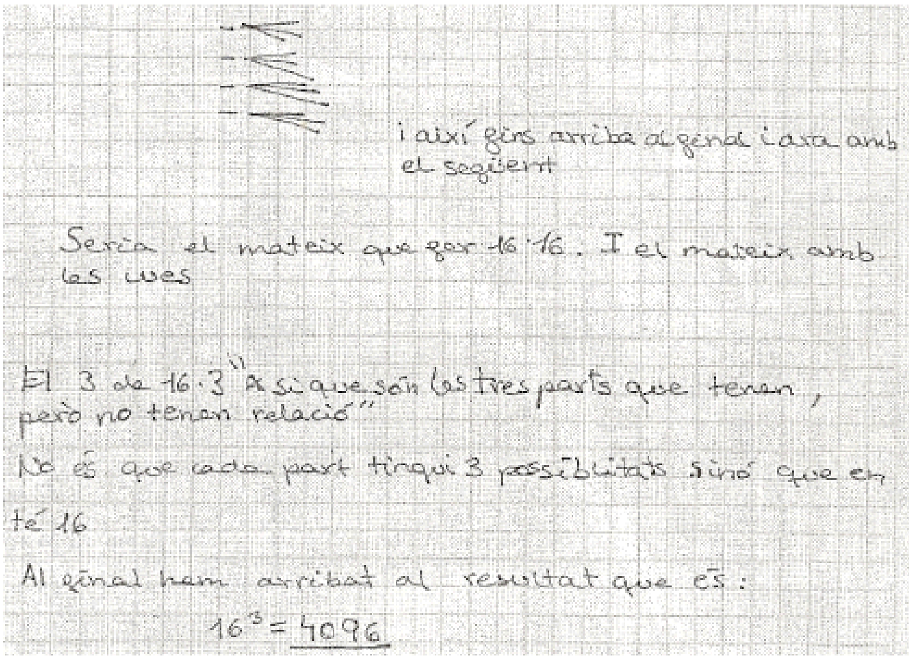


Figura 4. Identificación de estructura multiplicativa E3

Se basa en el diagrama para decidir cuál de las dos hipótesis es correcta (Figura 4). Concluye que 16 x 3 no puede surgir de una representación en diagrama de árbol pero que el diagrama sí se utiliza para representar 16^3 (Figura 5).


i així fins arriba al final i ara amb el següent

Seria el mateix que fer 16·16. I el mateix amb les cues

El 3 de 16·3 "A si que són les tres parts que tenen, pero no tenen relació"

No és que cada part tingui 3 possibilitats sinó que en té 16

Al final hem arribat al resultat que és:

$16^3 = 4096$

Figura 5. Identificación de patrón adecuado E3[3]

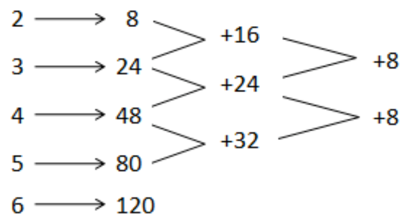
E3 necesita refutar la primera conjetura para finalizar. Para ello, intenta nuevamente dar significado a la operación 16 x 3 en el contexto del problema. "El 3 son las partes que tienen, pero no tienen relación" (Figura 5), sugiriendo que el patrón multiplicativo que responde a una suma repetida 3 veces no se ajusta al problema.

Caso E4

E4 utiliza la estrategia de resolver un problema más sencillo, calculando de forma rápida el número de animales para 2 o 3 fichas por elemento. A continuación, transcribimos la información más significativa del trabajo de E4.

… con dos animales… el resultado es 8

Hemos supuesto que contando 8 por cada dos grupos sería 24



Después he visto que eso no era posible, porque cuando hemos probado el número de combinaciones con tres animales eran 27 y no 24. Entonces, la hipótesis de que para cada animal teníamos que sumar cada vez 8 a la diferencia era falsa…

3 "Y así hasta el final y ahora con el siguiente. Sería lo mismo que hacer 16·16. Y lo mismo con las colas.
El 3 de 16·3 *sí que son las tres partes que tienen, pero no tienen relación*. No es que cada parte tenga 3 posibilidades, sino que tiene 16. Al final hemos llegado al resultado que es 16^3=4096."
(Trad. Autoras. La cursiva no estaba presente en la resolución del estudiante.)

… he observado que dos animales con resultado 8 era igual a 2^3, o sea, el número de animales elevado al número de partes de cada animal, o sea, 3. Y 2^3 es 8.

Eso explica por qué nos ha salido 27…

Si eso lo aplicamos a 16 nos sale 16 [número de animales] *elevado a 3* [número de piezas de cada animal]*, o sea $16^3 = 4096$.*

E4 comienza organizando los casos particulares e, incrementando el número de fichas, considera la segunda diferencia constante e igual a 8. Así obtiene el número de animales que obtendría para 2, 3, 4, 5 y 6 fichas de cada elemento.

Rechaza su conjetura al manipular las fichas para el caso de tener 3 fichas para cada elemento y obtener 27 opciones (y no 24).

A partir de los casos particulares con 2 y con 3 fichas por elemento, detecta el patrón "elevar al cubo el número de elementos de cada parte". Todo el proceso se ha llevado a cabo en el sistema de representación numérico.

Caso E5

E5 calcula que con dos piezas para cada parte obtiene 8 opciones conjetura que para 3 piezas se obtendrán 24 animales, y así sucesivamente (Figura 6). Tras comprobar con otros casos particulares que esa conjetura es falsa, la rechaza. Se centra en resolver un problema más sencillo numéricamente, de 2 o 3 fichas de cada elemento.

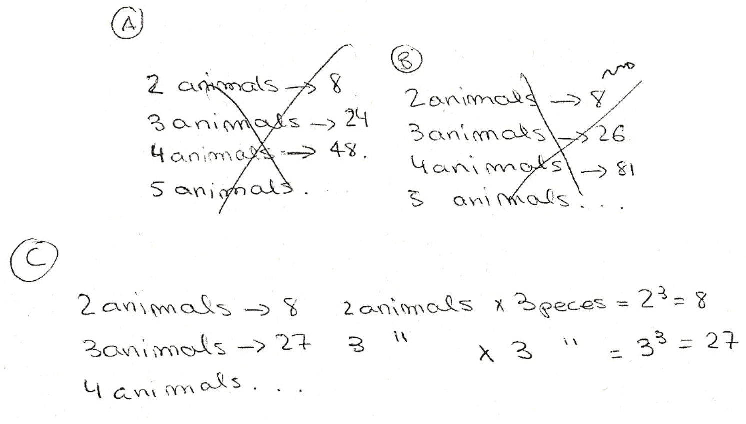


Figura 6. Trabajo y organización de casos particulares E5

Para 2 fichas por elemento, expresa 8 como 3^2-1. Comprueba, con otros casos particulares, que es falsa y la rechaza.

Finalmente formula una nueva conjetura (2^3). La considera válida, comprobando con los casos particulares con los que ha trabajado. De nuevo, todo el proceso se desarrolla numéricamente.

Resumen de Resultados

En tres de los casos de los cinco analizados (E1, E2 y E3), la representación mediante diagrama de árbol en algún momento de su razonamiento resulta clave para determinar un patrón multiplicativo. Por otro lado, E4 y E5 recogen casos particulares numéricamente y trabajan con ellos de manera organizada para la identificación de un patrón.

Recogemos en la Figura 7, de arriba abajo, el resumen del proceso de razonamiento inductivo que siguen los estudiantes en sus explicaciones. Los cuadros sombreados se refieren a pasos del razonamiento inductivo considerados en el modelo. En el resto de los cuadros hemos recogido las acciones que realizan dentro de cada paso, especificando los estudiantes que las realizan e indicando con las flechas en el sentido en el que las efectúan.

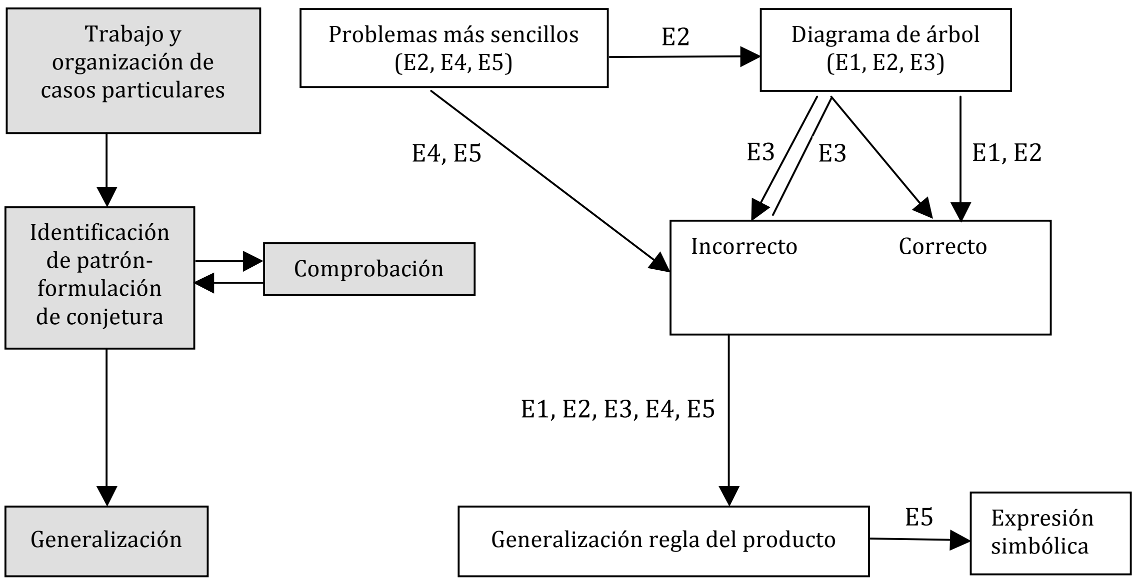


Figura 7. Proceso de razonamiento

Aunque únicamente E1 es quien podemos constatar que logra una expresión algebraica para la regla del producto, consideramos que los cinco estudiantes alcanzan la generalización (generalización empírica en términos de Dörfler) porque el proceso que siguen a partir del trabajo con casos particulares para llegar al cálculo de la solución para los 16 elementos sería válido para cualquier número de elementos.

DISCUSIÓN

Los estudiantes han dado a la multiplicación un significado diferente de los que se suelen considerar para la multiplicación en educación primaria en un problema básico de combinatoria. El producto cartesiano, en ocasiones, aparece en los niveles básicos para la resolución de problemas de enumeración y conteo bidimensionales. Pero no es evidente que su utilización potencie la generalización de la regla, tal y como había sido detectado por Fernández (2008) en su comparación sobre el modo en que estudiantes de educación primaria y estudiantes de bachillerato abordan un mismo problema de combinatoria básico. Con el tipo de problema presentado, los estudiantes pueden poner de manifiesto el significado de la operación aritmética *producto*, que puede ser útil como base para desarrollar fórmulas de cálculo.

Los resultados nos hacen poner en tela de juicio el resultado de Fischbein y Gazit (1988) sobre la necesidad de instruir de forma temprana en la utilización de diagramas de árbol para generalizar resultados. Que 20 de los 25 estudiantes utilizaran la regla del producto de forma directa, sin haberles presentado los diagramas de árbol, nos hace reflexionar sobre la utilidad de su instrucción frente al trabajo en resolución de problemas en los este diagrama pueda ser útil para algunos estudiantes. El trabajo de los estudiantes en el problema propuesto muestra que los diagramas de árbol, en mayor o menor grado, permiten organizar los casos particulares e identificar la regla del producto y pueden aparecer de manera espontánea en diferentes partes de la resolución.

No ponemos en duda que la instrucción deba garantizar el reconocimiento del diagrama de árbol para generar algoritmos de enumeración y recuento pero podemos sugerir que la instrucción sea posterior al inicio del estudiante en la resolución de problemas de combinatoria. En esta investigación se han identificado dos usos de los diagramas de árbol: (a) organización de la información que les facilita la formulación de la generalización posterior (E1 y E2) y (b) organización de la información para comprobar una generalización (E3). En los tres casos, el diagrama de árbol les ha permitido abandonar estrategias manipulativas y no ha necesitado realizar cálculos adicionales, por lo que conjeturamos que pueden estar más avanzados en su proceso de razonamiento inductivo, que ha sido el proceso cognitivo subyacente en los cinco casos presentados.

Este trabajo corrobora la no linealidad del modelo de razonamiento inductivo empleado y sirve como aproximación a la utilización del mismo en la resolución de problemas que involucran un contenido matemático diferente a los tratados en trabajos anteriores (Cañadas y Castro, 2007; Cañadas, Figueiras, Reid y Yevdokimov, 2008).

Agradecimientos: Este trabajo se ha realizado como parte del proyecto del plan nacional de i+D+I con referencia SEJ2006-09056, financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER.

BIBLIOGRAFÍA

Abramovich, S., Pieper, A. (1996). Fostering recursive thinking in combinatorics through the use of manipulatives and computing technology. *The Mathematics Educator, 7*(1), 4-12.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Boletín Oficial del Estado (2007). *ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de Julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Primaria* (Vol. BOE nº 173, pp. 31487-31566). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Cañadas, M. C., Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C., Figueiras, L., Reid, D., Yevdokimov, O. (2008). Perspectivas teóricas en el proceso de elaboración de conjeturas e implicaciones para la práctica: tipos y pasos. *Enseñanza de las Ciencias, 26*(3), 431-444.

Castro, E., Castro, E. (2001). El proceso de investigación. Un ejemplo. En P. Gómez (Ed.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 79-88). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Dickson, L., Brown, M., Gibson, O. (1991). El aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia y Labor.

Dixon, J. A y Bangert, A. S. (2005). From regularities to concepts: The development of childrens' understanding of a mathematical relation. *Cognitive Development, 20*, 65-86.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. J. Bishop (Ed.), *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 63-85). Dordrecht: Kluwer Academic.

Empson, S. B., Turner, E. (2006). The emergence of multiplicative thinking in children's solutions to paper folding tasks. *Journal of Mathematical Behavior 25*, 46-56.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics, 22*(5), 451-474.

Fernández, C. S. (2008). *Identificación y caracterización de diferencias entre alumnos de sexto de primaria y primero de bachillerato*. Trabajo de investigación para optar a la titulación del máster de investigación en didáctica de las ciencias y las matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona. Sin publicar.

Fischbein, E., Gazit, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescents, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 5, 193-197.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situacions. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 276-295. New York: Macmillan.

Hernández, E., Sánchez, M. (2008). ESTALMAT: un programa para estimular y estimular el talento matemático precoz. *Unión, 16*, 113-122.

Hußmann, S. (2008). Doing Mathematics-authentically and discrete. A perspective for teacher training. *Trabajo presentado en el 11th International Congress on Mathematical Education, México.*

Mullingan, J. T., Mitchelmore, M. C. (1997). Young childrens' intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(3), 309-330.

Pólya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: University Press.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Spira, M. (2008). The bijection principle on the teaching of combinatorics. *Trabajo presentado en el 11th International Congress on Mathematical Education, México.*

Steel, S., Funnell, E. (2001). Learning multiplication facts: A study of children taught by discovery methods in England. *Journal of Experimental Child Psychology 79*, 37-55.

VanDenHeuvel-Panhuizen, M. (2001). *Children learn mathematics*. Utrecht: Freudenthal Institute.