

COMPETENCIAS DE MAESTROS EN FORMACIÓN PARA EL ANÁLISIS EPISTÉMICO DE TAREAS DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL

Castro, W. F. (1), **Godino, J. D.** (2), **Rivas, M.** (3)

Universidad de Antioquia (1), *Universidad de Granada* (2),
Universidad de los Andes (3)

Resumen

En este trabajo se reportan los resultados de una investigación realizada con un grupo de 28 maestros en formación sobre la manifestación de dos competencias específicas para la formación didáctica de los futuros maestros. La primera se refiere a la selección de ejercicios matemáticos pertinentes para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental; la segunda se refiere al conocimiento didáctico específico que favorece el reconocimiento de conceptos, procedimientos y propiedades con fines instruccionales. Se dan algunas implicaciones para la formación de maestros.

Abstract

On this paper, we report the results of a research carry out with a group of 28 prospective teachers on the manifestation of two specific competences for the didactic training of prospective teachers. The first refers to the selection of mathematical exercises suited to the development of elementary algebraic reasoning; the second refers to the specific didactic knowledge that favours recognizing concepts, procedures and properties oriented to teaching. Some implications for teacher education are given.

Palabras clave: Formación de profesores; conocimiento matemático; conocimiento didáctico; razonamiento algebraico elemental; enfoque ontosemiótico.

Key words: Teachers education; mathematical knowledge; didactical knowledge; early algebra; onto-semiotic approach.

Introducción

Diversas investigaciones y propuestas curriculares recomiendan la incorporación del razonamiento algebraico elemental en los distintos niveles de educación primaria. Kaput (2000) hizo una propuesta denominada “álgebra for all”, en la que sugiere promover el álgebra como facilitadora de una mejor comprensión de las matemáticas, en lugar de ser inhibidora. Esta propuesta de Kaput se ha llamado la “algebrización del currículo”, la cual ha generado una visión ampliada sobre el álgebra escolar.

Resultados de diversas investigaciones longitudinales sobre la inclusión del razonamiento algebraico desde la escuela elemental (Derry, Wilsman y Hackbarth, 2007) alientan a iniciar la enseñanza del álgebra en la escuela primaria para preparar mejor a los niños de cara a asumir el álgebra de la escuela secundaria.

En esta línea de ideas, en el ámbito de la formación inicial de maestros, resulta natural plantearse la cuestión: ¿Qué tipo de educación debe ser ofrecida a los maestros en formación inicial para que puedan reconocer el carácter algebraico de las tareas matemáticas y promover el razonamiento algebraico en los niños?

En correspondencia con esta cuestión en este trabajo nos circunscribimos a estudiar dos aspectos: el primero refiere a la competencia de identificación de tareas matemáticas que promueven el razonamiento algebraico elemental (RAE); y el segundo refiere a la competencia de análisis epistémico¹ para el estudio de tareas que involucran el razonamiento algebraico elemental.

En este sentido, nos hemos planteado los siguientes objetivos:

- Identificar competencias para reconocer tareas matemáticas que promuevan el RAE, por parte de futuros maestros.
- Describir competencias de análisis epistémico de tareas que involucran el RAE, exhibidas por futuros maestros.

Marco teórico

Para Blanton y Kaput (2005, p. 414):

“la mayoría de los profesores de escuela elemental tienen poca experiencia con los aspectos ricos y conexos del razonamiento algebraico elemental...” y agregan “...debemos proveer formas apropiadas de apoyo profesional que produzcan cambios en las prácticas curriculares” (p. 414).

¹ Una aplicación de esta forma de análisis puede verse en Godino, Rivas, Castro y Konic (2008)

En este sentido, en la formación inicial de maestros, es un reto para los formadores facultar a los futuros maestros para reconocer y promover el razonamiento algebraico elemental cuando este es expresado por niños.

En la presente investigación se asume el razonamiento algebraico en la escuela elemental como las prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas abordables en la educación obligatoria en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos (simbolización, relación, variables, incógnitas, ecuaciones, patrones, generalización, modelización, etc.).

Discutiremos dos competencias específicas para la formación didáctica de los futuros maestros considerando algunos elementos del enfoque ontosemiótico en educación matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). La primera se refiere a la competencia de diseño de un proceso de estudio didáctico-matemático, que involucra: a) la selección de problemas matemáticos pertinentes para el desarrollo del razonamiento algebraico elemental de los alumnos; y b) definición, enunciación y justificación de los conceptos, procedimientos y propiedades en función de su uso en un proceso de enseñanza. La segunda se refiere al conocimiento didáctico específico que permite utilizar el reconocimiento de conceptos, procedimientos y propiedades puestos en juego durante la enseñanza, para favorecer la identificación de conflictos de significado que posiblemente se manifiesten en el aprendizaje matemático involucrado en el razonamiento algebraico elemental.

Consideramos que el proceso formativo, necesario para el desarrollo de las competencias referidas, constituye una labor inscrita en la producción del conocimiento matemático para la enseñanza. Al tomar en cuenta diversas propuestas para el estudio del conocimiento del profesor (Godino, 2009; Hill, Ball y Schilling, 2008; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008), observamos la necesidad de crear herramientas para desarrollar esta forma de conocimiento. Asimismo, en otros estudios (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008), hemos constatado que el uso de la herramienta análisis epistémico propuesta, permite realizar un análisis detallado que involucra el reconocimiento de elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos, y los significados conferidos a estos objetos, puestos en juego en una actividad matemática en el contexto escolar. En Castro y Godino (2009) se observa que el uso de la herramienta de análisis epistémico posibilita el desarrollo del conocimiento matemático necesario para la enseñanza propuesto por Hill, Ball y Schilling (2008). En este sentido, la “Faceta epistémica” (Godino, 2009, p. 25), desarrollada por medio de la herramienta de análisis epistémico, explicitada en las consignas respectivas, hace operativas las formas del conocimiento matemático necesario para la enseñanza, correspondientes al “conocimiento común del contenido” y “conocimiento especializado del contenido” (Hill, Ball y Schilling, 2008). De esta manera, el desarrollo de las competencias mencionadas, motivo de esta investigación, se corresponde con el desarrollo de estas formas de conocimiento.

Metodología

Contexto de investigación

En la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, se imparte la asignatura “Currículo matemático en Educación Primaria” para maestros. La asignatura tiene una componente práctica y una teórica; en esta última se discuten aspectos generales de didáctica de la matemática y se evalúa mediante un examen escrito. Para aprobar la componente práctica los estudiantes deben, entre otras tareas, diseñar una “unidad didáctica” para un contenido matemático de primaria. El diseño de la unidad didáctica comprende, entre otras actividades, elaborar situaciones problema, o elegir las de un libro de texto o material pertinente, relativas a diferentes aspectos de un contenido matemático de primaria, con el fin de planificar su enseñanza. Tal planificación involucra: la resolución de las situaciones problema, el análisis epistémico de las mismas y la identificación de posibles conflictos de significado. En el marco de la elaboración de esta unidad didáctica, los estudiantes, participantes de esta investigación, escogieron voluntariamente el RAE como contenido sobre el cual versaría su unidad didáctica. El curso no versa sobre didáctica del álgebra, sin embargo a los estudiantes-participantes se les dio una aproximación al razonamiento algebraico elemental, junto con dos prácticas que incluyeron algunos errores de los niños cuando trabajan con tareas de razonamiento algebraico elemental.

Método

El método de investigación para este estudio se enmarca en la investigación cualitativa (Erickson, 1986), en el “subcampo” de investigación de la Educación Matemática identificado por Sánchez (2009) como “formación de profesores”.

Los estudiantes participantes: La investigación se efectuó con un grupo de 28 estudiantes del curso “Currículo matemático en Educación Primaria”, quienes voluntariamente eligieron el tema RAE para el diseño de su unidad didáctica, que tienen en promedio 20 años, está conformado por 86% de mujeres y 14% hombres. Cada grupo está formado por cuatro estudiantes. Manifestaron gran afinidad hacia la profesión docente; el 20% manifestaron haber trabajado con niños en clases particulares. Expresaron interés en el tema de razonamiento algebraico en la escuela elemental (en tanto que “no es posible enseñar álgebra en la escuela [elemental]... queríamos saber de qué va esto”²). Durante las reuniones de trabajo mostraron un pensamiento crítico e independiente.

² Notas de campo

Recolección de datos: Para obtener comprensión del proceso experimentado por los estudiantes efectuamos un proceso de triangulación y usamos varias fuentes de datos: conversaciones informales, tareas escritas y audio de las discusiones.

Tanto las categorías de ejercicios que los futuros maestros proponen para promover el razonamiento algebraico como los análisis epistémicos que hacen de uno de los ejercicios, se han tomado de las unidades didácticas elaboradas por los sujetos participantes.

Resultados

Categorías de ejercicios propuestos por los maestros en formación

Una vez revisadas las actividades matemáticas propuestas por los siete grupos de estudiantes, se clasificaron en diez categorías. Un análisis de las mismas permitió identificar que estas se corresponden con tres aproximaciones al razonamiento algebraico elemental: la primera corresponde a la aproximación dada por Kücherman (1981); la segunda se corresponde con algunos elementos del razonamiento algebraico elemental considerados por Burkhardt (2001), y el tercero, se corresponde con elementos diferentes a los anteriores y propuestos por los maestros en formación inicial.

En la Tabla 1 se presentan las categorías agrupadas de acuerdo con las aproximaciones mencionadas. Las que corresponden a la propuesta de Kücherman (1981): letra evaluada, letra ignorada, objeto, valor desconocido específico, número generalizado y variable; las que corresponden a algunos de los elementos algebraicos considerados por la propuesta de Burkhardt (2001): valor faltante, incógnita, problemas de palabras y patrón o regla; y finalmente, la que corresponde a la propuesta por los sujetos participantes: cálculo de expresiones, representación de relaciones y valor desconocido. Las resaltadas en gris no fueron mencionadas por los maestros en formación.

	Kücheman (1981)						Burkhardt (2001)					Maestros en formación	
	Letra evaluada	Letra ignorada	Objeto	Letra desconocida	Número generalizado	Variable	Valor faltante	Incógnita	Problemas de palabras	Encontrar regla o patrón	Cálculo de expresiones	Representación de relaciones	Valor desconocido
Propuestos por los grupos	si	no	si	no	si	no	si	si	si	si	si	si	si

TABLA 1: CATEGORÍAS DE EJERCICIOS PROPUESTOS POR LOS MAESTROS EN FORMACIÓN

Mostraremos ahora evidencia de la segunda competencia referida al conocimiento didáctico específico que permite utilizar el reconocimiento de conceptos, procedimientos y propiedades en la programación de actividades de enseñanza. Presentamos a continuación un ejercicio y la solución propuesta por uno de los grupos. Posteriormente se muestran algunos segmentos del análisis epistémico y algunos conflictos de significado que identificaron.

Ejercicio propuesto y su solución

En la Fig. 1 se muestra un ejercicio propuesto por uno de los grupos de futuros profesores. La solución propuesta por los integrantes del grupo se muestra en la Fig.2. En ella observamos la puesta en juego del “conocimiento común del contenido”.

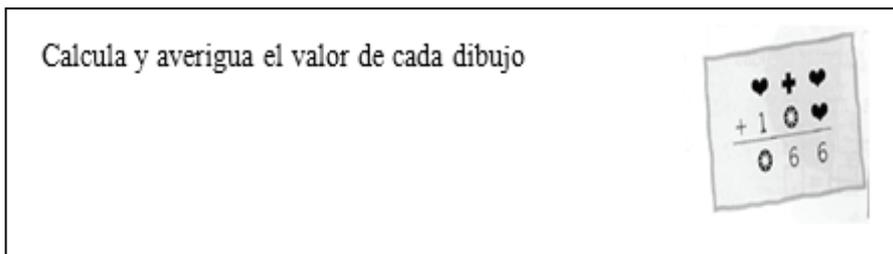


FIG. 1: EJERCICIO PROPUESTO POR LOS ESTUDIANTES

En primer lugar, resolveremos la suma:

Si nos fijamos en la columna de las unidades, tenemos la siguiente ecuación:

$$2 \times \heartsuit = 6 \rightarrow \heartsuit = 6/2 \rightarrow \heartsuit = 3$$

Una vez hallado este valor, ya conocemos un dato más que nos permite escribir la ecuación que resulta de la columna donde se suman las decenas:

$$3 + 1 = \circ \rightarrow \circ = 4$$

Finalmente, nos fijamos en la columna de las decenas y obtenemos la siguiente expresión:

$$\heartsuit + 4 = 6 \rightarrow \heartsuit = 6 - 4 \rightarrow \heartsuit = 2$$

Es decir, la suma que se nos presenta en el enunciado es la siguiente:

$$\begin{array}{r} 323 \\ + 143 \\ \hline 466 \end{array}$$

FIG. 2. SOLUCIÓN DEL EJERCICIO, DADA POR LOS ESTUDIANTES

Análisis epistémico realizado por futuros maestros

El grupo realiza un análisis epistémico mediante el uso de la “Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados” (GROS) (Godino et al., 2008) que previamente se les había proporcionado en el módulo de “clases de teoría” de la asignatura. Mostraremos algunas de las entradas proporcionadas por los futuros maestros para elementos lingüísticos, procedimientos y propiedades (Tabla 2). Al considerar las entradas en la Tabla 2, observamos que el conocimiento puesto en juego por los estudiantes es un tipo de conocimiento didáctico, que solo tiene interés para el futuro profesor de matemática, es decir, en esta actividad, en la que se identifican objetos y significados puestos en juego en torno a la resolución de un problema matemático, se desarrolla el “conocimiento especializado del contenido” (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Identificación de posibles conflictos de significado

A partir de la identificación de los objetos y de sus significados intervinientes y emergentes durante la resolución particular dada al ejercicio, se pueden señalar posibles conflictos de significado que podrían surgir durante la interacción entre maestro y alumnos. Desde la perspectiva del desarrollo del conocimiento didáctico-matemático se considera que la preparación de una actividad matemática con fines instruccionales no solamente debe considerar la “solución matemática” sino la identificación de posibles conflictos y modos de abordarlos. Esto es aún más pertinente cuando se trabaja con maestros en formación inicial, quienes posiblemente carecen del conocimiento de los niños y de los conflictos que estos suelen manifestar.

Tipos de objetos	Significados (relación de referencia o de uso)
<i>Elementos lingüísticos</i>	<i>Términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones, gráficas.</i>
Calcula y averigua el valor de cada dibujo	Cada uno de los dibujos empleados para designar las cifras cuyo valor desconocemos, son incógnitas que deberemos hallar tratando de resolver la suma que nos propone el enunciado
<i>Procedimientos</i>	<i>Técnicas, operaciones, algoritmos</i>
Resolución de ecuaciones de primer grado	Utilizadas para establecer las relaciones entre los símbolos, así como para calcular su valores numéricos
<i>Propiedades</i>	<i>Enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba</i>
P1: Cada una de las incógnitas tiene un único valor numérico	A cada una de las letras del cuadro le corresponde un único valor numérico, que debe estar comprendido entre 0 y 9

TABLA 2. IDENTIFICACIÓN DE ALGUNOS OBJETOS Y SIGNIFICADOS

Por razones de espacio, informaremos sólo de algunos conflictos de significado identificados por el grupo, los cuales se muestran en la Fig. 3.

- Los niños se pueden liar pues se pide que calculen y averigüen, tal vez se les debe decir sólo una cosa, o que calculen o que averigüen. Tal vez quitar averiguar, pues podrían adivinar y poner números sin pensar en las operaciones que deben hacer
- Si los niños resuelven el problema por ensayo y error, entonces el problema es más difícil, pues los niños ensayaran valores en desorden y se liarán mucho con la solución
- Los niños pueden pensar que en cada dibujo pueden colocar un número diferente, no piensan que cada dibujo representa un número, pero que es el mismo número y no diferentes. En el mismo dibujo colocan dos números diferentes

FIG. 3: ALGUNOS DE LOS CONFLICTOS IDENTIFICADOS POR LOS ESTUDIANTES

Discusión de resultados

Los procedimientos identificados se corresponden con los usados por el grupo en la solución matemática del ejercicio, y los significados conferidos se adecuan a la resolución mostrada en la Fig. 2. Nótese que los significados para “algoritmo de sumar” se expresan en términos de lo que el procedimiento “permite” hacer. Mientras que el procedimiento de “resolución” se indica en términos de “propósito”. El significado conferido a “asignación de un valor numérico...” se da en términos de sustitución de letras por números.

El concepto de incógnita, inmerso en la solución del problema, no fue específicamente mencionado por el grupo en su listado de conceptos, sin embargo, aparece en los significados que surgen en la identificación de procedimientos “valor numérico a una incógnita que era desconocida en un principio”. En tal sentido la GROS es una herramienta que da cuenta de un proceso complejo y dinámico, y que puede ser cumplimentada de varias maneras; lo cual pone de manifiesto la relatividad de los objetos y significados matemáticos.

En relación con la identificación de conflictos potenciales, el grupo no refiere a que los niños podrían tener dificultades para resolver las ecuaciones con una sola incógnita. Al parecer consideran que el procedimiento de “operar en reversa” o de “transponer” términos (Filloy, Rojano y Puig, 2008) será espontáneamente desarrollado por los niños. Los maestros no consideran posibles conflictos derivados de una solución aritmética.

Implicaciones para la formación de maestros

Parece que el grupo manifiesta competencia tanto para seleccionar ejercicios tipo RAE en libros de texto para sexto curso de primaria, como para reconocer, definir, y enunciar los conceptos, procedimientos y propiedades a tener en cuenta en la enseñanza.

El análisis epistémico efectuado por el grupo le permite identificar posibles conflictos de significado pertinentes y específicos, implicados en la tarea considerada. La puesta en práctica de este tipo de análisis ha permitido al grupo efectuar un reconocimiento más específico de algunos elementos propios del razonamiento algebraico elemental. Si se compara la resolución dada por los estudiantes con el análisis epistémico del ejercicio, se observa que la mera solución del ejercicio es insuficiente, tanto para reconocer los diversos objetos y significados puestos en juego, como para planificar su enseñanza para los niños.

Se debe reconocer que la puesta en práctica del análisis es un reto para los futuros maestros. La identificación y discriminación de los tipos de objetos y significados resulta conflictiva, ya que supone un cierto nivel de actividad metacognitiva (Jaworski, 2005) a la que no están habituados. Sin embargo, la actividad de análisis

epistémico enmarcada en la formación inicial de maestros promueve el desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008) en tanto que se ofrece una herramienta que promueve el reconocimiento de los diversos tipos de objetos y los significados que intervienen en la instrucción matemática. Para Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnets (2006):

“...la idea no es simplemente atribuir significado algebraico a las actividades matemáticas de la escuela primaria. Los contenidos matemáticos deben ser transformados sutilmente para resaltar su carácter algebraico” (p. 88).

Este tipo de actividades de reflexión y análisis podría ayudar a profundizar la comprensión de los objetos y procesos matemáticos, que a su vez contribuyen al reconocimiento y promoción del razonamiento algebraico elemental por parte de los maestros. En este sentido el presente trabajo aporta información para apoyar la revisión de los planes de formación de maestros en el área de matemáticas y de incluir el razonamiento algebraico y su didáctica en el desarrollo de los distintos bloques de contenido. Similar al trabajo de Gómez (2001) perseguimos evaluar el desarrollo del conocimiento didáctico en la formación inicial de profesores, sin embargo, avanzamos hacia la elaboración y puesta en práctica de herramientas dirigidas al desarrollo de esa forma de conocimiento.

Reflexión final

Somos conscientes que nuestro énfasis en sólo dos competencias didácticas no da cuenta de la complejidad del proceso de diseño didáctico en términos de la propuesta de Ball, Thames y Phelps (2008). Sin embargo, consideramos que la focalización en estas dos competencias y su puesta en práctica en tareas de razonamiento algebraico elemental, ha favorecido no sólo la elección de ejercicios que ponen en juego algunos elementos del razonamiento algebraico elemental sino también el reconocimiento del complejo entramado de objetos y significados inmersos en la solución de una tarea algebraica. Se ha avanzado así hacia una respuesta a la pregunta: ¿Qué tipo de formación debe ser ofrecida a los maestros en formación para que puedan reconocer tanto el carácter algebraico de las tareas matemáticas como promover el razonamiento algebraico en los niños?

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, SEJ2007-60110/EDUC. MEC-FEDER.

Referencias

- Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Blanton, M. L. and J. Kaput (2005). "Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning." *Journal for Research in Mathematics Education* 36(5): 412-446.
- Burkhardt, H. (2001). Algebra for all: What does it mean? How are we doing? En H. Chick, K. Stacey, J. Vincent y J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Vol. 1, pp. 140-146). Melbourne: University of Melbourne, Australia.
- Carraher, D. W., Schliemann, A., Brizuela, B., y Earnets, D. (2006). Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 37(2), 87-115.
- Castro, W. F., y Godino, J. D. (2009). *Cognitive configurations of pre-service teachers when solving an arithmetic-algebraic problem*. Comunicación presentada en el VI Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 6), Université Claude Bernard, Lyon, France. Recuperable en: <http://www.ugr.es/~jgodino/>
- Derry, S. J., Wilsman, M. J., y Hackbarth, A. J. (2007). Using contrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 305-329.
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching, 3er edition. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*. New York: Macmillan.
- Filloy, E., Rojano, T., y Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach* (Vol. 43). Berlin: Springer.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 19(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., y Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. *ICME 11*, Topic Study Group 27, Mathematical Knowledge for Teaching. Monterrey, Mexico. Recuperable en <http://tsg.icme11.org/document/get/391>.

- Gómez, P. (2001). Desarrollo del conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas: el caso de la estructura conceptual y los sistemas de representación. En M.F. Moreno, F. Gil, M. Socas y J.D. Godino (Eds.). *V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp.169-180). Almería: Universidad de Almería.
- Hill, H. C., Ball, D., y Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Jaworski, B. (2005). Tools and tasks for learning and meta-learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8, 359-361.
- Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum. En National Research Council (Ed.) *The nature and role of algebra in the K-14 curriculum: Proceedings of a National Symposium*. National Academy Press, Washington, DC. Disponible en <http://eric.ed.gov/> (Eric # ED441664).
- Kücheman, D. (1981). Algebra. En K. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics:11-16* (pp. 102-119). London: John Murray.
- Sánchez, V. (2009). Investigación en Educación Matemática y formación de profesores. Visibilizando una relación. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII Simposio de la SEIEM*. (pp. 57-62). Santander: SEIEM
- Schoenfeld, A. H., y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*, (pp.321-354). Sense Publishers: Rotterdam.