Inexistencia de lazos oblicuos en el hiperboloide de dos hojas

Óscar Andrés Montaño Carreño

Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad del Valle, Cali

Resumen

Un lazo σ en una curva cerrada C^k inmersa en $\mathbb{R}^3$; σ es oblicuo si no tiene rectas tangentes paralelas. Demostraremos que si σ es un lazo de clase C^2 en un hiperboloide de dos hojas, entonces σ no es oblicuo.

Abstract

A loop σ is a closed curve of class C^k immersed in $\mathbb{R}^3$; a loop σ is called skew if it does not have parallel tangent lines. In this paper, we prove that if σ is loop belonging to the class C^2 in the hyperboloid of two sheets, then σ is not skew.

Palabras y frases clave: Lazo oblicuo, esfera, curvature geodésica, inmersión, tantrix.

Key words: Skew loops, sphere, geodesic curvature, tantrix.

Clasificación matemática AMS: 53A04 Y 53A05

INTRODUCCIÓN

En el año 1966, H. Steinhaus conjeturó la inexistencia de lazos oblicuos en $\mathbb{R}^3$. Tiempo después, B. Segre (1968) construyó ejemplos de lazos oblicuos en $\mathbb{R}^3$ y probó que no existen lazos oblicuos ni en los elipsoides, ni en los paraboloides. Estos resultados fueron recientemente extendidos y refinados por M. Ghomi y B. Solomon (2002). Ellos demostraron que no existen lazos oblicuos en las superficies cuádricas con curvatura positiva. En lo que sigue, presentaremos las ideas de Ghomi y Solomon para el caso del hiperboloide de dos hojas.

La primera sección del artículo está dedicada a los preliminares geométricos y a la demostración de ciertos lemas para lazos inmersos en superficies de curvatura positiva. En la segunda sección definimos de manera apropiada una forma 1-forma ω y demostramos que si α es la Q-tantrix de un lazo inmerso en el hiperboloide de dos hojas,

Correo electrónico: oscara@puj.edu.co.

entonces la integral de ω sobre α es cero. Este resultado y el Teorema de Stokes nos permitirán demostrar la inexistencia de lazos oblicuos en el hiperboloide de dos hojas.

1. PRELIMINARES GEOMÉTRICOS, LAZOS EN SUPERFICIES DE CURVATURA POSITIVA

Una función $\sigma : S^1 \to S^2$ es una inmersión de la circunferencia en la esfera si y sólo si para todo $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\left|\frac{d}{d\theta}\sigma(e^{i\theta})\right|>0.$$

Esta condición garantiza que la curva S^2 no tiene esquinas o cúspides, aunque si puede intersecarse a sí misma. Si además $\sigma : S^1 \to S^2$ es un homeomorfismo (dando a $\sigma\ (S^1)$ la topología inducida por (S^2)), diremos que σ es un encaje. La tantrix τ de una de tales inmersiones σ, de clase C^2 parametrizada por longitud de arco es $\tau := \frac{d\sigma}{ds}$. La tantrix de un lazo es una curva cerrada en S^2. Obsérvese que si σ es un lazo oblicuo entonces τ es un encaje y no contiene puntos antipodales.

Recordemos que una transformación afín es una aplicación $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de la forma $T(X) = AX + B$, donde A es una matriz de orden 3×3 y B es un vector columna 3×1.

Lema 1.1. *Las transformaciones afines biyectivas conservan lazos oblicuos.*

Demostración. Sea σ un lazo oblicuo en $\mathbb{R}^3$. Supongamos que $\beta(t) = T(\sigma(t)) = A\sigma(t) + B$ es un lazo no oblicuo. Existen entonces t,s,λ tales que $\dot\beta(t)=\lambda\dot\beta(s)$. Por lo tanto, $A\dot\sigma(t)=\lambda A\dot\sigma(s)$, es decir, $\dot\sigma(t)=\lambda\dot\sigma(s)$, lo que contradice lo supuesto.

Un teorema básico de H. Whitney (1937) establece que, en $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, cada lazo es regularmente homotópico a la figura de ocho.

$$\lambda_0(e^{it}):=\cos t(1+i\sin t),$$

o a uno de los k-círculos dados por

$$\lambda_k(e^{it}):=e^{ikt},\ k=\pm1,\pm2,\ldots$$

En $S^2 \simeq \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, sin embargo, S. Smale (1958) mostró que hay dos clases homotópicas, a saber: la figura del ocho γ_0, y el ecuador γ_1.

Lema 1.2. *Cada lazo de Clase C^2 en S^2 es regularmente homotópico en S^2 a su propia trantix.*

Demostración. La homotopía de clase C^1 definida por

$$h:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times I\to S^2,\ h(\theta,t):=\sigma(t)\cos\theta+\tau(t)\sin\theta$$

deforma cualquier curva inmersa σ en su propia tantrix $\tau:=\dot{\sigma}$. Para verificar que h es regular, recordemos que $\dot{\tau}=-\sigma+k_g\nu$ donde k_g es la curvatura geodésica de σ, y $\nu := \sigma\times\tau$. Derivando con respecto a t,

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\tau(t)\cos\theta+k_g\nu(\tau)\sin\theta-\sigma(t)\sin\theta$$

Puesto que σ,τ, y ν son ortonormales, $\sigma_\theta(t) := h(\theta,t)$es una inmersión.

A continuación se presentan dos resultados relevantes sobre los lazos en superficies de curvatura positiva.

Lema 1.3. *Si σ es un lazo de clase C^2 inmerso en una superficies M de curvatura positiva, entonces su tantrix τ está inmersa en S^2.*

Demostración. Sea σ parametrizado por longitud de arco y sea ν una aplicación de Gauss en M. Derivando con respecto a t la ecuación $\langle\tau(t),\nu(\sigma(t))\rangle=0$ se tiene

$$\langle\dot{\tau}(t),\nu(\sigma(t))\rangle+\langle\tau(t),d\nu(\sigma(t))\tau(t)\rangle=0$$

Esto quiere decir que la componente normal de $\dot{\tau}$ es $\langle\dot{\tau}(t),\nu(\sigma(t))\rangle=\langle\tau(t),-d\nu(\sigma(t))\tau(t)\rangle=K(\dot{\sigma}(t))$, donde $K(\dot{\sigma}(t))$ es la curvatura normal en la dirección de $\dot{\sigma}=\tau$. Como M tiene curvatura positiva, entonces $\dot{\tau}\neq 0$.

Lema 1.4. *Sea $f: M\to\mathbb{R}^3$ una inmersión de clase C^2 de una superficie M de curvatura positiva en el espacio ambiente $\mathbb{R}^3$. Entonces la tantrix de cualquier figura del ocho en M es otra vez una figura del ocho. En particular, M no admite figuras del ocho oblicuas.*

Demostración. Cualquier figura del ocho $\alpha\subset M$ es regularmente homotópica a una copia β de la figura del ocho estándar $\gamma_{(0)}$ en un disco coordenado U. El Lema 1.3 implica que la tantrix τ_α de α es regularmente homotópica a la de $\beta : \tau_\alpha \sim \tau_\beta$. Es suficiente mostrar que τ_β es una figura del ocho sobre S^2.

Después de una homotopía regular de β podemos asumir que U es lo suficientemente pequeño para que $f(U)$ sea una gráfica sobre uno de los planos tangentes. Después de una transformación afín, β está contenido en un disco coordenado $U\subset M$ con imagen $f(U)$ contenida en la gráfica de una función convexa C^2, notada h_0: $D^2\to\mathbb{R}$, donde $D^2\subset\mathbb{R}^2$ es el disco abierto unitario. Podemos entonces realizar β como una gráfica, β_0, sobre una figura del ocho $\gamma: S^1 \to D^2$, definida por

$$\beta_0(t)=\gamma(t)+h_0(\gamma(t))\mathbf{k},\ \ \mathbf{k}:=(0,0,1).$$

Podemos también asumir (dilatando si es necesario) que los valores propios del hessiano D^2h_0 yacen entre 0 y 1 en todo D. Además, expresamos el hemisferio sur de S^2 como la gráfica de una función h_1: $D^2\to\mathbb{R}$. Los valores propios de D^2h_1 son siempre al menos 1, tenemos entonces una deformación de $f(U)$ hacia S^2 por superficies con curvatura positiva dadas por

$$h_\in(x)=h_0(x)+\in(h_1(x)-h_0(x)),0\le\in\le 1.$$

Por el Lema 1.4, las tantrices de las figuras del ocho $\beta_\in := \gamma(t) + h_\in(\gamma(t))\mathbf{k}$ son todas inmersas. En particular, $\tau_\beta \sim \tau_{\beta 1}$. Por el Lema 1.2, $\tau_{\beta 1} \sim \beta_1$. Entonces $\tau_\beta \sim \beta_1$, la cual es una figura del ocho sobre S^2

1. HIPERBOLOIDES

Sea Q la forma bilineal simétrica en $\mathbb{R}^3$ dada por

$Q(X,X) = x^2 + y^2 - z^2,$

donde $X := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Las superficies de nivel de Q son hiperboloides de revolución, semejantes a $\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^3 : Q(X, X) = -1,\ z > 0\}$ (Hiperboloide de dos hojas) o a $\widetilde{\Sigma} = \{X \in \mathbb{R}^3 : Q(X, X) = 1\}$(Hiperboloide de una hoja). Diferenciando Q a lo largo de un arco σ inmerso en Σ o $\widetilde{\Sigma}$, se obtiene $Q(\dot{\sigma}, \sigma) \equiv 0$.

Lema 2.1. *Cada punto p en Σ o $\widetilde{\Sigma}$ es Q-normal a la superficie en p.*

Consideremos ahora las siguientes parametrizaciones de Σ y $\widetilde{\Sigma}$ dadas respectivamente por

$X(u, v) = (\cos u \sinh v, \sin u \sinh v, \cosh v$

y $\widetilde{X}(u,v) = (\cos u \cosh v, \sin u \cosh v, \sinh v)$. Puesto que $Q(X, X_u) > 0$, $Q(X_v, X_v) > 0$ y $Q(X_u, X_v) = 0$, Q induce una métrica Riemanniana sobre Σ, conocida como métrica hiperbólica. La Q -tantrix de un lazo σ inmerso en Σ se define como

$$\tau_Q(t) := \frac{\dot{\sigma}(t)}{\sqrt{Q(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t))}}.$$

Debido a que $Q(\tau_Q, \tau_Q) = 1$, la Q-tantrix de un lazo en Σ yace en $\widetilde{\Sigma}$. Además, τ_Q es la proyección radial de la tantrix estándar τ hacia $\widetilde{\Sigma}$. Por lo tanto la Q-tantrix de un lazo oblicuo en Σ está encajada y evita sus puntos antipodales. En contraste con Σ, $\widetilde{\Sigma}$ tiene inherente una estructura Q-Lorentziana. Consideramos los vectores $e^+ := \widetilde{X}_v / \cosh u$ y $e^- := \widetilde{X}_v$. Ellos forman un marco sobre $\widetilde{\Sigma}$ tal que

(2.1) $Q(e^+, e^+) = 1, Q(e^-, e^-) = -1$ y $Q(e^+, e^-) = 0.$

Si proyectamos la derivada covariante estándar de $\mathbb{R}^3$ fuera de la dirección Q-normal, obtenemos una conexión ∇ de libre torsión

$\nabla_X Y := D_X Y - Q(D_X Y, \widetilde{X})\widetilde{X}.$

Mediante cálculo directo obtenemos:

1. $\nabla_{\widetilde{X}_u} e^+ = (-\cos u, -\sin u, 0) + \cosh v \widetilde{X},$
2. $\nabla_{\widetilde{X}v} e^- = (\sinh v)\, e^+,$
3. $\nabla_{\widetilde{X}v} e^+ = (0, 0, 0)$ y

4. $\nabla_{\widetilde{X}_u} e^- = (0,0,0)$.

Sea ω la 1-forma asociada a nuestro marco $\{e^+, e^-\}$ dada por $\omega(Z) := Q(\nabla_Z e^+, e^-)$, para todo $Z \in T\widetilde{\Sigma}$. Entonces, $\omega = -\sinh(v)du$ y $d\omega = \cosh(v)dudv$. Derivando las relaciones 2.1 y usando el Lema 2.1 se tiene

(2.2) $\nabla_Z e^+ = -Q(\nabla_Z e^+, e^-)e^- = -\omega(Z)e^-$

(2.3) $\nabla_Z e^- = Q(\nabla_Z e^-, e^+)e^+ = -\omega(Z)e^+$

Lema 2.2. *Si un lazo α en $\widetilde{\Sigma}$ es la Q-tantrix de un C^2 lazo sobre Σ entonces* $\int_\alpha \omega = 0$.

Demostración. Sea $\alpha = \tau_Q$ la Q-tantrix de un lazo σ inmerso en Σ. Por definición τ_Q es múltiplo de $\dot{\sigma}$; entonces el Lema 2.1 implica que $Q(\tau_Q, \sigma) \equiv 0$ y $\sigma(t)$ es tangente a $\widetilde{\Sigma}$ en $\tau_Q(t)$. Podemos expresar σ con respecto al marco $\{e^+, e^-\}$. Puesto que $Q(\sigma,\sigma) = -1$ y σ es de clase C^2, existe una única función $\theta : S^1 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\sigma(t) = \sinh\theta(t)e^+ + \cosh\theta(t)e^-$$

Diferenciando con respecto a t y usando las relaciones 2.2, 2.3

$$\nabla_{\dot{\tau}_Q}\sigma = (\dot{\theta} - \omega(\dot{\tau}_Q))(\cosh\theta e^+ + \sinh\theta e^-)$$

Como la componente tangencial de τ_Q es nula, tenemos

$$0 = (\sqrt{Q(\dot{\sigma},\dot{\sigma})}\tau_Q)^T = (\dot{\sigma})^T = (D_{\dot{\tau}_Q}\sigma)^T = \nabla_{\dot{\tau}_Q}\sigma.$$

De aquí que $\omega(\dot{\tau}_Q) \equiv \dot{\theta}$ a lo largo de τ_Q y, por lo tanto $\int_{\tau_Q} \omega = 0$.

Con esto se aborda la demostración de nuestro resultado principal.

Teorema 2.3. *Los Hiperboloides de dos hojas no contienen lazos oblicuos de clase C^2.*

Demostración. Cada hoja de un Hiperboloide de dos ramas es afín a el Hiperboloide $\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^3 : Q(X,X) = -1, z > 0\}$. Es suficiente demostrar, pues, que Σ no admite lazos oblicuos de clase C^2. Supongamos que existe un lazo de clase C^2 oblicuo σ en Σ, con Q-trantix τ_Q. Puesto que Σ es difeomorfo a un plano y σ no puede ser una figura del ocho (Lema 1.4), el Teorema de Whitney implica que σ es regularmente homotópico a C_k, donde C_k es una k-círculo horizontal (k vueltas a la misma altura). La Q-tantrix de C_k es un k-círculo horizontal τ_k con $z = 0$ sobre $\widetilde{\Sigma}$, y puesto que Σ tiene curvatura positiva, la homotopía $\sigma \sim C_k$ induce una homotopía regular $\tau_Q \sim \tau_k$ (Lema 1.3). En vista de que σ es oblicuo, τ_Q es un encaje y evita sus puntos antipodales. El encajamiento implica $k = 1$, por lo tanto $-\tau_Q \cup \tau_Q$ acota un dominio $\Omega \subset \widetilde{\Sigma}$ con borde C^1. Del Teorema de Stokes $\int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega$. De nuestra expresión para $d\omega$ y el Lema 2.2 obtenemos $\int_\Omega \cosh(u)dudv = \int_\Omega d\omega = \int_{\partial\Omega} \omega = 0$, lo cual es una contradicción.

2. CONCLUSIONES

B. Solomon y M. Ghomi, además de ampliar la lista de Segre de superficies sin lazos oblicuos, han demostrado recientemente un teorema general para el caso de superficies con punto de curvatura positiva. El caso de superficies de curvatura no positiva sigue siendo un problema abierto.

REFERENCIAS

Ghomi, M. and Solomon. B. (2002). Skew loops and quadric surface. *Comment, Math. Hel.*, *77*, *767-782*.

Segre, B. (1968). Global differential properties of closed twisted curves. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, *38*, *256-263*.

Smales, S. (1958). Regular curves on Riemannian manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, *87*, *492-512*.

Whitney, H. (1937). On regular closed curves in the plane. *Compositio Math*, *4*, *276-284*.

Referencia	Fecha de recepción	Fecha de aprobación
Montaño Carreño, O. A. (2006). Inexistencia de lazos oblicuos en el hiperboloide de dos hojas *Revista Tumbaga*, *1*, *75-80*	Día/mes/año 22/11/2006	Día/mes/año 30/06/2006