Una descripción sencilla de las Teorías Gauge

A brief description of Gauge Theories

Quintero, N; Molina, F.[1]

Resumen. En este trabajo presentamos una breve discusión sobre las teorías gauge basadas en grupos de Lie Abelianos y no-Abelianos. Mostramos la formulación del Modelo Estándar de las partículas elementales, como aplicación de una teoría gauge y nos enfocamos especialmente en los términos cinéticos de los campos gauge asociados a las simetrías .

Palabras y frases claves: Invariancia, simetría, grupos de Lie, teoría gauge, Modelo Estándar.

Abstract. In this work we present a brief discussion about gauge theories based on Abelian and non-Abelian Lie groups. We show the formulation of the Standard Model of the elemental particles, as an application of a gauge theory and focussing in particular on kinematic terms of gauge fields associated with the symmetries.

Key words and phrases: Invariance, symmetry, Lie groups, gauge theory, Standard Model.

1. Introducción

La existencia de simetrías ha jugado un rol muy importante en el desarrollo de la física moderna, desde las simetrías del espacio-tiempo de la relatividad, hasta las simetrías internas e invariancias gauge de la Teoría Cuántica de Campos. Decimos que hay una simetría G cuando un sistema físico se mantiene invariante bajo la transformación dada por G, o equivalentemente cuando la Lagrangiana del sistema es invariante. A veces dicho conjunto G de simetrías independientes de un sistema genera una estructura algebraica de grupo, en tal caso se dice que hay un grupo de simetría.
Como idea central y motivación a este trabajo podríamos preguntarnos si dado cierto Lagrangiano que se mantiene invariante bajo cierta simetría, sería posible determinar la forma de la interacción de una teoría. En otras palabras, ¿podría una simetría también implicar dinámica?. Para obtener Lagrangianos bajo transformaciones locales se utiliza el **principio gauge**, el cual consiste en introducir nuevos campos en el Lagrangiano de tal manera que cancelen los términos que rompen la invariancia de éste. Así, por cada generador del grupo se introduce un campo adicional (campo gauge) el cual

[1]Grupo Quark, Departamento de Física, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia. nquinte@gmail.com, frmolinag2006@gmail.com.

está asociado a las interacciones, es decir, con cada interacción podemos asociar un grupo de simetrías y un conjunto de campos gauge.
En este trabajo se describe de manera breve y explícita la noción de un principio de invariancia gauge y el uso de transformaciones locales asociadas a simetrías internas (grupos de Lie) Abelianas y no-Abelianas, las cuales son de amplio conocimiento en la literatura.[2] El Modelo Estándar de las partículas elementales se presenta como una aplicación que emerge de la relación entre estos dos conceptos. Nuestro interés no corresponde a una presentación exahustiva de las teorías gauge. Tampoco pretendemos que este sea un tratado original, más bien se trata de un material mínimo y sencillo que hace referencia al uso de dichas teorías para facilitar el aprendizaje de estudiantes y neófitos en general. Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en las secciones 2 y 3 presentamos las nociones básicas sobre invariancia gauge Abeliana y no-Abeliana, respectivamente. En la sección 4 se muestra el Modelo Estándar como aplicación a una teoría gauge, y en la sección 5 se presentan algunas conclusiones. Los apéndices A y B contienen, respectivamente, nociones básicas de un grupo de Lie y transformaciones del campo gauge.

2. Invariancia gauge Abeliana

Para comprender los aspectos fundamentales del principio gauge tomemos el Lagrangiano de Dirac para partícula libre de masa m, es decir, un Lagrangiano sin términos de interacción, definido como (Kane, 1993)

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x), \tag{2.1}$$

el cual describe las partículas elementales de espín $1/2$, llamadas fermiones. Donde $\psi(x)$ es una función de onda, llamada espinor de Dirac ($\bar{\psi}(x)$ el espinor adjunto), el cual se representa por una matriz fila de 4 componentes, debido a los requerimientos de la relatividad especial. El término ∂_μ es una extensión cuadridimensional del operador diferencial gradiente y está definido como

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}; \nabla\right), \tag{2.2}$$

y $\gamma^\mu = (\gamma^0; \gamma^j)$ son operadores lineales descritos por matrices 4×4, conocidas como matrices de Dirac, dadas por

$$\gamma^0 = \sigma_3 \otimes 1 \qquad \text{y} \qquad \gamma^j = \gamma^0(\sigma_3 \otimes \sigma_j). \tag{2.3}$$

Dichas expresiones definen un álgebra de Clifford, denominada álgebra de Dirac (Kane, 1993; Bjorken y Drell, 1964). En general, ∂_μ y γ^μ son 4-vectores (vectores

[2]Ver por ejemplo: (Weinberg, 1995; Donoghue, Golowich, y Holstein, 1993; Kane, 1993)

cuadridimensionales) covariantes y contravariantes, respectivamente, del espacio de Lorentz.[3]

Ahora queremos analizar si el Lagrangiano $\mathcal{L}_0$ se mantiene invariante cuando aplicamos una *transformación gauge local* $U(1)$, que sea unitaria, es decir, $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$,

$$\psi(x) \quad \xrightarrow{U(1)} \quad \psi'(x) = \exp\{iQ\theta(x)\}\psi(x), \tag{2.4}$$

donde Q es el generador asociado al grupo Abeliano $U(1)$ (ver Apéndice A) y $\theta \equiv \theta(x)$ es un parámetro que depende de cada punto del espacio-tiempo. En este caso, notamos que el Lagrangiano no se mantiene invariante bajo este tipo de transformación, puesto que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 \quad \xrightarrow{U(1)} \quad \mathcal{L}_0' &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' \\
&= e^{-iQ\theta}\bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)e^{iQ\theta}\psi \\
&= e^{-iQ\theta}\bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu(e^{iQ\theta}\psi) - me^{iQ\theta}\psi] \\
&= e^{-iQ\theta}\bar{\psi}\{i\gamma^\mu[iQe^{iQ\theta} + e^{iQ\theta}(\partial_\mu\theta)] - me^{iQ\theta}\}\psi \\
&= \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - Q\gamma^\mu(\partial_\mu\theta) - m]\psi \\
&= \mathcal{L}_0 - Q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi(\partial_\mu\theta).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Por tanto el **principio gauge** aparece como el requerimiento para asegurar que la invariancia de la fase $U(1)$ se mantenga localmente. Esto es sólo posible si adherimos una pieza extra al Lagrangiano, transformándolo de tal manera que cancelemos el término $(\partial_\mu\theta)$. Por tanto introducimos el campo gauge A_μ, llamado 4-potencial vectorial, que transforma como

$$A_\mu \quad \xrightarrow{U(1)} \quad A_\mu' = A_\mu - \partial_\mu\theta, \tag{2.6}$$

y definimos la derivada covariante a través del acople mínimo

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + iQA_\mu, \tag{2.7}$$

tal que preserve las propiedades físicas bajo una transformación gauge. De otra manera, la derivada no-covariante ∂_μ no preservaría la simetría gauge del Lagrangiano. Por tanto

$$\begin{aligned}
D_\mu\psi \quad \xrightarrow{U(1)} \quad (D_\mu\psi)' &= \exp\{iQ\theta(x)\}D_\mu\psi \\
&= UD_\mu\psi,
\end{aligned} \tag{2.8}$$

[3]El término $\gamma^\mu\partial_\mu$ de la expresión (2.1) esta escrito bajo la convención de Einstein de índices repetidos, la cual se sigue usando a lo largo del trabajo.

asegurando que el Lagrangiano de Dirac

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \\ &= \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iQA_\mu) - m]\psi, \\ &= \bar{\psi}[i\gamma^\mu\partial_\mu - Q\gamma^\mu A_\mu - m]\psi, \\ &= \mathcal{L}_0 - Q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \end{aligned} \tag{2.9}$$

sea invariante bajo una transformación gauge local $U(1)$. Algo interesante por resaltar es que el requerimiento del principio gauge ha generado de manera natural la interacción entre el espinor de Dirac ψ y el campo gauge A_μ.
El tensor de intensidad Abeliana esta definido como (Pich, 2007; Martínez, 2002)

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{2.10}$$

el cual se mantiene invariante bajo la transformación gauge dada por la Ec. (2.6), o sea $F'_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu}$. Así, el término cinético del Lagrangiano para el campo gauge A_μ es

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{2.11}$$

Si consideramos el campo A_μ asociado al fotón y Q como el genarador de carga, la Ec. (2.10) es conocida como el tensor de intensidad electromagnética y junto con la Ec. (2.9) describen completamente la Electrodinámica Cuántica (QED) (Pich, 2007; Novaes, 2000), mediante el Lagrangiano:

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_0 - J^\mu_{EM}A_\mu, \tag{2.12}$$

donde $J^\mu_{EM} = Q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es la 4-corriente electromagnética.

3. Invariancia gauge no-Abeliana

Procediendo análogamente al caso Abeliano queremos imponer que el Lagrangiano de Dirac para partícula libre $\mathcal{L}_0$ sea invariante bajo una *transformación gauge local* G

$$\psi(x) \quad \underset{\rightarrow}{G} \quad \psi'(x) = U\psi(x); \tag{3.1}$$

tal que $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$ y $\det|U| = 1$, y $G = SU(N)$ represente un grupo de Lie no-Abeliano (ver Apéndice A), por tanto

$$\psi(x) \quad \underset{\rightarrow}{G} \quad \psi'(x) = \exp\{iT_a\theta^a(x)\}\psi(x) \quad \text{con} \quad T_a = t_a/2, \tag{3.2}$$

donde $\theta^a \equiv \theta^a(x)$ son parámetros arbitrarios que son funciones de cada punto del espacio-tiempo y t_a $(a = 1, 2, \ldots, N^2 - 1)$ son los generadores de la representación fundamental del grupo de Lie $SU(N)$ que satisfacen la respectiva álgebra de Lie

$$[t_a, t_b] = iC_{abc}\, t_c, \tag{3.3}$$

donde C_{abc} es la constante de estructura del álgebra de Lie (Georgi, 1982; Hamermesh, 1962). Podemos notar que el Lagrangiano no se mantiene invariante bajo este tipo de transformación gauge G, por lo tanto debemos requerir nuevamente del principio gauge para mantener la invariancia. Por tanto introducimos $N^2 - 1$ campos gauge G_μ^a (equivalente al mismo número de generadores del grupo G), que transforman como (ver Apéndice B):

$$G_\mu^a \quad \overset{G}{\rightarrow} \quad (G_\mu^a)' = G_\mu^a - \frac{1}{g}(\partial_\mu \theta^a) + C_{abc}\theta^b G_\mu^c, \tag{3.4}$$

y definimos la derivada covariante

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + igT_a G_\mu^a. \tag{3.5}$$

Por cada generador del grupo se introduce un campo gauge, el cual está asociado a las interacciones, es decir, con cada interacción podemos asociar un grupo de simetrías y un conjunto de campos gauge. La constante g es una constante de acoplamiento y caracteriza la intensidad de la interacción.
El Lagrangiano en función de la derivada covariante D_μ se escribe como

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x), \tag{3.6}$$

el cual es invariante bajo una transformación gauge local G. Una teoría que sea simultáneamente no-Abeliana y localmente invariante es conocida como una teoría de Yang-Mills (Yang y Mills, 1954).
También podemos generalizar el tensor de intensidad para teorías de Yang-Mills

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a - gC_{abc}G_\mu^b G_\nu^c, \tag{3.7}$$

el cual transforma como

$$F_{\mu\nu}^a \quad \overset{G}{\rightarrow} \quad (F_{\mu\nu}^a)' = F_{\mu\nu}^a + C_{abc}\theta^b F_{\mu\nu}^c. \tag{3.8}$$

El término cinético para los campos gauge G_μ^a puede ser escrito como

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \tag{3.9}$$

y así finalmente tenemos que el Lagrangiano invariante bajo $SU(N)$ es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \tag{3.10}$$

que descompuesto en diferentes piezas puede ser visto como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &-\frac{1}{4}(\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a)(\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) + \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \\ &- g\bar{\psi}\gamma^\mu (T_a G_\mu^a)\psi \\ &+ \frac{g}{2}C^{abc}(\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu)G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g^2}{4}C^{abc}C_{ade}G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e.\end{aligned} \tag{3.11}$$

De la anterior ecuación podemos decir que la primera línea contiene el Lagrangiano cinético para los campos gauge y para los fermiones (descritos por los espinores de Dirac $\psi(x)$), respectivamente; la segunda línea contiene los términos de interacción de los bosones gauge y los fermiones; y la tercera línea a diferencia del caso Abeliano presenta una nueva característica para G_μ: los campos gauge tienen autointeracciones triples y cuárticas (Pich, 2007; Novaes, 2000).

4. Aplicación: Modelo Estándar

El Modelo Estándar (ME) de las partículas elementales es una teoría gauge basada en el grupo de simetría $SU(3)\otimes SU(2)\otimes U(1)$, el cual describe las interacciones fuerte, débil y electromagnética, respectivamente, mediante el intercambio de los correspondientes campos gauge: 8 gluones sin masa y un fotón γ sin masa, para la interacción fuerte y electromagnética, respectivamente; y 3 bosones masivos, $W^\pm$ y Z, para la interacción débil. Dicho modelo constituye hasta la fecha uno de los logros mas exitosos en la física moderna. Éste provee un esquema teórico muy elegante, el cual le ha hecho posible describir con alta precisión durante los últimos 30 años resultados experimentales en la física de las partículas elementales.
En esta sección sólo consideraremos los términos cinéticos de los campos gauge asociados al sector electrodébil del ME, [4] es decir, asociados al grupo de simetría $SU(2)\otimes U(1)$. Por tanto consideraremos simultanéamente transformaciones gauge locales Abelianas y no-Abelianas, tal que $\psi(x)$ transforme como

$$\psi(x) \quad \underrightarrow{G} \quad \psi'(x) = U_Y\ U_L\psi(x), \tag{4.1}$$

representando la transformación $G = SU(2)\otimes U(1)$, tal que

$$U_Y = \exp\{iY\beta(x)\} \qquad y \qquad U_L = \exp\left\{i\frac{\sigma^j}{2}\theta^j(x)\right\}, \tag{4.2}$$

donde las fases $\beta \equiv \beta(x)$ y $\theta^j \equiv \theta^j(x)$ son parámetros arbitrarios que son funciones de cada punto del espacio-tiempo. El parámetro Y es llamado hipercarga, y σ_j $(j = 1,2,3)$ son las matrices de Pauli que corresponden a los generadores del grupo Abeliano $U(1)$ y no-Abeliano $SU(2)$, respectivamente. Para que la teoría sea invariante bajo un conjunto de transformaciones locales G, la derivada covariante debe tener la forma

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + ig\frac{\sigma^j}{2}W_\mu^j + ig'YB_\mu,$$

donde g' y g son las constantes de acoplamiento asociadas a los grupos $SU(2)$ y $U(1)$ respectivamente. B_μ es el campo gauge requerido para que la invariancia de la teoría se mantenga bajo la transformación Abeliana $U(1)$, y W_μ^j $(j = 1,2,3)$

[4] El modelo electrodébil fue propuesto por Glashow (1961), Salam (1968), Weinberg (1967) a mediados de los 60's y fue galardonado con el premio Nobel en física en 1979.

son los 3 campos gauge asociados ($W^{\pm}$ y Z) para mantener la invariancia bajo la transformación no-Abeliana $SU(2)$. Así los campos gauge Abelianos y no-Abelianos transforman respectivamente como

$$\begin{aligned} B_\mu \quad \underset{\rightarrow}{G} \quad B'_\mu &= B_\mu - \frac{1}{g'}\partial_\mu \beta, \\ W^j_\mu \quad \underset{\rightarrow}{G} \quad (W^j_\mu)' &= W^j_\mu - \frac{1}{g}(\partial_\mu \theta^j) + \varepsilon_{jkl}\theta^k W^l_\mu, \end{aligned}$$

donde ε_{jkl} es la constante de estructura para el grupo de Lie $SU(2)$. Para construir los términos cinéticos invariantes para los campos gauges, introducimos los correspondientes tensores de intensidad Abeliano y no-Abeliano

$$B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \tag{4.3}$$

$$W^j_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W^j_\nu - \partial_\nu W^j_\mu - g\varepsilon_{jkl}W^k_\mu W^l_\nu. \tag{4.4}$$

Notemos que $B_{\mu\nu}$ se mantiene invariante bajo el grupo de transformaciones G, mientras que $W^j_{\mu\nu}$ transforma covariantemente, es decir,

$$B_{\mu\nu} \quad \underset{\rightarrow}{G} \quad B_{\mu\nu}, \qquad W^j_{\mu\nu} \quad \underset{\rightarrow}{G} \quad U_L W^j_{\mu\nu} U^\dagger_L. \tag{4.5}$$

Por lo tanto, los términos cinéticos para los campos gauge están dados por

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^j_{\mu\nu}W^{\mu\nu}_j. \tag{4.6}$$

Esta expresión para los términos cinéticos de los campos gauge contiene los respectivos Lagrangianos cinéticos que determinan la ecuación de movimiento para los campos B_μ y W^j_μ, y adicionalmente efectos de autointeracciones triples y cuárticas de los campos no-Abelianos W^j_μ, es decir, el término cinético $-W^j_{\mu\nu}W^j_{\mu\nu}/4$ tendrá formas proporcionales a $(\partial W)^2$ correspondiente al propagador, y otros dos términos de la forma $(\partial W - \partial W)WW$ y $WWWW$ correspondientes a los términos de auto-interacción tres y cuatro campos, respectivamente. [5] Como el campo electromagnético tiene una simetría Abeliana, $U(1)$, el fotón no tiene autointeracciones, como si ocurre con los campos gauge no-Abelianos.

5. A modo de conclusión

En este trabajo hemos presentado una breve descripción del uso de transformaciones locales asociadas a simetrías internas Abelianas y no-Abelianas y el principio de invariancia gauge. El Modelo Estándar de las partículas elementales se presenta como una aplicación de ambos conceptos, mostrando, así, al principio de invariancia gauge como una poderosa herramienta para determinar la dinámica de las partículas

[5]Ver (Pich, 2007) y (Martínez, 2002), donde se estudia en detalle los términos de autointeracción y se da cuenta experimental de estos fenómenos dentro del Modelo Estándar.

fundamentales de la materia. También presentamos especial intéres en los términos cinéticos del Lagrangiano asociados a los campos gauge Abelianos y no-Abelianos, concluyendo que el fenómeno de autointeracciones triples y cuárticas de los bosones gauge es generado por la estructura no-Abeliana del grupo $SU(N)$.

Reconocimientos

Los autores agradecen al Comité Central de Investigaciones de la Universidad del Tolima por la financiación del presente trabajo, y al Dr. J. H. Muñoz por sus oportunos comentarios.

A. Grupos de Lie

En física de Partículas, el estudio de los grupos es importante porque estos representan sistemas físicos invariantes bajo transformaciones. Un grupo de Lie es un conjunto G de elementos caracterizados por depender de un parámetro continuo θ que puede tomar un número infinito de valores y que junto con una operación $\circ$ satisfacen:

(1) Si U_1 y U_2 son dos elementos cualesquiera de un grupo G, entonces $U_1 \circ U_2$ pertenece también a G.

(2) Existe un elemento U_0 tal que para cualquier elemento U del grupo se cumple:

$$U \circ U_0 = U_0 \circ U = U. \tag{A.1}$$

(3) Cada elemento U tiene un único inverso U^{-1}, con

$$U \circ U^{-1} = U^{-1} \circ U = U_0. \tag{A.2}$$

(4) La operación $\circ$ es asociativa,

$$(U_1 \circ U_2) \circ U_3 = U_1 \circ (U_2 \circ U_3). \tag{A.3}$$

Si U_1 y U_2 son dos elementos cualesquiera de un grupo G y son tales $U_1 \circ U_2 = U_2 \circ U_1$, decimos que los elementos del grupo conmutan y llamamos Grupo Abeliano a G. Específicamente sea G el grupo unitario unidimensional llamado $U(1)$ que consiste en el conjunto de parámetros continuos[6] de todas las fases de una función de onda, $U(\alpha) = e^{i\alpha}$ donde α es un parámetro escalar real.

$$U(\alpha_1)U(\alpha_2) = e^{i\alpha_1}e^{i\alpha_2} = e^{i\alpha_2}e^{i\alpha_1} = U(\alpha_2)U(\alpha_1). \tag{A.4}$$

Ahora cuando en el grupo los elementos de este no conmutan, decimos que es un Grupo no-Abeliano. Consideremos el grupo de Lie $SU(2)$ como el conjunto de las matrices unitarias 2×2 con determinante igual a 1, tales que cualquiera de sus elementos pueden ser escritos de la forma

$$U(\alpha) = e^{i\alpha\cdot\overrightarrow{\sigma}}, \tag{A.5}$$

[6]Un grupo de transformaciones es continuo si los parámetros son descritos por variables continuas.

donde $\alpha \in \mathbb{R}^3$ es un parámetro arbitrario y $\overrightarrow{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ corresponde a un vector con las matrices de Pauli generadoras del grupo definidas como

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.6}$$

que satisfacen la relación de conmutación

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{jk\ell}\sigma_\ell, \tag{A.7}$$

definen y generan la representación fundamental del álgebra $SU(2)$ y su constante de estructura es equivalente al tensor antisimétrico Levi-Civita ε_{jkl}.
Se puede observar

$$e^{i\alpha\cdot\overrightarrow{\sigma}} = \cos|\alpha| + i\hat{\alpha}\cdot\overrightarrow{\sigma}\sin|\alpha|, \tag{A.8}$$

con $\hat{\alpha} = \alpha/|\alpha|$. Así

$$U(\alpha)U(\beta) \neq U(\beta)U(\alpha), \tag{A.9}$$

puesto que,

$$\begin{aligned} U(\alpha)U(\beta) - U(\beta)U(\alpha) &= e^{i\alpha\cdot\overrightarrow{\sigma}}e^{i\beta\cdot\overrightarrow{\sigma}} - e^{i\beta\cdot\overrightarrow{\sigma}}e^{i\alpha\cdot\overrightarrow{\sigma}} \\ &= \sin|\alpha|\sin|\beta|[(\hat{\beta}\cdot\overrightarrow{\sigma})(\hat{\alpha}\cdot\overrightarrow{\sigma}) - (\hat{\alpha}\cdot\overrightarrow{\sigma})(\hat{\beta}\cdot\overrightarrow{\sigma})] \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

cuando $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Por tanto, $SU(2)$ es un grupo no-Abeliano.
En general cualquier grupo de Lie $SU(N)$ resulta ser no-Abeliano y corresponde a el grupo de matrices unitarias $N \times N$ ($UU^\dagger = U^\dagger U = 1$) con det $U = 1$, tales que cualquiera de sus elementos pueden ser escritos de la forma

$$U = e^{iT_a\theta^a} \qquad \text{con } a = 1, 2, ..., N^2 - 1, \tag{A.10}$$

donde $T_a = t_a/2$, siendo t^a las matrices generadoras de la representación fundamental y cuyas relaciones de conmutación

$$[t_a, t_b] = 2iC_{abc}\, t_c, \tag{A.11}$$

definen el álgebra de $SU(N)$ (Georgi, 1982).

B. Transformacion del campo G_μ

En esta apéndice presentamos nociones generales de la transformación de un campo gauge G_μ.
Consideremos una *transformación gauge local* G, tal que

$$\psi(x) \quad \underset{\rightarrow}{G} \quad \psi'(x) = U\psi(x); \tag{B.1}$$

tal que $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$, y G represente un grupo de Lie (en general Abeliano o no-Abeliano), por tanto

$$\psi(x) \quad \xrightarrow{G} \quad \psi'(x) = \exp\{iT\theta(x)\}\psi(x), \tag{B.2}$$

con T el generador del grupo y $\theta \equiv \theta(x)$ es un parámetro arbitrario que es función de cada punto del espacio-tiempo. Ahora queremos encontrar cómo transforma G_μ. Partiendo de la Ec. (2.8)

$$(D_\mu\psi)' = UD_\mu\psi, \tag{B.3}$$

donde $\psi \equiv \psi(x)$ y la derivada covariante D_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + igG_\mu. \tag{B.4}$$

y G_μ representa el campo gauge que debe ser adherido para mantener la invariancia,

$$\begin{aligned}
(D_\mu\psi)' &= UD_\mu\psi \\
(\partial_\mu + igG'_\mu)U\psi &= U(\partial_\mu + igG_\mu)\psi \\
igG'_\mu U\psi &= -(\partial_\mu U)\psi + ig\,UG_\mu\psi
\end{aligned} \tag{B.5}$$

Puesto que ambos términos de la igualdad anterior actúan sobre un estado arbitrario ψ, podemos omitirlo y multiplicar desde la derecha por $U^\dagger$, tal que

$$igG'_\mu UU^\dagger \quad = \quad -(\partial_\mu U)U^\dagger + ig\,UG_\mu U^\dagger$$

y ya que $UU^\dagger = 1$, finalmente obtenemos

$$\boxed{G_\mu \quad \rightarrow \quad G'_\mu = UG_\mu U^\dagger + \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger.} \tag{B.6}$$

Imponiendo una transformación gauge local $U(1)$ Abeliana $U = \exp\{i\theta(x)\}$, es fácil mostrar a partir de Eq. (B.6) que

$$\begin{aligned}
A_\mu \quad \xrightarrow{U(1)} \quad A'_\mu &= UA_\mu U^\dagger - \frac{1}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger, \\
&= UU^\dagger A_\mu - \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta)UU^\dagger, \\
&= A_\mu - \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta).
\end{aligned} \tag{B.7}$$

puesto que $UU^\dagger = 1$. Para el caso no-Abeliano no están inmediata esta expresión. Imponemos una *transformación gauge local* G que represente un grupo de Lie no-Abeliano $SU(N)$, por tanto

$$U = \exp\{iT_a\theta^a(x)\} \quad \text{con} \quad T_a = t_a/2, \tag{B.8}$$

donde $\theta^a \equiv \theta^a(x)$ son parámetros arbitrarios que son funciones de cada punto del espacio-tiempo y t_a $(a = 1, 2, \ldots, N^2 - 1)$ son los generadores de la representación fundamental del grupo de Lie $SU(N)$. Partiendo de transformaciones infinitesimales

$$U = \exp\{iT_a\theta^a\} \simeq 1 + iT_a\theta^a, \tag{B.9}$$

y debido a la conmutatividad de los generadores del grupo $[t_a, t_b] = iC_{abc}\ t_c$, se puede mostrar que

$$G^a_\mu \quad \underset{\rightarrow}{G} \quad (G^a_\mu)' = G^a_\mu - \frac{1}{g}(\partial_\mu\theta^a) + C_{abc}\theta^b G^c_\mu. \tag{B.10}$$

BIBLIOGRAFÍA

Bjorken, J. D., y Drell, S. D. (1964). *Relativistic quantum mechanics*. New York: McGraw-Hill Book Company.

Donoghue, J. F., Golowich, E., y Holstein, B. R. (1993). *Dynamics of the standard model*. New York: Cambridge University Press.

Georgi, H. (1982). *Lie algebras in particle physics*. New York: Adisson-Wesley.

Glashow, S. L. (1961). Partial symmetries of weak interactions. *Nucl. Phys.*, *22*, 579-588.

Hamermesh, M. (1962). *Group theory and its applications to physical problems*. New York: Dover Publications.

Kane, G. L. (1993). *Modern elementary particle physics*. Perseus Publishing.

Martínez, R. (2002). *Teoría cuántica de campos*. Bogotá (Colombia): Universidad Nacional de Colombia.

Novaes, S. F. (2000). Standard model: An introduction. (Disponible en internet: `http://arxiv.org/PS_cache/hep-ph/pdf/0001/0001283v1.pdf`)

Pich, A. (2007). The standard model of electroweak interactions. (Disponible en internet: `http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0705/0705.4264v1.pdf`)

Salam, A. (1968). Elementary particle theory. En N. Svartholm (Ed.), (p. 367). Stockholm: Almqvist and Wiksell.

Weinberg, S. (1967). A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, *19*, 1264-1266.

Weinberg, S. (1995). *The quantum theory of fields* (Vol. 1). New York: Cambridge University Press.

Yang, C., y Mills, R. L. (1954). Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, *96*, 191-195.

Referencia	Recepción	Aprobación
Quintero, N. y Molina, F. Una descripción sencilla de las teorías de Gauge. Revista *Tumbaga* (2009).	17/04/2009	15/09/2009