



Consideraciones prácticas en la conformación robusta del parámetro de Youla para el diseño algebraico de controladores

PEDRO A. TEPPA G.¹

Universidad Simón Bolívar
pteppa@usb.ve

JOSÉ R. PÉREZ C.²

Universidad Simón Bolívar
perezco@yahoo.com

Recibido: 30/05/2006

Aceptado: 22/10/2007

Resumen

La parametrización de Youla-Kucera es utilizada en la determinación de la familia de controladores que estabiliza internamente un sistema de control. Luego, mediante el empleo de técnicas de conformación del lazo se resuelve el problema de desempeño robusto, en el caso de plantas de fase mínima; y el problema de estabilidad robusta y seguimiento asintótico en el caso de plantas de fase no mínima. La metodología propuesta permite considerar aspectos prácticos del diseño de sistemas de control tales como el seguimiento, el rechazo a perturbaciones, la limitación del esfuerzo de control, la supresión del ruido y la robustez.

Palabras clave: Diseño Algebraico, parametrización de Youla-Kucera, desempeño robusto, estabilidad robusta, conformación del lazo.

¹ PhD Systèmes Automatiques Université Paul Sabatier, Toulouse, Francia. Departamento de Procesos y Sistemas. Pofesor Titular, Universidad Simón Bolívar.

² Coordinación de Ingeniería de Sistemas, Universidad Simón Bolívar. Apdo. Postal 89000, Caracas-1080, Venezuela



Abstract

The Youla-Kucera parameterization is used to find the family of controllers for which a feedback control system is internally stable. Then, by employing loopshaping techniques, the robust performance problem is solved for minimum phase plants and the problem of robust stability with asymptotic tracking for the case of non-minimum phase plants. The proposed methodology allows considering practical aspects in the design of feedback control systems such as tracking, disturbance rejection, input constraints, noise suppression and plant uncertainty.

Key words: Algebraic Design, Youla-Kucera Parameterization, Robust Performance, Robust Stability, Loopshaping.

Introducción

Uno de los aspectos de la teoría moderna de control es el empleo creciente del álgebra (Tannenbaum, 1981; Desoer y Gundes, 1983; Francis y Vidyasagar, 1983; Desoer y Gustafson, 1984; Kucera, 1993; Skelton y Iwasaki, 1995; Loiseau, 2000). El formalismo algebraico ofrece varias herramientas para el diseño de sistemas de control. Una de ellas es la denominada técnica de *factorización*. Su objetivo es la obtención de una parametrización sencilla de todos los controladores que estabilizan una planta dada. Esta factorización es mejor conocida en la literatura especializada como parametrización de Youla o de Youla-Kucera, dado que Youla et al, (1974, 1976) resolvieron el problema de parametrización en el contexto de los sistemas en tiempo continuo y Kucera, (1979, 1993) en el de los sistemas en tiempo discreto.

Ahora bien, el diseño de sistemas de control es una tarea de ingeniería que no debe reducirse exclusivamente a un ejercicio de álgebra. La actividad de diseño involucra varios aspectos adicionales que deben tenerse presentes: ubicación de sensores, restricciones en los actuadores, robustez, etcétera. Debe poseerse cierta intuición sobre qué tipos de objetivos de desempeño son irreales e incluso perjudiciales para el sistema. La teoría algebraica de análisis y síntesis de sistemas de control es un instrumento útil y muy elegante para la parte matemática del diseño del controlador; no



obstante, debe enriquecerse incorporando elementos prácticos asociados al sistema de control. El objetivo de este trabajo es mostrar cómo integrar las consideraciones prácticas con los aspectos algebraicos de la parametrización de Youla-Kucera. Se propone una metodología que permite evaluar contenidos como: seguimiento, rechazo a perturbaciones, supresión del ruido, deficiencias del modelo, limitación de actuadores, entre otros. Partiendo de la parametrización de Youla-Kucera se determinan todos los controladores estabilizantes de una planta dada. Posteriormente, utilizando técnicas de conformación del lazo (Morari y Zafiriou, 1989; Doyle et al, 1990; McFarlane y Glover, 1990; Zhou, 1998; Vinnicombe, 2000), se calcula un valor del parámetro que resuelve el problema de desempeño robusto (Doyle et al, 1990; Zhou, 1998) para plantas lineales de fase mínima y el de estabilidad robusta y seguimiento asintótico (Doyle et al, 1990; Zhou, 1998) para plantas lineales de fase no mínima. El artículo está organizado de la manera siguiente: en la sección 2 se consideran algunas nociones de base tales como lazo de control, lazo bien planteado, estabilidad entrada-salida, estabilidad interna y seguimiento asintótico. La sección 3 discute limitaciones fundamentales dentro del lazo de control. En la sección 4 se trata el diseño algebraico de controladores y, finalmente, la sección 5 estudia en detalle la metodología de diseño propuesta.

1. Nociones de base

El lazo de realimentación de un sistema de control típico se muestra en la figura N° 1. Para el mismo, el problema general de control es: *La salida y deberá seguir una forma preespecificada de la señal de referencia r , aun en la presencia de la perturbación d , el ruido del sensor n y variaciones (incertidumbre) de la planta. También es deseable limitar el tamaño de la señal de control u .* Asumiendo que los componentes del lazo de control son lineales, el mismo puede representarse esquemáticamente como se indica en la figura N° 2.

Con $P = P(s)$, una función de transferencia estrictamente propia, y $C = C(s)$, $F = F(s)$ funciones de transferencia propias donde s es la variable compleja de Laplace (Doyle et al, 1990; Chen, 1990). Estas condiciones

Figura N° 1
LAZO DE CONTROL ELEMENTAL

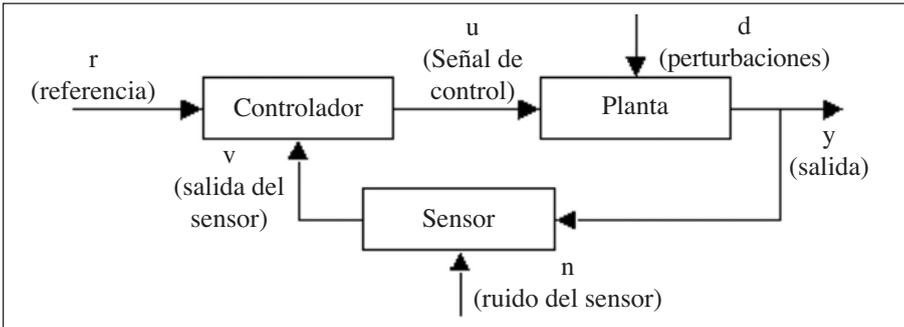
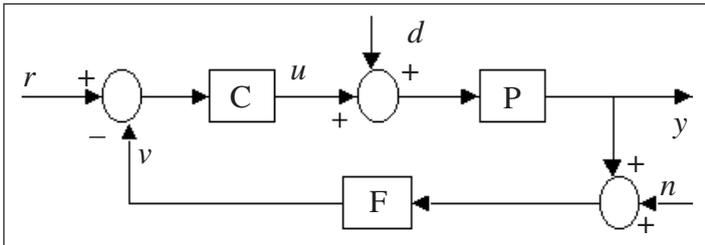


Figura N° 2
LAZO DE CONTROL CON COMPONENTES LINEALES



en las funciones de transferencia de los elementos que componen el lazo, garantizan que el mismo esté bien planteado (Doyle et al, 1990; Zhou, 1998). Este último concepto está asociado a que la interconexión tiene sentido; dicho de otra forma, a que el lazo, a través de todas sus funciones de transferencia, es físicamente realizable. Las relaciones entrada–salida del lazo de control de la figura N° 2 se pueden expresar en forma compacta como

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{CP}{1+CP} & \frac{P}{1+CP} & -\frac{CP}{1+CP} \\ \frac{C}{1+CP} & -\frac{CP}{1+CP} & -\frac{C}{1+CP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix} \quad (1)$$



Por comodidad se ha omitido la dependencia de s y se asume, sin pérdida de generalidad, $F = 1$. En la Ec. (1) son definidas las siguientes funciones de transferencia:

$$S \hat{=} \frac{1}{1 + CP}, \quad (2)$$

$$T \hat{=} \frac{CP}{1 + CP}, \quad (3)$$

$$S_u \hat{=} \frac{C}{1 + CP}. \quad (4)$$

Donde S , T y S_u son las funciones de sensibilidad nominal, sensibilidad complementaria y sensibilidad de control, respectivamente (Doyle et al, 1990; Goodwin et al, 2001). Las mismas están relacionadas algebraicamente mediante las expresiones

$$S + T = 1, \quad (5)$$

$$S_u = CS = \frac{T}{P}. \quad (6)$$

La estabilidad a lazo cerrado del sistema de control de la figura N° 2 se garantiza a través de la estabilidad BIBO (Chen, 1990; Goodwin et al, 2001).

Definición 1: Un sistema S se dice que es BIBO estable si cada entrada acotada produce una salida acotada. Esto es,

$$|u(t)| \leq u_m < \infty \xrightarrow{H} |y(t)| \leq y_m < \infty, \quad \forall t. \quad (7)$$

Sin embargo, para excluir la posibilidad de que exista alguna señal no acotada en cualquier punto del lazo de control, se hace necesaria la estabilidad interna (Doyle et al, 1990; Zhou, 1998).

Definición 2: *El sistema realimentado de la figura 2 es internamente estable si las seis funciones de transferencia de la Ec. (1) son BIBO estables.*

Teorema 1: *El sistema de control realimentado de la figura 2 es internamente estable si y sólo si los ceros del polinomio característico $N_P N_C + M_P M_C$ están en la región del plano complejo $\text{Real}\{s\} < 0$. Donde $P = N_P / M_P$ y $C = N_C / M_C$ son fracciones coprimas.*

Demostración: *Es inmediata a partir de la definición de estabilidad interna y de la Ec. (1).*

En la figura 2, el error de seguimiento se define como $e(t) \hat{=} r(t) - y(t)$. Uno de los objetivos típicos para el desempeño de un sistema de control consiste en mantener el error de estado estacionario e_{ss} , definido mediante

$$e_{ss} \hat{=} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t), \quad (8)$$

dentro de cotas específicas. Si el límite de la Ec. (8) existe, puede aplicarse el teorema del valor final (Chen, 1990) haciendo

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s e(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + L(s)} r(s). \quad (9)$$

Donde $L(s) = C(s)P(s)$ es la función de transferencia a lazo abierto. Considérese que $L(s)$ tiene la forma

$$L(s) = \frac{N_L(s)}{s^l \tilde{M}_L(s)}, \quad (10)$$

con $l \geq 0$ y los polinomios del numerador y el denominador son tales que $\tilde{M}_L(0) \neq N_L(0) \neq 0$. Sea entonces la señal de referencia



$$r(t) = t^{k-1}, t > 0 \Leftrightarrow r(s) = \frac{1}{s^k}, k \geq 1. \quad (11)$$

Definición 3: La planta p de la figura 2 se dice ser de tipo k si $e_{ss} = 0$ para $r(s) = 1/s^k$.

Utilizando la Ec. (9) no es difícil demostrar que el error de estado estacionario será nulo si y sólo si los ceros de la Ec. (2) incluyen todos los polos inestables de $r(s)$. Esto se conoce formalmente como el principio del modelo interno (Morari y Zafiriou, 1989) y su extensión, por ejemplo, al problema de rechazo a perturbaciones es inmediata.

2. Compromisos dentro del lazo

En esta sección se van a estudiar algunos aspectos prácticos que aparecen en los sistemas de control y las interacciones que ocurren entre los mismos. Todo esto obliga a asumir ciertos compromisos dentro del lazo de realimentación. De las ecuaciones (1-4) se tiene

$$y = T(r - n) + PSd, \quad (12)$$

$$u = S_u(r - n) - Td, \quad (13)$$

y de la definición de error de seguimiento

$$e = S(r - Pd) + Tn. \quad (14)$$

Rechazo a perturbaciones y seguimiento

De la Ec. (12) resulta que si se requiere disminuir el efecto de la perturbación d en la salida y es necesario que la función de sensibilidad S sea pequeña en la banda de frecuencias donde d posee su mayor contenido

energético. A su vez, de la Ec. (14) es evidente que para garantizar el seguimiento de señales de referencia r se debe disminuir S en las bandas donde las señales r y d son significativas ($|T(j\omega)| \approx 1$). El rechazo a perturbaciones y el seguimiento imponen una cota inferior en el ancho de banda a lazo cerrado B_{CL} expresada como

$$B_{CL} \geq B_d \cup B_r. \quad (15)$$

Con B_d y B_r las bandas de frecuencia, respectivamente, donde la perturbación y la señal de referencia poseen componentes de energía significativos.

Supresión del ruido

De la Ec. (12) se observa que si se desea disminuir el efecto del ruido n en la salida y , la función de sensibilidad complementaria $|T(j\omega)|$ debe ser pequeña en la región donde $|n(j\omega)|$ es importante. Dado que el ruido del sensor es típicamente un problema de alta frecuencia, este fenómeno impone una cota superior en el ancho de banda a lazo cerrado:

$$B_{CL} \leq B_n. \quad (16)$$

Con B_n la banda de frecuencias donde el ruido del sensor es más influyente.

Limitación de los actuadores

En la práctica, los actuadores poseen límites de saturación en su amplitud. Por tal razón debe evitarse que la señal de control u alcance niveles de magnitud que superen la capacidad de los actuadores. Estos picos en el esfuerzo de control aparecen por cambios rápidos en la señal de referencia, como se aprecia en la Ec. (13) (un cambio rápido en la perturbación es usualmente filtrado por la planta). Dado que $S_u = T/P$, se desprende que si el ancho de banda a lazo cerrado (T) es mucho mayor que el ancho de banda a lazo abierto (P), entonces la función de transferencia de la sen-



sibilidad de control incrementará los componentes de alta frecuencia de la señal de referencia. Por tanto, para evitar la saturación de los actuadores será necesario colocar una cota superior en el ancho de banda a lazo cerrado. Esto es,

$$B_{CL} \leq B_u \quad (17)$$

Con B_u la banda de frecuencias que garantiza el comportamiento adecuado de los actuadores.

Deficiencias del modelo

Los modelos matemáticos generalmente son satisfactorios cuando operan a baja frecuencia, deteriorándose su capacidad con el incremento de la misma. Por tal razón, este fenómeno impone una cota superior en el ancho de banda a lazo cerrado. Más adelante, en la sección 5 se analizará en detalle el tópico de robustez dentro de la metodología de diseño propuesta.

Del análisis efectuado se concluye que los problemas de seguimiento y rechazo a perturbaciones requieren una disminución en S , mientras que la supresión del ruido necesita una disminución en T . Por la relación $S + T = 1$ es imposible alcanzar todos los requerimientos en forma simultánea. No obstante, en la práctica, d, r son señales de baja frecuencia y el ruido del sensor n es una señal de alta frecuencia. Por lo tanto pueden satisfacerse todos los requerimientos manteniendo pequeñas a S en las bajas frecuencias y a T en las altas frecuencias.

3. Diseño algebraico

En esta sección se tratan de manera sucinta los resultados fundamentales asociados a la teoría de parametrización de Youla-Kucera. En el diagrama de la figura N° 2 se supone que la planta P es estable, o equivalentemente pertenece al conjunto

$$RH_\infty = \{\text{Familia de funciones racionales propias y estables}\} \text{ (Zhou, 1998).}$$

Problema 1: Dada $P \in RH_\infty$. Determine C en la figura N° 2 tal que el sistema realimentado sea: (a) internamente estable, y (b) posea algunas propiedades adicionales (seguimiento, robustez, entre otras).

La solución adoptada por Youla et al., (1974, 1976) y Kucera, (1979, 1993) para resolver el problema 1 es la siguiente:

- (i) Parametrizar todos los controladores para los que (a) se cumple.
- (ii) Determinar si existe un valor del parámetro en (i) que verifica (b).

La parametrización de los controladores estabilizantes se enuncia en el Teorema 2.

Teorema 2: Supóngase $P \in RH_\infty$. El sistema de control realimentado de la Fig. 2 es internamente estable si y sólo si el controlador C pertenece a la familia \mathfrak{S}_Q dada por

$$\mathfrak{S}_Q = \left\{ C : C = \frac{Q}{1 - PQ}, Q \in RH_\infty \right\}. \quad (18)$$

Demostración

(\Rightarrow) La estabilidad interna implica la estabilidad BIBO de las seis funciones de transferencia en la Ec. (1). En particular,

$$\frac{r(s)}{u(s)} = \frac{r(s)}{e(s)} \frac{e(s)}{u(s)} = S(s)C(s) = \frac{C(s)}{1 + P(s)C(s)}$$

Haciendo

$$\frac{r(s)}{u(s)} = Q(s)$$

se desprende que Q pertenecerá al conjunto RH_∞ y

$$C = \frac{Q(s)}{1 - P(s)Q(s)}$$



(\Leftarrow) Sustituyendo (18) en (1) resulta:

$$\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PQ & P(1-PQ) & -PQ \\ Q & -PQ & -Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ d \\ n \end{bmatrix}. \quad (19)$$

No es difícil comprobar que para $P, Q \in RH_\infty$, las seis funciones de transferencia en (1) pertenecen a la familia RH_∞ (son funciones afines).

Por otra parte, el paso (ii) del procedimiento enunciado arriba generalmente se resuelve postulando una forma de la función racional Q y luego, a través de la resolución de un conjunto de ecuaciones lineales, se imponen algunas de las condiciones que se consideraron en la sección 2 (Doyle et al, 1990).

4. Conformación robusta del parámetro Q

El objetivo de la metodología de síntesis propuesta en esta sección consiste en la incorporación de aspectos prácticos en el diseño algebraico de controladores. A ese fin, la condición de desempeño robusto que se discutirá en breve, un compromiso entre el desempeño del sistema (seguimiento, rechazo a perturbaciones, limitación de actuadores y supresión del ruido) y la robustez (deficiencias del modelo), se intenta satisfacer a través de técnicas de conformación del lazo determinando una función de transferencia Q , lo que significa que el controlador que se implemente a través de la Ec. (18) también estabilizará internamente el sistema de control. Antes de formular el procedimiento de diseño se estudian algunas nociones de incertidumbre y robustez.

Un modelo matemático no es más que una aproximación del comportamiento del sistema para unas condiciones de operación particulares. Por tal razón debe tenerse presente cómo los errores de modelado pueden afectar de manera adversa el desempeño de un sistema de control. En

ese sentido es fundamental el tema de *incertidumbre* de la planta, la noción de *estabilidad robusta* (estabilidad en el caso de incertidumbre de la planta) y finalmente el tópico de *desempeño robusto* (desempeño en el contexto de incertidumbre de la planta). En la práctica, existen numerosas *incertidumbres* que afectan el sistema físico y por consiguiente su modelo. Tales incertidumbres son ocasionadas, entre otras causas, por un conocimiento imperfecto de los valores numéricos de los parámetros del modelo obtenido, o por las aproximaciones efectuadas en el modelado del proceso. Esto último incluye por ejemplo la no consideración de dinámicas rápidas, de fenómenos no lineales, variantes en el tiempo y/o distribuidos, entre otros. Generalmente se distinguen dos grandes clases de incertidumbre:

- i. *La incertidumbre estructurada*, donde la representación matemática contiene información sobre la manera en que la incertidumbre afecta los elementos del modelo.
- ii. *La incertidumbre no estructurada*, donde no existe información sobre la manera en que la incertidumbre afecta el sistema. Se suele expresar a través de cotas en la respuesta en frecuencia del sistema.

La técnica desarrollada para la conformación robusta del parámetro de Youla emplea incertidumbres no estructuradas. Las formas más comunes de representar este tipo de incertidumbres son la aditiva y la multiplicativa (Doyle et al, 1990; Zhou, 1998). Para el caso de la incertidumbre aditiva se considera una descripción incierta de la planta dada por

$$\tilde{P}(s) = P(s) + \Delta_a(s), \quad (20)$$

donde $\tilde{P}(s)$ representa la planta real, $P(s)$ la planta nominal y $\Delta_a(s)$ la incertidumbre aditiva. Esta última es tal que $|\Delta_a(jw)| \leq |W_a(jw)|$, $\forall w$, con $W_a(s)$ una función cuya magnitud acota la de $\Delta_a(s)$ sobre el eje jw y que debe seleccionarse de manera que

$$\left| \tilde{P}(jw) - P(jw) \right| \leq |W_a(jw)|, \quad \forall w. \quad (21)$$



Tal ecuación representa un círculo en el plano complejo con centro $P(j\omega)$ y radio $|W_a(j\omega)|$, como se ilustra en la figura N° 3. Para la incertidumbre multiplicativa la planta incierta $\tilde{P}(s)$ se expresa mediante

$$\tilde{P}(s) - P(s) = P(s)\Delta_m(s). \tag{22}$$

Donde la incertidumbre multiplicativa $\Delta_m(s)$ verifica la desigualdad $|\Delta_m(j\omega)| \leq |W_m(j\omega)|, \forall \omega$. Gráficamente se representa como indica la figura N° 4.

Figura N° 3
INCERTIDUMBRE ADITIVA

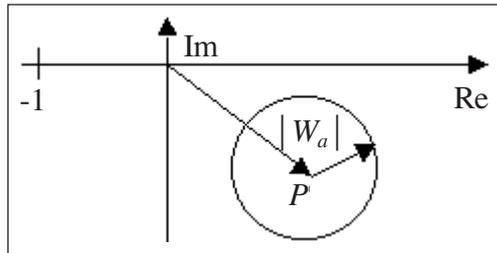
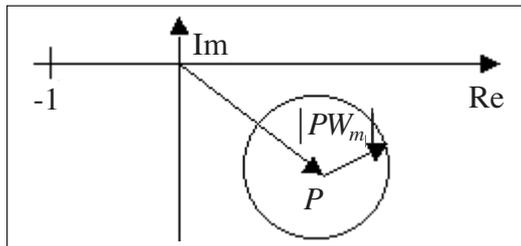


Figura N° 4
INCERTIDUMBRE MULTIPLICATIVA



Con las descripciones aditiva y multiplicativa de la incertidumbre se calcula el mismo error de modelado. Esto es,

$$\tilde{P}(s) = P(s) + \Delta_a(s) = P(s)[1 + \Delta_m(s)] = P(s) + P(s)\Delta_m(s)$$

Sin embargo, la aditiva lo hace en forma absoluta y la multiplicativa en forma relativa

$$\Delta_a = P\Delta_m, \quad (23)$$

$$\Delta_m = \frac{\Delta_a}{P} = \frac{\tilde{P} - P}{P}. \quad (24)$$

Inmediatamente se considera el problema de estabilidad robusta.

Problema 2: Dada la familia de plantas \wp_a caracterizada por la planta nominal $P(s)$ y una cota en la incertidumbre aditiva $W_a(s)$, encontrar condiciones, de forma que el controlador $C(s)$ de la figura 2 estabilice todas las plantas $\tilde{P}(s) \in \wp_a$.

Comentario 1: Como la planta nominal P pertenece a \wp_a , entonces el controlador $C(s)$ deberá estabilizar el sistema realimentado nominal. Esto es una condición necesaria para la estabilidad robusta.

Teorema 3: Supóngase que P se puede estabilizar a lazo cerrado con un controlador C . Entonces todos los modelos de la familia \wp_a son estabilizados a lazo cerrado por el mismo controlador si y sólo si se verifica la relación

$$\|W_a(s)C(s)S(s)\|_{\infty} = \sup_w |W_a(jw)C(jw)S(jw)| \leq 1 \quad (25)$$

con S la función de sensibilidad nominal dada por (2) (sup denota el supremo).



Demostración: Es condición necesaria y suficiente para la estabilidad de la familia \mathcal{P}_a que ningún modelo a lazo cerrado tenga sus polos en el semiplano derecho del plano complejo \mathcal{C}_+ , esto es:

$$\forall s \in \mathcal{C}_+, 1 + C(s)\tilde{P}(s) = 1 + C(s)P(s) + C(s)\Delta_a(s) \neq 0 \quad (26)$$

$$\Leftrightarrow \forall s \in \mathcal{C}_+, 1 + C(s)P(s) \neq C(s)\Delta_a(s) \quad (27)$$

$$\Leftrightarrow \forall s = jw, |1 + C(s)P(s)| \geq |C(s)W_a(s)| \quad (28)$$

$$\Leftrightarrow \forall s = jw, |W_a(s)C(s)S(s)| \leq 1 \quad (29)$$

Comentario 2: No es difícil determinar que la condición de estabilidad robusta en el caso de incertidumbres multiplicativas toma la forma de $\|W_m(s)T(s)\|_\infty \leq 1$ (Doyle et al, 1990; Zhou, 1998).

Además de la estabilidad robusta, también es importante considerar el desempeño a lazo cerrado del sistema de control. El desempeño será definido en términos de la peor cota en la energía del error de seguimiento. A ese fin, se supone que la señal de referencia r pertenece a la familia R definida por el conjunto

$$R = \{r : r(s) = W_r(s)r_o(s), \|r_o(t)\|_2 \leq 1\} \quad (30)$$

donde W_r es un filtro (generalmente pasa bajo) que define la clase de señales admitidas y r_o es una señal sinusoidal de amplitud ≤ 1 .

Recordando que para el sistema de la figura N° 2, el error de seguimiento es $e(t) = r(t) - y(t)$ se deduce que la peor cota en la energía del error de seguimiento (Doyle et al, 1990) (todas las posibles r en R) es

$$\sup_{r \in R} \|e(t)\|_2 = \sup_w |W_r(jw)(1 + P(jw)C(jw))^{-1}| = \left\| W_r(s)(1 + P(s)C(s))^{-1} \right\|_\infty \quad (31)$$

Si se requiere una cota γ en la energía del error, entonces el controlador debe diseñarse de manera que

$$\left\| W_r(s)(1 + P(s)C(s))^{-1} \right\|_{\infty} \leq \gamma, \quad (32)$$

para toda $P \in \mathcal{P}_a$. Esta situación es considerada en el teorema siguiente:

Teorema 4: *Una condición necesaria y suficiente de desempeño robusto es*

$$|W_1(jw)S(jw)| + |W_2(jw)T(jw)| \leq 1, \forall w \quad (33)$$

Con W_1 el filtro de desempeño, W_2 el filtro de robustez y las funciones S, T dadas por las ecuaciones (2) y (3), respectivamente.

Demostración: *Imponiendo la condición de desempeño nominal (32) $\forall P \in \mathcal{P}_a$ resulta*

$$\left| \frac{W_r(jw)}{[1 + (P(jw) + \Delta_a(jw))C(jw)]} \right| \leq \gamma, \forall w$$

Haciendo $W_1 = \gamma^{-1}W_r$ y multiplicando y dividiendo por la función de sensibilidad nominal, la expresión de arriba se transforma en

$$|W_1(jw)S(jw)| \leq |1 + \Delta_a(jw)C(jw)S(jw)|, \forall w. \quad (34)$$

Empleando la desigualdad triangular y una cota en la incertidumbre aditiva, la desigualdad (33) queda

$$1 = |1 - \Delta_a CS + \Delta_a CS| \leq |1 + \Delta_a CS| + |\Delta_a CS| \leq |1 + \Delta_a CS| + |W_a CS|.$$



Es decir,

$$1 - |W_a CS| < |1 + \Delta_a CS|. \tag{35}$$

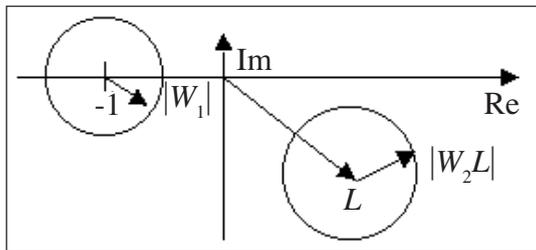
Dado que la magnitud de Δ_a es acotada por W_a y su fase es arbitraria para cada w , el lado derecho de (35) puede hacerse arbitrariamente cercano a (pero es estrictamente mayor que) $1 - |W_a(jw)C(jw)S(jw)|$. Combinando las relaciones (34) y (35) resulta:

$$|W_1 S| \leq 1 - |W_a CS| < |1 + \Delta_a CS|.$$

Por lo que al hacer $W_2 = W_a$ queda establecido el teorema.

La Ec. (33) tiene una interpretación gráfica bastante sencilla (Doyle et al, 1990). Para cada frecuencia w , se construyen en el plano complejo dos círculos. Uno con centro en (-1) y radio $|W_1(jw)|$ y el otro con centro en $L(jw) = P(jw)C(jw)$ y radio $|W_2(jw) L(jw)|$. La condición de desempeño robusto se satisface si los círculos son disjuntos (Figura N° 5).

Figura N° 5
INTERPRETACIÓN GRÁFICA DE LA CONDICIÓN DE DESEMPEÑO ROBUSTO



Conformación robusta de plantas de fase mínima

En lo que sigue se desarrolla una metodología de diseño basada en el empleo de la parametrización de Youla-Kucera y la relación precedente de desempeño robusto. A ese fin se formula el problema siguiente:



Problema 3: Dada una planta $P \in RH_\infty$ de fase mínima con peso de desempeño W_1 y peso de robustez W_2 . Determine un controlador (18) que satisfaga la condición de desempeño robusto (33).

Para resolver el Problema 3, lo primero que se hace es sustituir las expresiones $S = 1 - PQ$ y $T = PQ$ en la Ec. (33), lo que da

$$|W_1(jw) (1 - P(jw)Q(jw))| + |W_2(jw) P(jw)Q(jw)| \leq 1, \forall w. \quad (36)$$

Para satisfacer la Ec. (36) se va a conformar la función racional $Q(s)$ según establece la Tabla N° 1.

Tabla N° 1

CONFORMACIÓN DEL PARÁMETRO Q PARA SATISFACER LA CONDICIÓN DE DESEMPEÑO ROBUSTO (33)

Se hace $Q(jw) \approx P(jw)^{-1}$	cuando $ W_1(jw) $ es grande y $ W_2(jw) $ pequeño.
Se hace $Q(jw) \approx 0$	cuando $ W_1(jw) $ es pequeño y $ W_2(jw) $ grande.

Evidentemente, si $|W_1(jw)|$ y $|W_2(jw)|$ son simultáneamente grandes, será imposible alcanzar el desempeño robusto. En la práctica, W_1 es grande a bajas frecuencias (para garantizar seguimiento y rechazo a perturbaciones) y W_2 es grande en altas frecuencias (para garantizar supresión del ruido y robustez por deficiencias del modelo). Para determinar $Q \in RH_\infty$ se expresa el parámetro Q utilizando la formulación de Goodwin et al., (2001) como

$$Q(s) = F_Q(s)P(s)^{-1}, \quad (37)$$



con $F_Q(s)$ una función de transferencia propia y estable cuyos objetivos son asegurar que el parámetro Q sea propio y establecer un compromiso entre desempeño y robustez. Se escoge como

$$F_Q(s) = \frac{A(s)}{(\tau s + 1)^{n_q}} \quad (38)$$

El polinomio $A(s) = 1 + a_1s + \dots + a_n s^n$ define el tipo de sistema (ver sección 2), esto es, el número de ceros de la función de sensibilidad nominal en el origen y por consiguiente su capacidad de seguimiento o rechazo de señales polinómicas (escalón, rampa, parábola).

Teorema 5: *Considérese el numerador y el denominador de la expresión (38) definidos respectivamente como $A(s) = 1 + a_1s + \dots + a_n s^n$ y $(\tau s + 1)^{n_q} = 1 + b_1s + \dots + b_{n_q} s^{n_q}$ entonces:*

- i. *La función de sensibilidad nominal (2) tendrá un cero en $s = 0$ y por consiguiente el sistema de control de la figura 2 seguirá con error de estado estacionario nulo entradas en la referencia tipo escalón si y sólo si el polinomio $A(s)$ se escoge como $A(s) = 1$ ($a_1 = \dots = a_n = 0$).*
- ii. *La función de sensibilidad nominal (2) tendrá dos ceros en $s = 0$ y por consiguiente el sistema de control de la figura 2 seguirá con error de estado estacionario nulo entradas en la referencia tipo rampa si y sólo si el polinomio $A(s)$ se escoge como $A(s) = 1 + b_1s$.*
- iii. *La función de sensibilidad nominal (2) tendrá tres ceros en $s = 0$ y por consiguiente el sistema de control de la figura 2 seguirá con error de estado estacionario nulo entradas en la referencia tipo parábola si y sólo si el polinomio $A(s)$ se escoge como $A(s) = 1 + b_1s + b_2s^2$.*

Demostración: *Resulta evidente al sustituir (38) en la expresión de función de sensibilidad nominal.*

La función racional Q será propia si se elige n_q en (38) como

$$n_q \geq [\psi(P) + \partial(A)], \quad (39)$$

donde $\psi(P)$ corresponde al grado relativo de P (número de polos – número de ceros) y $\partial(A)$ al grado del polinomio $A(s)$. Utilizando (38) la condición de desempeño robusto (33) puede reescribirse $\forall w$ como

$$|W_1(jw) (1 - F_Q(jw))| + |W_2(jw) F_Q(jw)| \leq 1. \quad (40)$$

Para cumplir con la Ec. (40) el filtro $F_Q(s)$ debe verificar las condiciones de la Tabla N° 2.

Tabla N° 2

CONFORMACIÓN DEL PARÁMETRO Q PARA SATISFACER LA CONDICIÓN DE DESEMPEÑO ROBUSTO (40)

Se hace $F_Q(jw) \approx 1$	Cuando $w \leq w_1$
Se hace $F_Q(jw) \approx 0$	Cuando $w \geq w_2$

Donde W_1 corresponde al ancho de banda del filtro de desempeño W_1 (W_1 filtro pasa bajo) y W_2 al ancho de banda del filtro de robustez W_2^{-1} (W_2 filtro pasa alto). La variable τ en (38) se escoge de forma de establecer un compromiso entre robustez y desempeño, así como para limitar el esfuerzo de la señal de control. Por ejemplo, para tener una solución de compromiso, el polo τ^{-1} se selecciona como

$$\tau^{-1} = \frac{w_1 + w_2}{2}. \quad (41)$$

Al aumentar τ el polo de $F_Q(s)$ se acerca a la frecuencia w_1 disminuyendo el ancho de banda a lazo cerrado. Esto reduce la velocidad de respuesta del sistema de control y puede emplearse como una guía para limitar la amplitud



de la señal de control. Por otra parte, la disminución de τ acerca el polo de $F_Q(s)$ a la frecuencia W_2 , aumentando la velocidad de respuesta pero incrementando también la banda frecuencial donde se pueden presentar efectos adversos por las señales de ruido y deficiencias del modelo.

Ejemplo: Considérese

$$P(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 4}, \quad W_1(s) = \frac{1}{s + 1}, \quad W_2(s) = \frac{s(1 + 0.1s)}{10}.$$

Las frecuencias de corte de los filtros se determinan con facilidad como $w_1 = 1$ rad/s y $w_2 = 10$ rad/s. La sustitución de lo anterior en la Ec. (40) da origen a la condición de diseño

$$\Phi(w) = \sqrt{|\Phi_1(jw)| + |\Phi_2(jw)|} = \left| \frac{(1 - F_Q(jw))}{jw + 1} \right| + \left| \frac{jw(1 + j0.1w)F_Q(jw)}{10} \right| < 1 \quad \forall w \quad (42)$$

Se va a calcular $F_Q(s)$ en (37) de manera de satisfacer (42) y seguir las señales de referencia constantes con un error de estado estacionario nulo. El valor de t en (38) se seleccionará de forma de disminuir el esfuerzo de control sin deteriorar la robustez y los problemas en alta frecuencia originadas por el ruido del sensor. Para que el error de estado estacionario sea cero, el numerador de $F_Q(s)$ se elige como $A(s) = 1$ (Teorema 5). Adicionalmente, empleando (39), la función racional $F_Q(s)$ será propia si se hace $n_q \geq 2$. La Tabla 3 muestra los principales resultados calculados para $\tau = \{0.13 \ 0.18 \ 0.31\}$ y $n_q = 2$. La figura N° 6 ilustra que la condición de desempeño robusto (42) se satisface para los diferentes valores de la variable t , evidenciándose resultados más conservadores para mayores valores de t . Las figuras 7, 8 y 9 presentan las gráficas de las funciones de sensibilidad nominal y sensibilidad complementaria para $\tau = 0.13$,

$\tau = 0.18$, y $\tau = 0.31$, respectivamente. De las mismas se desprende que el rechazo a perturbaciones es satisfactorio en las bajas frecuencias (sección 3). Si la banda frecuencial de las perturbaciones se incrementa, la sensibilidad de control amplificará significativamente la señal de control. El análisis para el problema de seguimiento es similar al efectuado para el caso de rechazo a perturbaciones.

Por otra parte, el decaimiento de la función de sensibilidad complementaria indica que el fenómeno de ruido del sensor no será perjudicial, al igual que fija un límite a los inconvenientes que pueda causar la deficiencia en el modelo. Al disminuir τ , se observa el incremento del ancho de banda a lazo cerrado. Esto se traduce en un aumento en la función de sensibilidad de control y por consiguiente en el riesgo de problemas de saturación de actuadores por picos excesivos en la señal de control.

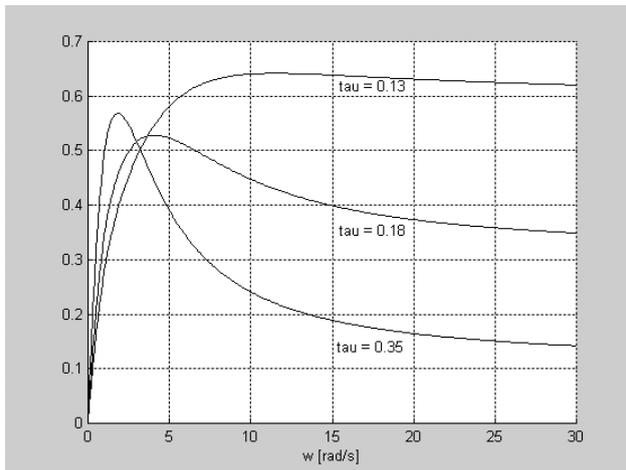
 τ ,**Figura N° 6****CONDICIÓN DE DESEMPEÑO ROBUSTO PARA $\tau = \{0.13 \ 0.18 \ 0.31\}$** 

Tabla N° 3
PRINCIPALES RESULTADOS DEL EJEMPLO NUMÉRICO PARA $\tau = \{0.13 \quad 0.18 \quad 0.31\}$

τ (t ⁻¹)	$Q = S_u$	$S = 1 - F_Q$	$T = F_Q$	$C = P^{-1} F_Q (1 - F_Q)^{-1}$
0.13 (7.75)	$\frac{s^2 + 2s + 4}{0.034s^2 + 0.52s + 2}$	$\frac{s(0.017s + 0.26)}{0.017s^2 + 0.26s + 1}$	$\frac{1}{0.017s^2 + 0.26s + 1}$	$\frac{29.59s^2 + 59.17s + 118.34}{s(s + 15.38)}$
0.18 (5.50)	$\frac{s^2 + 2s + 4}{0.065s^2 + 0.72s + 2}$	$\frac{s(0.032s + 0.36)}{0.032s^2 + 0.36s + 1}$	$\frac{1}{0.032s^2 + 0.36s + 1}$	$\frac{15.43s^2 + 30.86s + 61.73}{s(s + 11.11)}$
0.31 (3.25)	$\frac{s^2 + 2s + 4}{0.019s^2 + 1.24s + 2}$	$\frac{s(0.097s + 0.62)}{0.097s^2 + 0.62s + 1}$	$\frac{1}{0.097s^2 + 0.62s + 1}$	$\frac{5.20s^2 + 10.41s + 20.81}{s(s + 6.22)}$

Figura N° 7
FUNCIONES S Y T PARA $\tau = 0.13$

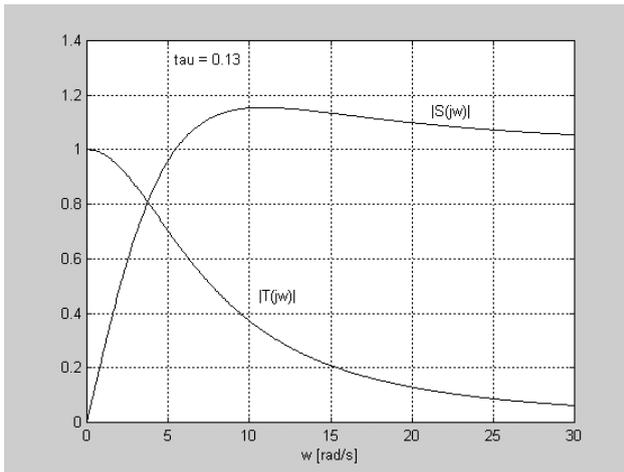


Figura N° 8
FUNCIONES S Y T PARA $\tau = 0.18$

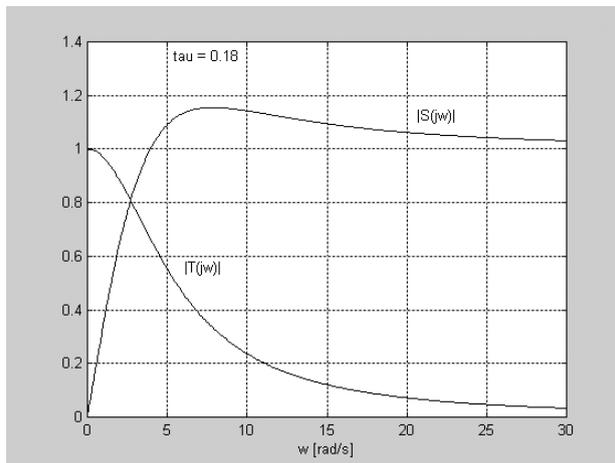




Figura N° 9
FUNCIONES S Y T PARA $\tau = 0.31$

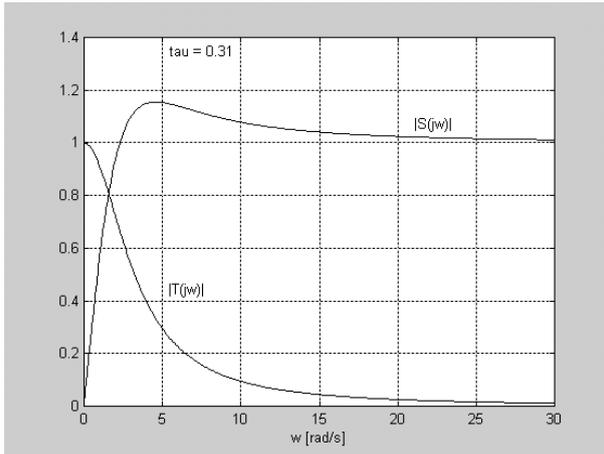
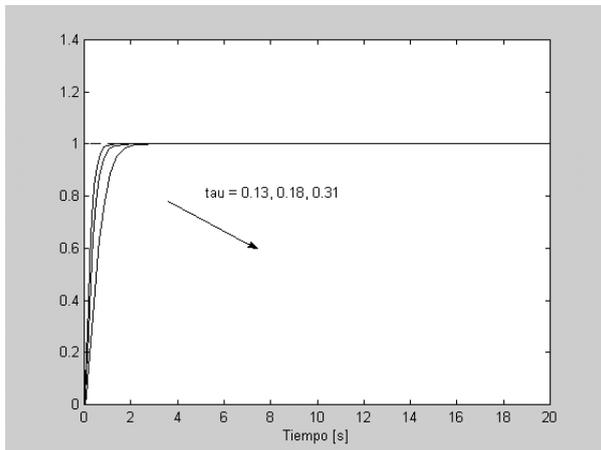


Figura N° 10
RESPUESTA AL ESCALÓN PARA DIFERENTES VALORES DE τ



Las figuras Nos. 10 y 11 suministran la respuesta al escalón y la señal de control, respectivamente. Se hacen evidentes los compromisos entre velocidad de respuesta y esfuerzo de control. El desempeño robusto exige que los círculos de desempeño y robustez no se intersecten en ninguna frecuencia. Esta relación no puede presentarse gráficamente de manera conveniente para todas las frecuencias. Por tal razón, se incluyen las figuras Nos. 12 y 13 donde se muestran los diagramas de Nyquist del sistema nominal (para $\tau = 0.31$) y de un sistema perturbado representado por la planta extrema $P_p(s) = 1/(s^2 + 2s + 2)$ conjuntamente con los círculos de desempeño y robustez para frecuencias $\omega = 0.35$ r/s y $\omega = 4$ r/s, respectivamente ($L = CP$ y $L_p = CP_p$).

Figura N° 11
SEÑAL DE CONTROL CON SUS VALORES MÁXIMOS
PARA DISTINTOS VALORES DE τ

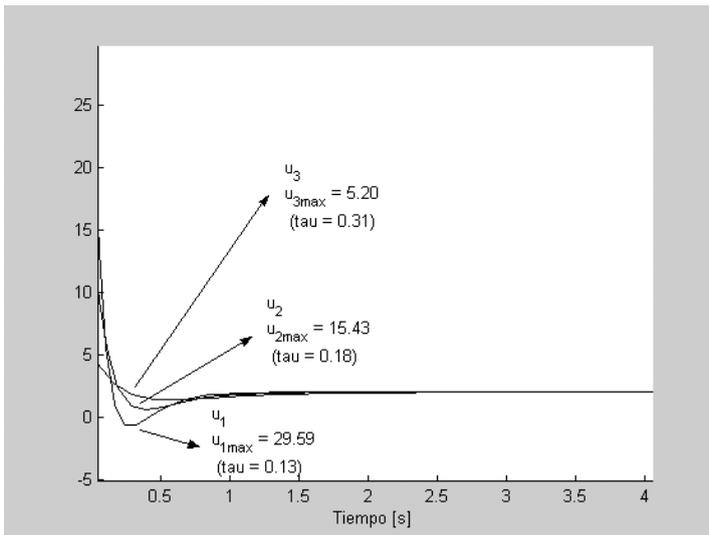




Figura N° 12
DESEMPEÑO ROBUSTO PARA EL SISTEMA NOMINAL
Y UNA PLANTA EXTREMA PARA $w = 0.35$ r/s

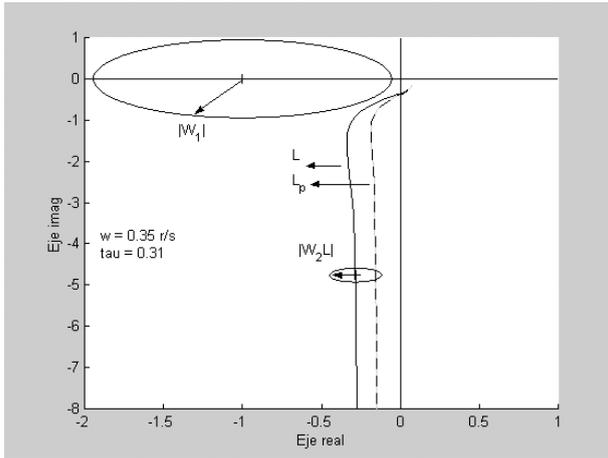
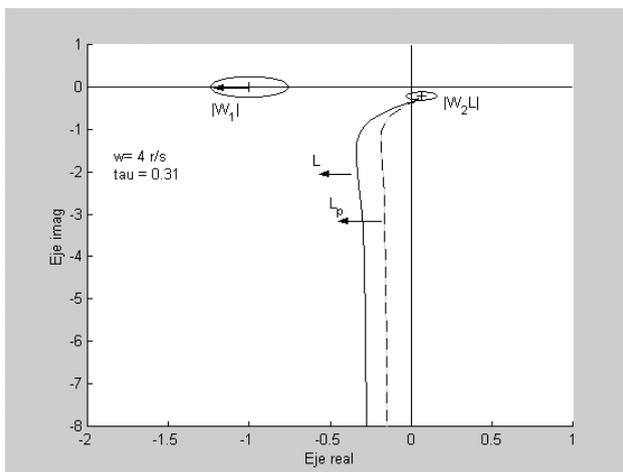


Figura N° 13
DESEMPEÑO ROBUSTO PARA EL SISTEMA NOMINAL
Y UNA PLANTA EXTREMA PARA $w = 4$ r/s



Conformación robusta de plantas de fase no mínima

En lo que sigue se va a tratar el caso de una planta de fase no mínima. Cuando una planta posee ceros en \mathcal{C}_+ o contiene un retardo de transporte, la conformación del parámetro Q debe efectuarse con más atención. Por ejemplo, sea

$$P(s) = e^{-\tau_d s} \frac{s - c}{(s + 1)(s + 3)^3}, \quad \tau_d, c > 0.$$

Para garantizar un desempeño adecuado, el parámetro Q debe invertir el modelo de la planta (Ver Ec. (37)); en este caso se tendría

$$Q(s) = e^{+\tau_d s} \frac{(s + 1)(s + 3)^3}{s - c}.$$

Se presentan tres inconvenientes con esta elección: (i) $Q(s)$ es una función racional impropia. (ii) Existe un término de adelanto en $Q(s)$ y por lo tanto es no causal. (iii) El polo en $c > 0$ hace $Q(s)$ inestable. El primer inconveniente es sencillo de resolver multiplicando $P(s)^{-1}$ por una función racional estrictamente propia, esto es,

$$Q(s) = \tilde{F}_Q(s) P(s)^{-1} = \frac{1}{(\tau s + 1)^{n_q}} P(s)^{-1}, \quad \tau > 0,$$

con $n_q \geq \psi(P^{-1})$. El segundo y tercer inconvenientes se resolverán en el contexto de un problema de *estabilidad robusta con seguimiento asintótico*.

Problema 4: Dada una planta $P \in RH_\infty$ de fase no mínima. Determine un controlador C (18) tal que estabilice robustamente el sistema de control de la figura 2 y suministre un error de estado estacionario nulo para



señales de referencia tipo escalón o señales sinusoidales de frecuencia w_0 r/s.

La condición de estabilidad robusta (Doyle et al., 1990; Zhou, 2001) que debe satisfacer el controlador es

$$\|W_2(s)T(s)\|_\infty \leq 1. \quad (43)$$

A su vez, la condición de seguimiento asintótico exige que la función de lazo $L = CP$ tenga polos en $s = 0$ y en $s = \pm jw_0$ (la función de sensibilidad nominal tendrá ceros en esas frecuencias – Ver sección 2). En esos polos de $L(s)$, la función de sensibilidad complementaria $T = L(1 + L)^{-1}$ tendrá ganancia unitaria. De donde resulta

$$T(s)\Big|_{s=0, \pm jw_0} = 1, \quad (44)$$

lo que a su vez impone en la condición de estabilidad robusta las relaciones

$$|W_2(0)| \leq 1, \quad |W_2(jw_0)| \leq 1. \quad (45)$$

Igualmente se requiere

$$P(0) \neq 0, \quad P(\pm jw_0) \neq 0. \quad (46)$$

Por otra parte, $T(s)$ debe contener el retardo de transporte y los ceros c_1, \dots, c_k localizados en \mathcal{C}_+ ya que $Q(s)$ no puede poseer un término de avance o polos en \mathcal{C}_+ . A ese fin se factoriza $P(s)$ como



$$P(s) = P_1(s)P_2(s) \quad (47)$$

con $P_1(s)$ una función racional para todo y $P_2(s)$ una función racional de fase mínima, tales que

$$P_1(s) = e^{-\tau_d s} \prod_{i=1}^k \frac{c_i - s}{c_i + s}, \quad P_2(s) = \frac{P(s)}{P_1(s)}. \quad (48)$$

Por la parametrización de Youla, la función de sensibilidad complementaria $T(s) = P(s)Q(s)$ se escribe ahora como

$$T(s) = P_1(s)\tilde{T}(s), \quad (49)$$

donde $\tilde{T}(s) = P_2(s)Q(s)$ es una función racional estable cuyo grado relativo satisface

$$\psi(\tilde{T}) \geq \psi(P_2) \quad (50)$$

Ahora, para $\tilde{T}(s) = P_2(s)Q(s)$ deberá cumplirse

a) $\|W_2(s)\tilde{T}(s)\|_{\infty} \leq 1$

b) $\tilde{T}(s)\Big|_{s=0, \pm jw_0} = P_1(s)^{-1}\Big|_{s=0, \pm jw_0}$

Comentario 3: La condición (a) es consecuencia de que $\|P_1\|_{\infty} = 1$.



Finalmente, la síntesis del controlador $C(s)$ se efectúa de la manera siguiente:

i. Determinar la función racional $\tilde{T}(s)$ que cumpla con las condiciones (a) y (b) enunciadas arriba.

ii. Hacer $Q(s) = \frac{\tilde{T}(s)}{P_2(s)}$.

iii. Finalmente $C(s) = \frac{Q(s)}{1 - P(s)Q(s)} = \frac{\tilde{T}(s) P_2(s)}{1 - P_1(s)\tilde{T}(s)}$

Comentario 4: Al aplicar el procedimiento anterior se obtiene una función racional propia y estable $Q(s)$ y el controlador $C(s)$ podría ser inestable. En caso de ocurrir esto último, el sistema de control se dice que no cumple la condición de estabilidad fuerte (Doyle et al, 1990).

Conclusiones

En este trabajo se ha formulado una metodología que permite integrar el diseño algebraico de controladores con aspectos prácticos tales como seguimiento, rechazo a perturbaciones, limitación del esfuerzo de control, supresión del ruido y robustez para plantas estables de fase mínima y de fase no mínima.

La metodología sistematiza el diseño y permite comprender las limitaciones fundamentales que existen en todo lazo de control y, por lo tanto, los compromisos que en algunas oportunidades deben aceptarse.

Actualmente se investiga en la extensión de los resultados al caso de sistemas en tiempo discreto.



Referencias bibliográficas

- CHEN, Ch. (1999). *Linear System Theory and Design*. 3^{ra} ed., Nueva York: Oxford University Press.
- DESOER, C.A. y GUNDES, A. (1982). "Issues in algebraic control theory". *American Control Conference*, 25, 836-841.
- DESOER, C.A. y GUSTAFSON, C.L. (1984). "Algebraic Theory of Linear Multivariable Systems". *IEEE Trans. Auto. Control*, 29, 909-917.
- DOYLE, J.; FRANCIS, B. y TANNENBAUM, A. (1990). *Feedback Control Theory*. Macmillan Publishing Co.
- FRANCIS, B.A. y VIDYASAGAR, M. (1983). "Algebraic and Topological aspects of the Regulator Problem for Lumped Linear Systems". *Automatica*, 19, 87-90.
- GOODWIN, G.; GRAEBE, S. y SALGADO, M. (2001). *Control System Design*. Prentice-Hall, Inc.
- KUCERA, V. (1979). *Discrete Linear Control: The polynomial Equation Approach*. New York: Wiley.
- KUCERA, V. (1993). "Diophantine equations in control theory: A survey". *Automatica*, 29, 1361-1375.
- LOISEAU, J. (2000). "Algebraic tools for the control and stabilization of time-delay systems". *Annual Reviews in Control*, 24, 135-149.
- McFARLANE, D.C. y GLOVER, K. (1990). *Robust Controller Design using Normalized Coprime Factor Plant Descriptions*. Nueva York: Springer-Verlag.
- MORARI, M. y ZAFIRIOU, E. (1989). *Robust Process Control*. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.
- SKELTON, R. e IWASAKI, T. (1995). "Increased Roles of Linear Algebra in Control Education". *IEEE Cont. Syst. Magazine*, Vol 15 (4), 76-90.
- TANNENBAUM, A. (1981). *Invariance and System Theory: Algebraic and Geometric aspects*. Berlin: Springer-Verlag.
- VINNICOMBE, G. (2000). *Uncertainty and feedback: H-Infinity Loop-Shaping and the V-Gap Metric*. London: Imperial College Press.
- YOULA, D.C.; BONGIORNO, J.J. y LU, C. (1974). "Single Loop Feedback Stabilization of Linear Plants". *Automatica*, 10, 159-173.
- YOULA, D.C.; JABR, H.A. y BONGIORNO, J.J. (1976). "Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controllers". *IEEE Trans. on Automatic Control*, 21, 319-338.
- ZHOU, K. (1998), *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall Inc.