Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA. **Rect@**
Volumen 11. Páginas 41 a 54.

ALGUNOS TIPOS DE PREFERENCIAS NO TRANSITIVAS *

CARMEN VÁZQUEZ †
cvazquez@uvigo.es
Universidade de Vigo

Recibido 15/03/2010
Revisado 29/04/2010
Aceptado 27/05/2010

RESUMEN: Este trabajo ofrece una visión sobre la modelación de las relaciones de preferencias del consumidor diferente a la clásica, pues prescindimos de la hipótesis de transitividad. Concretamente, analizamos dos tipos de relaciones de preferencias no transitivas, las acíclicas y las asimétricas, que bajo ciertas condiciones, admiten tipos de representación numérica distintos. Justificamos la aceptación de las mismas mediante ejemplos prácticos y vemos también resultados que garantizan la existencia de representaciones continuas de estas relaciones de preferencias.

Palabras Clave: función de utilidad, relación de preferencias, transitividad

ABSTRACT: In the theory of preferences it is generally assumed that the indifference relation is transitive, this paper provides an overview about nontransitive preference relations. We lead our work to two class of these relations: the acyclic and the asymmetric ones, paying special attention to the possibility of obtain numerical representations which characterizes the maximal elements of the binary relation in terms of the maxima of this function.

Keywords: utility function, preference relation, transitivity

---

*Este trabajo ha sido financiado por el proyecto de investigación ECO2008-03004 del Ministerio de Ciencia e Innovación.
†Dpto. de Matemáticas. Facultade de Económicas. Universidade de Vigo. Rúa Leonardo da Vinci s/n. 36310 Vigo. Pontevedra

1. Introducción

El comportamiento del consumidor se modeliza suponiendo que sus elecciones están basadas en unas preferencias subyacentes sobre unas posibles alternativas. El objetivo del consumidor es entonces la obtención de elementos maximales para su relación de preferencias dentro de su conjunto de elección. Una forma de simplificar el análisis de este problema consiste en asociar números reales a los elementos del conjunto de elección, de tal forma que las comparaciones entre consumos se reducen a comparaciones entre los números reales asociados a ellos. Esta asociación es denominada *representación numérica* de la relación de preferencias. Estas representaciones se dividen en tres tipos: funciones que asocian a cada consumo un número real, funciones que asocian a cada par de consumos un número real y funciones que asignan un número real a cada consumo pero que no caracterizan a la relación aunque son igualmente útiles para resolver el problema de elección.

Cuando hablamos de la relación de preferencias de un agente, habitualmente asumimos que se trata de una relación binaria reflexiva, completa y transitiva que genera clases de equivalencia formadas por consumos indiferentes, llamadas curvas de indiferencia. Sin embargo, se ha puesto de manifiesto que muchas veces la hipótesis de transitividad de la relación es contraria a la experiencia y no siempre la elección del agente es perfectamente discriminable. Tratamos en este artículo relaciones de preferencia no transitivas, axiomatizando y estudiando dos clases de ellas, probando para ambas clases resultados análogos a los existentes en la teoría de la utilidad clásica.

Los primeros trabajos que contemplan esta posibilidad se publican en los años 50. Armstrong (1950) afirma que la no transitividad de la indiferencia debe ser reconocida y explicada, y que la única explicación que parece válida está basada en los errores de discriminación de la mente humana por los cuales las diferencias son reconocidas solamente para magnitudes suficientes. Luce (1956) asume que la utilidad no es, en general, perfectamente discriminable, admite la posible existencia de intransitividades en la indiferencia y, por primera vez, axiomatiza un modelo de relaciones de preferencia no transitivas. En su trabajo podemos encontrar el ejemplo que relatamos a continuación y que ilustra perfectamente esta idea, incluso podemos considerarlo como un experimento. Fijémonos en una persona que prefiere una taza de café con una cucharada de azúcar a otra con cinco cucharadas y preparemosle 401 tazas de café con $(1 + \frac{i}{100})x$ gramos de azúcar, donde x es el peso en gramos de una cucharada de azúcar e i varía desde 0 hasta 400. Es decir, preparamos 401 tazas de café, donde la primera ($i = 0$) tiene una cucharada de azúcar y la última ($i = 400$) tiene cinco, mientras las restantes incrementan gradualmente la cantidad de azúcar entre una y cinco cucharadas. Es evidente que la persona elegida no notará diferencia entre cada taza y la siguiente, es decir, las tazas i e $i + 1$ le serán indiferentes, para todo i; sin embargo esta persona preferirá claramente la primera taza a la última. Este sencillo ejemplo refiere, por tanto, una relación de indiferencia que no es transitiva.

Otro ejemplo típico de una relación de preferencias que no es necesariamente transitiva es la de un colectivo que decide por votación mayoritaria. Concretamente la conocida *paradoja del voto* o *paradoja de Condorcet* nos muestra como las preferencias colectivas pueden presentar ciclos, aunque las preferencias de los votantes individuales no los tengan. Para ello consideremos tres votantes A, B y C que eligen entre tres consumos distintos x, y, z de tal modo que cada uno de ellos manifiesta una relación de preferencias estricta transitiva reflejada como sigue:

relación de preferencias de A:	$x \succ y \succ z$
relación de preferencias de B:	$y \succ z \succ x$
relación de preferencias de C:	$z \succ x \succ y$

Estas preferencias generan, por votación, una nueva relación R que verifica xRy (pues así ocurre para dos de los tres votantes); análogamente se obtiene yRz y zRx. Es decir, se genera por votación una relación de preferencias estricta no transitiva.

Los ejemplos mencionados justifican la posibilidad de no admitir la hipótesis de transitividad como un axioma. Esta necesidad de considerar relaciones de preferencias no transitivas nos emboca a la búsqueda de representaciones numéricas de las mismas por funciones que caracterizan los maximales.

En este trabajo recogemos dos tipos de estas preferencias: preferencias acíclicas y preferencias asimétricas. Para ello seguimos básicamente los trabajos de Peleg (1970), Shafer (1974) y también el de Subiza (1993), que constituye una revisión interesante de resultados de diferentes tipos de representaciones numéricas.

En una primera parte estudiamos la llamada representación débil de una relación de preferencias, que es una relajación del concepto de función de utilidad. Esta relajación obvia la necesidad de que la relación sea transitiva, aunque exige la propiedad de aciclicidad. Este tipo de representación no caracteriza necesariamente los maximales de la relación, lo que nos lleva a estudiar condiciones que aseguren la existencia de una utilidad débil que sí los caracteriza.

En una segunda parte estudiamos un tipo más concreto de relación de preferencias no necesariamente transitivas, las preferencias asimétricas. Estas preferencias pueden ser representadas por formas hemisimétricas que generalizan el concepto de función de utilidad y, al igual que ésta, caracterizan los maximales de la relación. Veremos también resultados que garantizan la existencia de representaciones continuas de este tipo.

2. Preferencias acíclicas: representación débil.

Un resultado clásico sobre representación numérica de relaciones binarias es el estudiado por Debreu (1954), en el que prueba que una relación de preferencias continua definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es representable por una función de utilidad continua. Tal representación es útil porque nos da infomación completa acerca de la relación y porque es más fácil trabajar con una función real que con la propia relación. Estudiamos en esta sección un tipo distinto de representación numérica que no proporciona información completa sobre cuál es la relación, pero que es compatible con relaciones de preferencias no necesariamente transitivas. Este tipo de representaciones, que se denominan débiles, es estudiado entre otros por Peleg (1970), Bridges (1983) y Peris-Subiza (1995).

Definición 1 *Una función $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de utilidad débil, o una representación numérica débil, de una relación de preferencias estricta $\succ$ definida sobre un conjunto de consumos $X \subset \mathbb{R}^n$ si se verifica que*

$$x \succ y \Longrightarrow u(x) > u(y).$$

Destacar que cualquier transformación monótona de una función de utilidad débil es a su vez otra función de utilidad débil. Es decir, si $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de utilidad débil y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente, entonces $(f \circ u)$ es una función de utilidad débil. En efecto, si $x \succ y$, como u es una función de utilidad débil, entonces $u(x) > u(y)$ y a su vez, como f es estrictamente creciente, se cumple que $f(u(x)) > f(u(y))$; por tanto si $x \succ y$ entonces $(f \circ u)(x) > (f \circ u)(y)$.

Definición 2 *Una relación de preferencias estricta $\succ$ definida sobre un conjunto X es acíclica si dados $x_1,\ x_2, \ldots x_n \in X$ se satisface que si $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n$ entonces $x_n \not\succ x_1$.*

De la existencia de una representación débil se obtiene como condición necesaria la aciclicidad de la relación de preferencias. En efecto, la existencia de una función de utilidad débil representando una relación de preferencias $\succ$ implica que la relación no tiene ciclos, pues si $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n$, entonces se cumple que $u(x_1) > u(x_2) > \ldots > u(x_n)$, siendo u una representación débil de $\succ$. Así pues $u(x_1) > u(x_n)$ y por tanto $u(x_n) \not> u(x_1)$, es decir $x_n \not\succ x_1$.

Por otra parte es trivial que si la relación de preferencias es transitiva entonces es acíclica, ya que si $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n$, la transitividad asegura que $x_1 \succ x_n$ y por tanto $x_n \not\succ x_1$; mientras que el recíproco no es cierto en general, como prueba el ejemplo que sigue:

Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la relación de preferencias estricta $\succ$ dada por

$$x \succ y \Longleftrightarrow \begin{cases} \| x \| > \| y \| \\ \| x - y \| > 1 \end{cases}$$

Esta relación es acíclica, puesto que si $x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n$, entonces $\| x_1 \| > \| x_2 \| > \ldots > \| x_n \|$, luego $\| x_1 \| > \| x_n \|$ y por tanto $x_n \not\succ x_1$.

Sin embargo esta relación de preferencias no es transitiva, pues si consideramos $x = (\frac{3}{2}, 0)$, $y = (-\frac{5}{4}, 0)$, $z = (1, 0)$, se cumple que $x \succ y$ puesto que $\| x \| = \left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2} > \frac{5}{4} = \left|-\frac{5}{4}\right| = \| y \|$ y $\| x - y \| = \left|\frac{3}{2} + \frac{5}{4}\right| = \frac{11}{4} > 1$; también se cumple que $y \succ z$ porque $\| y \| = \frac{5}{4} > 1 = \| z \|$ y $\| y - z \| = \left|-\frac{5}{4} - 1\right| = \left|-\frac{9}{4}\right| = \frac{9}{4} > 1$; mientras que sin embargo $x \not\succ z$, porque $\| x - z \| = \left|\frac{3}{2} - 1\right| = \frac{1}{2} < 1$.

Veamos que condiciones garantizan la existencia de una función de utilidad débil. Definimos en primer lugar la clausura transitiva de una relación binaria.

Definición 3 *Dada una relación de preferencias estricta $\succ$ definida sobre un conjunto X, se denomina clausura transitiva de $\succ$ a la relación binaria $\succ\succ$ en X dada por:*

$$x \succ\succ y \Longleftrightarrow \text{ existen } x_1, \ldots, x_n \in X \text{ tales que } x = x_1 \succ \ldots \succ x_n = y$$

La clausura transitiva de una relación de preferencias acíclica es la menor relación transitiva que contiene a la relación de partida. En efecto, la clausura transitiva de una relación acíclica es una relación binaria transitiva pues si $x \succ\succ y$ e $y \succ\succ z$, es decir, si existen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in X$ tales que $x = x_1 \succ \ldots \succ x_n = y = y_1 \succ \ldots \succ y_m = z$ entonces tenemos que $x \succ\succ z$. Además si R es otra relación binaria transitiva en X conteniendo a $\succ$, es decir, $x \succ y$ implica que xRy, entonces R contiene a la clausura transitiva; en efecto, si $x \succ\succ y$, es decir, si existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $x = x_1 \succ x_2 \succ \ldots \succ x_n = y$, entonces $x = x_1 R x_2 R \ldots R x_n = y$, y por la transitividad de R se tiene que xRy.

Además la aciclicidad de una relación binaria $\succ$ se puede caracterizar en términos de su clausura transitiva pues $\succ$ es acíclica si, y sólo si, su clausura transitiva es irreflexiva.

Recordamos algunos conceptos de continuidad de la relación de preferencias que necesitaremos posteriormente.

Definición 4 *Una relación de preferencias $\succ$ definida en X es semicontinua inferiormente si se verifica que el conjunto $\{y \in X : x \succ y\}$ es abierto en X, para todo $x \in X$.*

Se dice que $\succ$ es semicontinua superiormente si el conjunto $\{y \in X : y \succ x\}$ es abierto en X, para todo $x \in X$.

Por tanto, la relación de preferencias es continua si lo es superior e inferiormente.

El primer resultado de existencia de representación débil que estudiamos, podemos verlo en Alcantud (1995) y exige una hipótesis de continuidad que no se refleja necesariamente en la utilidad débil.

Teorema 1 *Sea $\succ$ una relación de preferencias definida en $X \subset \mathbb{R}^n$.*
Si $\succ$ es semicontinua inferiormente, entonces existe una función de utilidad débil $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que la representa.

Demostración. Sea $B = \{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ una familia numerable de subconjuntos abiertos de X verificando que para todo abierto U de X, y para todo $x \in U$, existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_j \subset U$. Tal familia existe pues basta considerar el conjunto $B = \{X \cap B(q, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Q}^n\}$

Denotaremos $x \succ\succ B_k$, cuando $x \succ\succ b$, para todo $b \in B_k$. Definamos la aplicación $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si no existe un } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \succ\succ B_k \\ \sum_{x \succ\succ B_k} 2^{-k} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función u está bien definida, pues la serie $\sum_{x \succ\succ B_k} 2^{-k}$ es convergente, y además es una función de utilidad débil para $\succ$. En efecto, supongamos $y \succ x$; si se verifica $x \succ\succ B_k$, la transitividad de la clausura transitiva implica que $y \succ\succ B_k$, luego $u(y) \geq u(x)$, puesto que en $u(y)$ intervienen al menos los mismos sumandos que en $u(x)$.

Por otra parte, como $x \in \{z \in X : y \succ z\}$ y este es un conjunto abierto, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset \{z \in X : y \succ z\}$. Por lo tanto $y \succ\succ B_n$ porque $y \succ b$, para todo $b \in B_n$ y además, por la aciclicidad de la relación, no puede suceder que $x \succ\succ B_n$ ya que $x \in B_n$. Entonces se verifica $u(y) > u(x)$, pues en $u(y)$ interviene al menos un sumando más que en $u(x)$ (el correspondiente a B_n). $\square$

Este resultado sigue siendo válido si la relación de preferencias es semicontinua superiormente.

Destacar que este tipo de representación débil no proporciona información completa sobre la relación de preferencias, en el sentido de que no caracteriza los maximales de la misma. En efecto, los maximales de u son maximales de $\succ$, puesto que si x^* es un maximal de u, entonces para cualquier $y \in X$ se tiene que $u(y) \leq u(x^*)$, es decir, $u(y) \not> u(x^*)$, lo que implica $y \not\succ x^*$. Sin embargo los maximales de la relación $\succ$ no tienen porqué ser maximales de u, tal como se observa en el siguiente ejemplo:

Sea $\succ$ la relación de preferencias estricta definida en el conjunto $X = [0, 100]$ como $x \succ y \Leftrightarrow x - 1 > y$.

En este caso la función $u(x) = x$ es una función de utilidad débil para la relación, pues si $x \succ y$ entonces $x > x - 1 > y$, es decir $u(x) > u(y)$. Se tiene que trivialmente el único punto que maximiza la función es $x^* = 100$ mientras que los maximales de $\succ$ son $[99, 100]$. En efecto, el conjunto $\{x^* \in [0, 100] : y \not\succ x^*$, para todo $y \in [0, 100]\}$, es decir $\{x^* \in [0, 100] : y - 1 \leq x^*$, para todo $y \in [0, 100]\}$ lo forman los maximales de $\succ$. Como $0 \leq y \leq 100$, entonces $99 \leq x^* \leq 100$, y por tanto el conjunto de elementos maximales es $[99, 100]$.

El mismo trabajo nos ofrece la posibilidad de obtener una función de utilidad débil que sí caracterice los maximales de la relación.

Teorema 2 *Sea $\succ$ una relación de preferencias acíclica definida en $X \subset \mathbb{R}^n$. Si existe una función de utilidad débil que la representa, entonces, para cualquier subconjunto $D \subseteq X$, existe una función de utilidad débil $u_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$x^* \text{ es un maximal de } D \Longleftrightarrow x^* \text{ maximiza } u_D \text{ en } D.$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que existe una función de utilidad débil $u : X \longrightarrow (0, 1)$ que representa a la relación de preferencias $\succ$. Bastaría componer la función $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 1)$, dada por $f(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{\pi}x + \frac{1}{2})$ que es estrictamente creciente. Entonces para cualquier conjunto $D \subseteq X$ podemos definir la función $u_D : D \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$u_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un maximal en D} \\ u(x) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así, u_D es una función de utilidad débil para la relación restringida a D. En efecto, dados $x, y \in D$ tales que $x \succ y$, si x es un maximal entonces $u_D(x) = 1 > u(y) = u_D(y)$; y si x no es un maximal, entonces $u_D(x) = u(x) > u(y) = u_D(y)$. Por tanto si x^* maximiza u_D en D, entonces x^* debe ser un maximal de D, y además cualquier maximal de $\succ$ en D maximiza u_D, ya que si x^* es un maximal de $\succ$ en D, entonces $u_D(x^*) = 1 \geq u(y)$, para todo $y \in D$. □

Como una consecuencia inmediata de los dos últimos teoremas, y considerando $D = X$, obtenemos el resultado que sigue.

Corolario 1 *Sea $\succ$ una relación de preferencias acíclica definida en $X \subset \mathbb{R}^n$. Si $\succ$ es semicontinua inferiormente, entonces existe una función de utilidad débil $u : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que caracteriza los maximales de la relación de preferencias.*

Estudiamos a continuación qué condiciones debe cumplir una relación de preferencias para que podamos obtener una función de utilidad débil continua que la represente. Para ello necesitamos una condición de separabilidad de la relación.

Definición 5 *Se dice que una relación de preferencias $\succ$ definida en un conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ es separable si existe un subconjunto numerable $D \subset X$ tal que para todo par de consumos $x, y \in X$, tales que $x \succ y$ existe $d \in D$ verificando $x \succ d \succ y$.*

Teorema 3 *Sea $\succ$ una relación de preferencias acíclica definida en un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ semicontinua inferiormente y separable. Entonces existe una función de utilidad débil semicontinua superiormente que caracteriza los elementos maximales de la relación de preferencias.*

Demostración. Supongamos que existe una función de utilidad débil u en X. Por el teorema 2 podemos asumir que $u : X \longrightarrow (0, 1)$ caracteriza los elementos maximales de X.

Definamos ahora $v : X \longrightarrow [0, 1]$ como

$$v(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \text{ es un maximal en } X \\ \inf \{u(x) : x \succ\succ y\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces v es una función de utilidad débil en X. Para probar esto observemos dos propiedades

(1) $v(x) \geq u(x)$, para todo $x \in X$.
(2) $u(x) \geq v(y)$, para todo $x \succ y$.

Supongamos pues que $x \succ y$, entonces, como $\succ$ es separable, existe $z \in X$ tal que $x \succ z \succ y$, y por tanto $v(x) \geq u(x) > u(z) \geq v(y)$.

Además trivialmente x^* es un maximal de X si, y sólo si, x^* maximiza v en X. Sólo queda probar que v es continua superiormente en X, es decir, que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $v^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto en X. Sean pues $\alpha \in \mathbb{R}$ e $y \in v^{-1}(-\infty, \alpha)$, es decir $y \in X$ tal que $\alpha > v(y)$. Distinguimos dos casos:

a) Supongamos que y es un maximal. Entonces $v^{-1}(-\infty, \alpha) = X$, ya que $\alpha > v(y) = 1 \geq v(x)$, para todo $x \in X$.

b) Supongamos que y no es un maximal. Entonces si se verificase $v(x) \geq \alpha$ para todo $x \succ y$, llegaríamos a una contradicción. En efecto, $x \succ y$ entonces existe $z \in X$ tal que $x \succ z \succ y$, y entonces se tiene que $u(x) \geq v(z) \geq \alpha$; en consecuencia, si $x \succ\succ y$ entonces $u(x) \geq \alpha$. Así pues, $v(y) = inf\{u(x) : x \succ\succ y\} \geq \alpha$. Luego ha de existir $x \succ y$ tal que $\alpha > v(x) > v(y)$. Entonces, como $\succ$ es semicontinua inferiormente, $V = \{z \in X : x \succ z\}$ es abierto en X y satisface que $y \in V \subset v^{-1}(-\infty, \alpha)$, ya que $x \succ z$ implica que $\alpha > v(x) > v(z)$, es decir $z \in v^{-1}(-\infty, \alpha)$.

$\square$

Análogamente se puede probar que si la relación de preferencias $\succ$ es semicontinua superiormente y separable, entonces existe una función de utilidad débil semicontinua inferiormente en X que caracteriza a los elementos maximales. Ahora bien, las funciones de utilidad débil semicontinua superior e inferiormente obtenidas no son necesariamente las mismas, y por lo tanto, aunque la relación de preferencias $\succ$ sea continua y separable, no se obtiene la existencia de una función de utilidad débil continua que la represente, como muestra el ejemplo que sigue:

Consideremos los siguientes conjuntos:

$A = \{q \in \mathbb{Q} : q \leq 0\} = (-\infty, 0] \cap \mathbb{Q}$

$B = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 1\} = [1, +\infty) \cap \mathbb{Q}$

$A^* = A - \{0\} = (-\infty, 0) \cap \mathbb{Q}$

$C = \{(q, q') : q \in A^*, q' \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\} = ((-\infty, 0) \times (0, 1)) \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$

y, como conjunto de consumo $X = A \cup B \cup C$. *Definamos en* X *la siguiente relación binaria acíclica:*

$q, q' \in A : q' \succ q \iff q' > q$

$q, q' \in B : q' \succ q \iff q' > q$

$(q, q'), (q, q'') \in C : (q, q') \succ (q, q'') \iff q' > q$

$(q, q') \in C (q \in A)$ *entonces* $(q, q') \succ q$, *y* $1 \succ (q, q')$.

Consideremos en X *la clausura transitiva de esta relación* $\succ$. *Resulta que esta relación de preferencias* $\succ\succ$ *es separable y continua (considerando en* X *la topología del orden) y no existe ninguna función de utilidad débil continua para ella como probamos a continuación. En lo que sigue, y por comodidad, denotaremos a la relación* $\succ\succ$ *como* $\succ$.

En primer lugar observemos que es obvio que para cada $x, y \in X$ *tales que* $x \succ y$, *existe* $z \in X$ *tal que* $x \succ z \succ y$. *Como además* X *es numerable (es un subconjunto de* $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$*), se tiene que* $\succ$ *es separable.*

Consideremos en X *la topología inducida por el orden* $\succ$, *es decir,* $U \subset X$ *es abierto en* X *si para cada* $x \in U$ *existe* $q \in X$ *tal que* $x \in \{z \in X : z \succ q\} \subset U$

ó $x \in \{z \in X : q \succ z\} \subset U$. *Es trivial que con esta topología la relación de preferencias definida es continua.*

Reseñar, por otra parte que es falso que $x \succ 0$, *para todo* $x \in B$ *y, además* $x \succ 0$, *para todo* $x \in A^* \cup C$. *Por lo tanto si* U *es un conjunto abierto que contiene a* 0, *ha de existir* $q < 0$ *tal que* $0 \in \{z \in X : z \succ q\} \subset U$, *es decir todo conjunto abierto que contiene a* 0 *debe contener a* B *y debe tener elementos de* A^*.

Supongamos ahora que existe una utilidad débil $u : X \to \mathbb{R}$ *continua respecto a la topología del orden, y llegaremos a un absurdo. Denotemos* $\alpha = u(0)$, *y distingamos tres casos:*

(a) Si se verificase $u(1) > \alpha$, *entonces se tendría que* $0 \in u^{-1}(-\infty, u(1))$, *que es abierto en* X. *Así se concluiría que* $u^{-1}(-\infty, u(1))$ *es un conjunto abierto que contiene a* 0 *y que no contiene a* B *ya que si* $x \in B$, $x \geq 1$ *y entonces* $x \succeq 1$, *es decir* $u(x) \geq u(1)$.

(b) Si se verificase $u(1) < \alpha$ *también llegaremos a una contradicción ya que para todo* $q \in A^*$, $1 \succ (q, \frac{1}{2}) \succ q$, *y por lo tanto,* $u(q) < u(1)$, *entonces tendríamos que* $A^* \cap u^{-1}(u(1), +\infty) = \phi$. *Pero esto no puede suceder ya que* $u^{-1}(u(1), +\infty)$ *es un conjunto abierto que contiene a* 0.

(c) Si se verificase $u(1) = \alpha$, *como* $u(1) < u(\frac{3}{2}) < u(2)$, *se obtiene que* $0 \in u^{-1}(-\infty, u(\frac{3}{2}))$. *Así* $u^{-1}(-\infty, u(\frac{3}{2}))$ *es un conjunto abierto que contiene a* 0.

En resumen, en cualquiera de los tres casos llegamos a una contradicción, que proviene de suponer la existencia de una función de utilidad débil y continua.

3. Preferencias asimétricas: representación hemisimétrica.

Consideramos en esta sección un tipo alternativo de representación numérica que prescinde también de la transitividad aunque incorpora hipótesis de convexidad. Este tipo de representación, presentado por Shafer (1974) requiere relaciones de preferencias estrictas asimétricas.

Definición 6 *Una relación de preferencias estricta* $\succ$ *definida en un subconjunto* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es asimétrica si* $x \succ y$ *implica* $y \not\succ x$

A partir de una relación de preferencias estricta asimétrica $\succ$ podemos definir la relación de indiferencia $\sim$, como

$$x \sim y \text{ si, y sólo si } x \not\succ y \text{ e } y \not\succ x$$

y la relación de preferencia-indiferencia $\succeq$ como $x \succeq y$ si, y sólo si $x \succ y$ ó $x \sim y$.

Esta relación de preferencia-indiferencia asociada a $\succ$ es reflexiva y completa. En efecto, $\succeq$ es reflexiva puesto que $x \sim x$, para todo $x \in X$, como consecuencia de la asimetría. Además $\succeq$ es completa pues dados $x, y \in X$ puede ocurrir que $x \succ y$ ó $x \not\succ y$. En el primer caso se obtiene $x \succeq y$, mientras que en el segundo, si $y \succ x$, entonces $y \succeq x$; y si $y \not\succ x$, como $x \not\succ y$, entonces $x \sim y$.

Comentar que esta relación $\succeq$ así definida no cumple necesariamente la propiedad de transitividad debido a que la relación de indiferencia puede no ser transitiva, como demuestra el ejemplo que sigue:

Consideremos la relación de preferencias estricta $\succ$ *definida sobre el* $\mathbb{R}$ *de la forma* $x \succ y \Longleftrightarrow x - 1 > y$. *Esta relación es claramente asimétrica, pues si* $x \succ y$, *es decir si* $x - 1 > y$ *entonces* $y - 1 < y + 1 < x$, *luego* $y \not\succ x$. *Además la relación de indiferencia asociada no cumple la propiedad de transitividad, pues si consideramos* $x = 3$, $y = 4$ *y* $z = 5$, *como* $3 \not\succ 4$ *y* $4 \not\succ 3$, *entonces* $3 \sim 4$*; análogamente se tiene que* $4 \sim 5$, *pero sin embargo no se cumple que* $3 \sim 5$, *ya que* $5 \succ 3$.

El concepto de asimetría con el que trabajamos ahora es más restringido que el de aciclicidad visto en la sección anterior. Es decir, toda relación de preferencias acíclica es asimétrica de forma trivial, sin embargo el recíproco no es cierto. Por ejemplo la relación de preferencias obtenida en la *paradoja del voto o de Condorcet*, es claramente asimétrica y no es acíclica pues verifica $xRyRz$ y, sin embargo, zRx.

Destacar que si la relación además de ser acíclica, es asimétrica y completa, entonces sí es transitiva. Para probarlo, supongamos que $x \succ y$ e $y \succ z$, y veamos que $x \succ z$. Como $x \succ y \succ z$, entonces por la aciclicidad $z \not\succ x$; además por asimetría $x \neq z$, y por tanto por la propiedad de completitud $x \succ z$.

El tipo de representación numérica que vemos aquí asocia un valor numérico a cada par de elementos del conjunto de consumo y caracteriza, al igual que la función de utilidad para preferencias transitivas, la relación de preferencias. Esta representación discrimina en función del signo de la imagen de un par de consumos si el primero de ellos es más preferido o no que el segundo.

Definición 7 *Se dice que una relación de preferencias asimétrica* $\succ$ *definida sobre un conjunto de consumo* $X \subset \mathbb{R}^n$ *es representable por una forma hemisimétrica* k *si existe una función real* $k : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que:*

a) $k(x, y) = -k(y, x)$

b) $k(x, y) > 0 \Longleftrightarrow x \succ y$, *para todo* $x, y \in X$.

Nótese que, como caso particular, si la relación de preferencias inducida $\succeq$ fuese transitiva y representable por una función de utilidad $u : X \to \mathbb{R}$, podríamos considerar la forma hemisimétrica $k(x, y) = u(x) - u(y)$. Así pues, la representación por formas hemisimétricas parece una buena adaptación de la idea de utilidad.

Es obvio además que si existe una forma hemisimétrica que representa a la relación de preferencias estricta $\succ$, ésta es asimétrica. En efecto, si $x \succ y$ esto implica que $k(x, y) > 0$ y entonces $k(y, x) = -k(x, y) < 0$, luego $y \not\succ x$.

Destacar también que este tipo de representación k caracteriza la relación de preferencias, es decir, dada una función $k : X \times X \to \mathbb{R}$ que verifique $k(x, y) = -k(y, x)$ para todo $x, y \in X$, podemos definir la relación estricta $\succ$ en X, $x \succ y \Leftrightarrow k(x, y) > 0$. Esta relación $\succ$ así definida es asimétrica pues

$$x \succ y \Rightarrow k(x, y) > 0 \Rightarrow k(y, x) < 0 \Rightarrow y \not\succ x$$

y además la función k es una representación hemisimétrica para ella. Por otra parte, esta función k aporta la información necesaria sobre los maximales de la relación de preferencias, pues basta hallar un $x^* \in X$ tal que $k(y, x^*) \leq 0$ para todo $y \in X$.

Es decir

$$x^* \succeq y, \text{ para todo } y \in X \Longleftrightarrow k(y, x^*) \leq 0, \text{ para todo } y \in X.$$

En efecto, si $x^* \succeq y$ para cualquier $y \in X$, entonces se cumple que $k(x^*, y) \geq 0$, y por tanto $-k(y, x^*) \geq 0$, o lo que es lo mismo $k(y, x^*) \leq 0$. Recíprocamente, si se cumple que $k(y, x^*) \leq 0$ para todo $y \in X$, esto implica que $-k(x^*, y) \leq 0$ y, por tanto, $k(x^*, y) \geq 0$, es decir $x^* \succeq y$ para todo $y \in X$.

A diferencia de lo ocurrido con la representación por funciones de utilidad para el caso de las relaciones de preferencias transitivas, cualquier relación asimétrica puede ser representable por una forma hemisimétrica, basta definir

$$k(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \succ y \\ -1 & \text{si } y \succ x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por otra parte, nótese que cualquier transformación de k que conserve el signo y la hemisimetría sigue siendo una representación de este tipo para la relación de preferencias estricta $\succ$. Es decir, si una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ verifica que $f(-x) = -f(x)$, $f(0) = 0$ y $xf(x) > 0$ para todo $x \neq 0$, la composición $f \circ k$: $X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ es también una representación hemisimétrica para la relación de preferencias dada. En efecto, se verifica

$$(f \circ k)(x, y) = f(k(x, y)) = -f(k(y, x)) = -(f \circ k)(y, x),$$

y también

$$(f \circ k)(x, y) > 0 \Leftrightarrow f(k(x, y)) > 0 \Leftrightarrow k(x, y) > 0 \Leftrightarrow x \succ y$$

Así pues sólo se tienen problemas de existencia cuando se desean propiedades adicionales para la forma hemisimétrica, como puede ser la continuidad. El resultado que asegura la existencia de una forma hemisimétrica k continua que representa la relación de preferencias precisa del concepto de convexidad de una relación de preferencias.

Definición 8 *Una relación de preferencias $\succ$ definida sobre un conjunto convexo X se dice estrictamente convexa si dados $x, y, z \in X$ distribuidos dos a dos verificando $y \succeq x$ y $z \succeq x$, se tiene que $ty + (1-t)z \succ x$, para todo $t \in (0, 1)$.*

Se puede probar que si $\succ$ es estrictamente convexa, dados $y_1, \ldots, y_m \in X$, $y_i \succeq x$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $t_i \in (0, 1)$ tales que $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ entonces $\sum_{i=1}^m t_i y_i \succ x$.

Para alcanzar nuestro objetivo necesitamos que el conjunto $\{(x, y) \in X \times X : x \succeq y\}$ sea cerrado, que es consecuencia, como veremos en el lema que sigue, de la continuidad de la relación. Recordemos que, suponiendo transitividad ambos conceptos son equivalentes, sin embargo, prescindiendo de la transitividad hemos de usar la convexidad de la relación, como vemos en los resultados que siguen y que podemos ver en Shafer (1974).

Lema 1 *Sea $\succ$ una relación de preferencias estricta asimétrica, continua y estrictamente convexa definida en un subconjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Entonces el conjunto $R = \{(x,y) \in X \times X : x \succeq y\}$ es cerrado en $X \times X$.*

Demostración. Vamos a probar que el complementario de R, R^c, es abierto en $X \times X$, es decir, dado $(x^*, y^*) \in R^c$ existe un entorno de (x^*, y^*) contenido en R^c.

Dado $(x^*, y^*) \in R^c$, tenemos que $y^* \succ x^*$. Como el conjunto $\{z \in X : z \succ x^*\}$ es abierto en X, podemos elegir un entorno de y^* en X, $N(y^*)$ tal que $N(y^*) \subset \{z \in X : z \succ x^*\}$. En particular, elegimos $N(y^*)$ que sea la cláusura convexa de un conjunto finito de puntos $\{y_1, \ldots, y_m\}$, es decir $N(y^*) = H(y_1, \ldots, y_m) = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i y_i : \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1\}$.

Así, para cada $i = 1, \ldots, m$ tenemos que $y_i \succ x^*$ y, como el conjunto $\{z \in X : y_i \succ z\}$ es abierto, para cada i, existe un entorno $N_i(x^*)$ de x^* tal que $N_i(x^*) \subset \{z \in X : y_i \succ z\}$.

Sea $N(x^*) = \cap_{i=1}^m N_i(x^*)$. Entonces $N(x^*)$ es un entorno de x^*, y para cada $x \in N(x^*)$, tenemos que $x \in N(x^*) \subset N_i(x^*) \subset \{z \in X : y_i \succ z\}$, para todo i; por tanto $y_i \succ x$, para cada i. Por el axioma de convexidad esto implica $H(y_1, \ldots, y_m) = N(y^*) \subset \{z \in X : z \succ x\}$.

Sea $N(x^*, y^*) = N(x^*) \times N(y^*) = \{(x,y) \in X \times X : x \in N(x^*), y \in N(y^*)\}$. Entonces $N(x^*, y^*)$ es un entorno de (x^*, y^*) y $N(x^*, y^*) \subset R^c$. En efecto, dado $(x,y) \in N(x^*, y^*) = N(x^*) \times N(y^*)$ entonces $y \in N(y^*)$ y por tanto $y \succ x$, es decir $(x,y) \in R^c$. □

Análogamente, con las mismas hipótesis, se obtiene que el conjunto $R^{-1} = \{(x,y) : (y,x) \in R\} = \{(x,y) : y \succeq x\}$ es cerrado en $X \times X$.

Teorema 4 *Toda relación de preferencias estricta $\succ$ asimétrica, continua y estrictamente convexa, definida en un conjunto convexo $X \subset \mathbb{R}^n$ es representable mediante una forma hemisimétrica continua.*

Demostración. Sea $\succ$ una relación de preferencias en las condiciones del teorema, denotemos por $I = \{(x,y) \in X \times X : x \sim y\} = R \cap R^{-1}$ y por d la métrica euclidea en $\mathbb{R}^n$. Definamos la función $m(x,y) = d((x,y), I) = \min_{(z,w) \in I} d((x,y),(z,w))$ y definamos k como

$$k(x,y) = \begin{cases} m(x,y) & \text{si } x \succeq y \\ -m(x,y) & \text{si } y \succeq x \end{cases}$$

Es obvio que k es una representación hemisimétrica de $\succ$ y veamos además que es continua. Para ello probaremos que m es continua, para lo que basta comprobar que m es secuencialmente continua.

Sean $(x_o, y_o) \in X \times X$ y $\{(x_n, y_n)\} \subset X \times X$ tal que $\{(x_n, y_n)\} \to (x_o, y_o)$. Hay que demostrar que $\{m(x_n, y_n)\} \to m(x_o, y_o)$, es decir, que para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, $|m(x_n, y_n) - m(x_o, y_o)| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$ dado, como $\{(x_n, y_n)\} \to (x_o, y_o)$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d((x_n, y_n), (x_o, y_o)) < \varepsilon$, si $n \geq N$. Entonces, para todo $(z, w) \in I$, se verifica

$$\begin{aligned} d((x_n, y_n), (z, w)) &\leq d((x_n, y_n), (x_o, y_o)) + d((x_o, y_o), (z, w)) \\ &< d((x_o, y_o), (z, w)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Si denotamos $m_n = m(x_n, y_n) = \min_{(z,w)\in I} d((x_n, y_n), (z, w))$ y $m_o = m(x_o, y_o) = \min_{(z,w)\in I} d((x_o, y_o), (z, w))$, tenemos que

$$m_n < d((x_o, y_o), (z, w)) + \varepsilon, \text{ para todo } (z, w) \in I,$$

es decir, $m_n - \varepsilon < d((x_o, y_o), (z, w))$. Entonces $m_n - \varepsilon < m_o$.

Por otra parte si $n \geq N$, para todo $(z, w) \in I$ se verifica

$$\begin{aligned} d((x_o, y_o), (z, w)) &\leq d((x_o, y_o), (x_n, y_n)) + d((x_n, y_n), (z, w)) \\ &< d((x_n, y_n), (z, w)) + \varepsilon, \end{aligned}$$

entonces análogamente obtenemos que $m_o < m_n + \varepsilon$.

Así k está definida en la unión de dos conjuntos cerrados por dos funciones (m y $-m$) continuas que coinciden en la intersección de sus dominios, luego k es continua. □

Como las propiedades utilizadas en la demostración del teorema anterior son propiedades relativas a la distancia y a la norma euclidea de forma inmediata obtenemos el siguiente corolario fruto de una generalización obvia de dicho teorema.

Corolario 2 *Toda relación de preferencias estricta $\succ$ asimétrica, continua y estrictamente convexa, definida en un conjunto convexo X de un espacio vectorial normado E es representable mediante una forma hemisimétrica continua.*

4. Conclusiones

Llegados a este punto, hemos dado una visión unificada de diferentes modelos de preferencias no transitivas. Percibimos, mediante ejemplos concretos, las dificultades de la obtención de representaciones numéricas que caracterizan a la relación, tanto en el sentido de definir la preferencia como en el de proporcionar los elementos maximales. Este trabajo nos abre la posibilidad de pensar en desarrollar una Teoria del Consumidor paralela a la clásica, de modo los tipos de representaciones estudiadas puedan ser empleadas para obtener propiedades sobre la correspondencia de demanda o para probar resultados de existencia de equilibrio.

Referencias bibliográficas

1. W.E. Armstrong, "A note on the theory of consumer's behavior", *Oxford Economic Papers* **2** (1950) 119–122.
2. R.D. Luce, "Semiorders and a theory of utility discrimination", *Econometrica* **24, 2** (1956) 178–191.

3. B. Peleg, " Utility functions for partially ordered topological spaces", *Econometrica* **38, 1** (1970) 93–96.
4. W.J. Shafer, "The nontransitive consumer", *Econometrica* **42, 5** (1974) 913–919.
5. B. Subiza, "Representaciones numéricas de preferencias: una revisión", *Revista Española de Economía* **10, 2** (1993) 367–386.
6. G. Debreu. "Representation of a preference ordering by a numerical function", en *Mathematical Economics. Twenty papers of Gerard Debreu*. Cambridge University Press, 1954.
7. D.S. Bridges, "Numerical representation of a preference relation on a connected topological space", *Journal of Economic Theory* **30** (1983) 213–217.
8. J.E. Peris, and B. Subiza. "A weak utility funtion for acyclic preferences", *Economics Letters* **48** (1995) 21–24.
9. J.C.R. Alcantud , "Weak utilities from acyclicity". *Mathematics Preprint Series, London School of Economics* **89** (1995) .