

Teoremas en acto y situaciones de Mecánica Cuántica en la Escuela Media



Maria de los Ángeles Fanaro^{1,2}, Maria Rita Otero^{1,2}

¹NIECyT- UNCPBA-Argentina, ²CONICET-Argentina.

E-mail: mfanaro@exa.unicen.edu.ar, rotero@exa.unicen.edu.ar

(Recibido el 6 de Abril de 2009; aceptado el 16 de Mayo de 2009)

Resumen

Este trabajo forma parte de la tesis doctoral "Enseñanza de la Mecánica cuántica en la Escuela Media", en la cual se diseñó e implementó una secuencia de situaciones para enseñar aspectos fundamentales de mecánica cuántica a un grupo de estudiantes del último año de la escuela media. Se adapta el enfoque de Feynman de Múltiples Caminos, y se lo contextualiza como técnica para cálculo de probabilidades, tomando como prototipo de sistema cuántico al electrón libre. En este trabajo se presenta una síntesis de la secuencia, y el análisis de algunos de los teoremas en acto que fueron utilizados por los estudiantes al resolver las cuestiones planteadas. Se analiza en qué medida los teoremas y conceptos en acto de los estudiantes obstaculizaron la conceptualización, o bien fueron el punto de partida para conversar y compartir significados, y se destaca la importancia del estudio didáctico previo a la implementación, anticipando las posibles acciones de los estudiantes. Los resultados muestran cómo algunos teoremas en acto como el de los electrones como pequeñísimas bolillas obstaculiza la conceptualización de sistema cuántico. Por otro lado, evidencia la necesidad de trabajar la idea de modelización con los estudiantes, quienes parecen no aceptarla como una forma de representar la situación que se quiere explicar.

Palabras clave: Teoremas en acto, situaciones, enseñanza, mecánica cuántica.

Abstract

This paper is a part of the doctoral thesis "Teaching quantum mechanics at high school" in which a sequence of situations was designed and implemented to teach fundamental features of quantum mechanics to a group of 12th grade. Feynman Multiple Paths approach was adapted and contextualized as a technique to calculate probabilities, assuming the free electron as the prototypical quantum system. A synthesis of this sequence is presented as well as the analysis of some theorems-in-act that were used by the students to solve the proposed problem situations. Such analysis attempts to assess to what extent the students' theorems and concepts-in-act work as obstacles to conceptualization or as starting points to exchange and share meanings. According to this, students' previous knowledge is stressed as an important variable to be taken into account in a teaching episode. Research findings show that some theorems-in-act such as the one of electrons as very small balls preclude the conceptualization of quantum system. On the other hand, these findings point to the need of working the idea of modelling with the students, since they seem to resist to it as a way of representing the situation to be explained.

Keywords: Theorems-in-act, situations, teaching, quantum mechanics.

PACS: 01.40.ek, 01.40.-d, 01.40.Fk

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Este trabajo forma parte de la tesis "Enseñanza de la Mecánica cuántica en la Escuela Media", cuyos objetivos fueron:

- Reconstruir el saber desde el punto de vista del Investigador, construyendo la Estructura Conceptual de Referencia [1, 2, 3]. Se proponen los saberes relativos a Mecánica Cuántica como son concebidos en la comunidad científica a un grupo de estudiantes de Física del último año de la Escuela Media. Los conceptos clave y sus relaciones se representan en la Figura 1.
- Diseñar un conjunto de Situaciones para enseñar los aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica,

reconstruyendo así la Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar [1, 2, 3]. Se realiza un análisis didáctico -a priori- que se ocupa especialmente de los conceptos, sus relaciones, las situaciones que los definen y la manera de favorecer un contexto propicio para su aprendizaje. Se implementa la secuencia en un curso de Física de treinta alumnos de buen desempeño.

- Analizar la conceptualización desde la Teoría de los Campos Conceptuales de Vergnaud [4]. Se busca describir y comprender como funciona el conocimiento para el alumno, infiriendo cómo se afectan sus representaciones internas y como inciden aspectos emocionales. Se analizaron los teoremas en acto de los estudiantes relativos a las situaciones y algunos aspectos afectivos en relación a: las características particulares de los sistemas cuánticos,

la forma de trabajo durante las clases, y el uso de software de simulación como parte de las situaciones propuestas.

Se presentan los resultados correspondientes al análisis de la conceptualización, identificando algunos teoremas y conceptos en acto que utilizaron los estudiantes para abordar cada una de las situaciones propuestas. Indirectamente, el análisis de la conceptualización permite

evaluar la viabilidad de la propuesta porque indica cómo los estudiantes reconocieron los conceptos, sus propiedades relaciones y transformaciones. A su vez, esto también señala en qué medida los estudiantes pudieron extraer y seleccionar la información -para ellos- pertinente, e inferir las consecuencias útiles para la acción esperada.

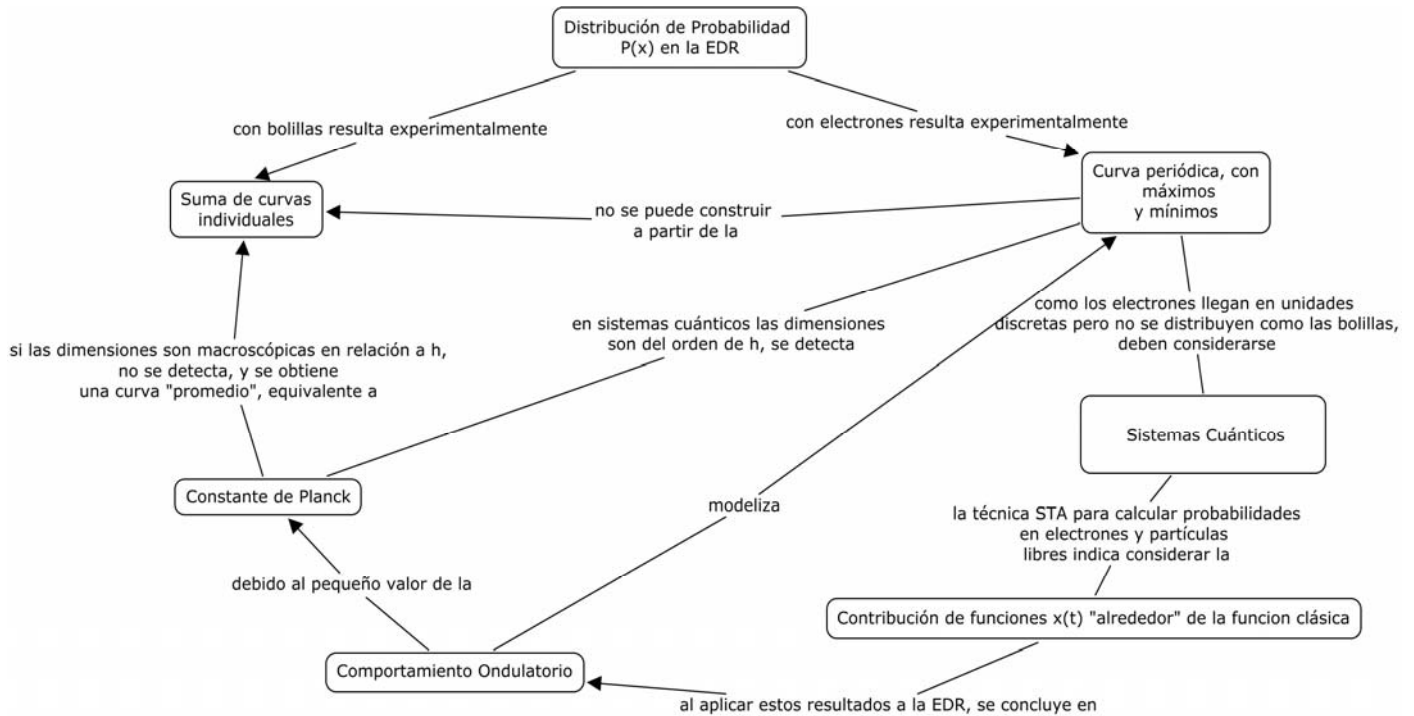


FIGURA 1. Conceptos clave y sus relaciones, propuestos para enseñar.

II. MARCO TEÓRICO

La conceptualización se analiza a partir la teoría de los Campos conceptuales de Vergnaud, reconocida por considerar a los conceptos como la piedra angular del desarrollo cognitivo [5]. Partiendo de la noción de esquema de Piaget, Vergnaud reformula y amplía esta idea, proponiendo una relación directa entre esquema y situación y considerando que:

1- *El esquema es la organización invariante de la actividad y de la conducta para un cierto tipo de situaciones.*

2- *Los esquemas son una totalidad dinámica funcional compuesta por: metas, reglas de acción, invariantes operatorios e inferencias.*

De la primera definición, surge que el esquema:

- Es un universal eficiente para toda una gama de situaciones y puede generar diferentes secuencias de acción dependiendo de las características de cada situación particular. Así es posible distinguir esquemas perceptivos-gestuales, como el de contar objetos, o de hacer un gráfico o un dibujo. También hay esquemas relacionados a lo verbal (por ejemplo para hacer un discurso para dirigirse a

una persona o a un grupo), y esquemas relativos al comportamiento social [5].

- No es un estereotipo, sino por el contrario, permite adaptar la acción y la conducta a los valores que tomen las variables de la situación. La conducta puede variar pero es su organización lo que se conserva en un esquema [6]

- Se refiere a un tipo de situaciones, que puede ser muy restringido o muy amplio. A lo largo del desarrollo cognitivo, un esquema primero tiene un alcance local que se irá ampliando. Ya que se refiere a un tipo de situaciones, aunque pequeña, el esquema es universal en el sentido que es posible formalizarlo con reglas y conceptos que contienen cuantificadores universales. [6]

Entonces, el análisis de los esquemas pasa inevitablemente por el análisis de las conductas, aunque el esquema no es una conducta, sino un constituyente de la representación cuya función consiste en generar la acción y la conducta en situación.

Los esquemas necesariamente se refieren a situaciones, y Vergnaud enfatiza sobre la interacción esquema-situación, en lugar de sujeto-objeto como proponía Piaget. De ahí que se considere que el desarrollo cognitivo consiste sobre todo y principalmente en el desarrollo de un vasto repertorio de esquemas. En este sentido, *la educación debe contribuir a que el sujeto desarrolle un repertorio amplio y diversificado de esquemas procurando evitar que estos se conviertan en estereotipos esclerotizados* [5].

Vergnaud distingue dos tipos de situaciones, para las cuales el concepto de “esquema” funciona de forma distinta:

- Clases de situaciones para las cuales en un momento dado de su desarrollo y bajo ciertas circunstancias, el sujeto dispone en su repertorio las competencias necesarias para el tratamiento relativamente inmediato de la situación. En este caso se va a observar para una misma clase de situaciones, conductas muy automatizadas, organizadas por un esquema único.

- Clases de situaciones para las cuales el sujeto no dispone de todas las competencias necesarias, lo que le obliga a un tiempo de reflexión y de exploración, de dudas, tentativas fallidas, y le conduce eventualmente al éxito, o al fracaso. Por lo tanto, lo que se va a observar es la utilización tentativa y sucesiva de varios esquemas, que pueden entrar en competición y que, para llegar a la solución buscada, deben ser acomodados, separados y re combinados; este proceso se acompaña necesariamente de descubrimientos.

Aunque se acepte que el esquema es una totalidad dinámica funcional, si se quiere comprender cómo un esquema puede ser eficaz o no, se deben analizar los componentes del esquema:

A. Las metas

Se refieren a la intención, el deseo, la motivación, la expectativa. Aunque la representación está compuesta por formas de organización de la acción, y no sólo de imágenes, palabras y conceptos, es esencial integrar objetivo, intención y deseo en el propio concepto de esquema.

De la misma manera que los esquemas se organizan jerárquicamente, el objetivo se divide en sub-objetivos y anticipaciones. Para la organización secuencial y simultánea de la acción, la toma de información y del control, se necesitan considerar las reglas de acción.

B. Las reglas de acción, recolección de información y control

Las reglas no sólo generan la acción, sino la actividad entera, tanto la toma de información y controles como las propias acciones materiales. Asimismo, las reglas no sólo generan la conducta observable, sino toda la actividad no directamente observable, como las inferencias y la búsqueda en la memoria. El concepto de invariante es el que permite ir más allá en el análisis, precisamente porque introduce la cuestión de conceptualización.

C. Los invariantes operatorios: conceptos en acto y teoremas en acto

Los invariantes operatorios constituyen la parte epistémica del esquema: la base conceptual implícita o explícita. Su función consiste en identificar y reconocer objetos, sus propiedades, relaciones y transformaciones. La función principal es extraer y seleccionar la información pertinente e inferir las consecuencias útiles para la acción, el control y la toma de información subsiguiente. Se trata entonces de la función de conceptualización e inferencia.

Por definición, un teorema en acto es una proposición considerada verdadera en la actividad. El estudio del desarrollo de competencias a lo largo del aprendizaje o a lo largo de la experiencia, muestra que un mismo concepto puede, según el estado de su elaboración, ser asociado a teoremas más o menos numerosos, más o menos ricos, e incluso eventualmente falsos. La serie de teoremas en acto susceptible de ser asociada al mismo concepto es generalmente muy grande, particularmente en las disciplinas científicas y técnicas. De manera que para Vergnaud, declarar que tal sujeto ha entendido el concepto, a menudo no tiene sentido. Haría falta precisar qué teoremas en acto se pueden utilizar en tal o cual situación.

La relación entre teoremas y conceptos es naturalmente dialéctica, en el sentido que no hay teorema sin concepto y no hay concepto sin teorema. Metafóricamente, Vergnaud ([6], p. 5) expresa *que los conceptos-en-acción son los ladrillos con los se fabrican los teoremas-en-acción, y que la única razón de existencia de los conceptos-en-acción es precisamente permitir la formación de teoremas-en-acción (proposiciones consideradas verdaderas), a partir de los que se hace posible la organización de la actividad y las inferencias*. De manera recíproca, los teoremas son constitutivos de los conceptos puesto que, sin proposiciones consideradas verdaderas, los conceptos no tendrían sentido. Sin embargo es importante reconocer que un concepto en acto siempre está constituido de varios teoremas en acto, cuya formación se puede escalonar sobre un largo período de tiempo a lo largo de la experiencia y del desarrollo.

D. Las inferencias

Este último componente del esquema es indispensable porque la actividad en situación nunca es automática, sino que, al contrario, está regulada por las adaptaciones locales, los controles, los ajustes progresivos. *Las inferencias están presentes en todas las acciones, porque una acción no puede ser provocada por una situación y luego desarrollarse de manera totalmente automática, es decir sin control y sin nueva búsqueda de información. Es posible en teoría, pero las observaciones muestran que sólo puede concernir a segmentos de actividad muy pequeños, cuya funcionalidad no viene de ellos solos sino de los esquemas de los que son parte integrante*. (Ibíd.)

Las inferencias son operaciones que permiten pasar de una operación tenida como verdadera otra, a la que es razonable considerar verdadera. *Una inferencia es mucho más que una asociación: el cálculo asociativo no permite*

por si sólo dar cuenta del funcionamiento del pensamiento. (Ibíd.). Los conceptos en acto, tienen la estructura lógica de una función proposicional y no son susceptibles de verdad o falsedad, puesto que contienen variables libres. Sólo las proposiciones pueden ser verdaderas o falsas. Por lo tanto, las proposiciones tienen que formar parte del sistema de conocimientos evocados o evocables en situación, de manera que el sujeto comprometa en ello su actividad y sus razonamientos, aunque éstos sean implícitos.

En general las inferencias y las reglas casi siempre son implícitas, e incluso a menudo inconscientes. Las reglas de acción, de búsqueda de información y de control son la traducción pragmática de los teoremas-en-acción: traducen principalmente el hecho de que las variables de situación pueden, en general, tomar distintos valores, y que los sujetos están preparados para adaptarse a estos distintos valores.

Para Vergnaud, los cuatro componentes del esquema (metas, reglas de acción, invariantes operatorios e inferencias) en conjunto permiten comprender la estructura de la actividad. También permiten comprender la doble naturaleza de la acción: ser sistemática y a la vez contingente:

-sistemática porque, en muchas situaciones, la acción está sujeta a reglas unívocas. Es el caso, entre otros, de los algoritmos en matemáticas (las cuatro operaciones de la aritmética, la solución de algunas categorías de ecuaciones, etc.), y para los procesos impuestos a los operadores en ciertos puestos de trabajo (por ejemplo el pilotaje de aviones, etc.).

-contingente porque las reglas generan actividades y conductas diferentes según las situaciones en que se presentan. Esta contingencia de la acción es aún más notable para las situaciones nuevas, cuando el sujeto no dispone de esquemas en su repertorio, y debe improvisar para enfrentarlo. La contingencia se convierte en oportunismo, y el sujeto busca una solución en todos sus recursos cognitivos, es decir en los esquemas anteriormente formados, susceptibles de abrir un camino hacia la búsqueda la solución.

En la adaptación a nuevas situaciones y a la resolución de problemas, los invariantes operatorios cumplen una función esencial: o ya existen en los recursos del sujeto, y están descompuestos y recompuestos, o aún no existen, emergen en situación, y se van articulando con los invariantes anteriormente formados.

Las situaciones propuestas a los estudiantes para construir conceptos de Mecánica Cuántica resultarían nuevas para ellos. Representan un salto con relación a la percepción y a la intuición, debido a las características propias de los sistemas cuánticos. La identificación de Teoremas en Acto que pudieron ser utilizados por los estudiantes para resolver las cuestiones y problemas propuestos permiten analizar la conceptualización, y comprender el funcionamiento de las situaciones en relación a las inferencias que los estudiantes realizaron al utilizar los teoremas en acto identificados. También se analiza en que forma estos invariantes operatorios

permitieron u obstaculizaron la reconstrucción del conocimiento científico pretendido.

III. METODOLOGÍA

Se diseñó una Estructura Conceptual Propuesta para Enseñar los aspectos fundamentales de Mecánica Cuántica [7] y luego se implementó la secuencia en un curso de Física de treinta (30) estudiantes de 17-18 años de una edad, donde el Profesor es el investigador. Los estudiantes formaron seis grupos, que permanecen fijos durante toda la secuencia y durante el año lectivo. En los encuentros áulicos se planteó la siguiente forma de trabajo:

- El material de estudio impreso se entregaba a los estudiantes clase a clase, para regular apropiadamente la introducción de novedades y problemas. Al finalizar cada clase los estudiantes entregaban sus producciones al profesor.
- El material impreso consistía en preguntas y problemas, para los cuales los estudiantes debían conversar con los integrantes de su grupo, consensuar y formular respuestas escritas a las cuestiones planteadas. Cuando era necesario, se ocasiones se ofrecían síntesis escritas, para que los estudiantes leyeran, interpretaran y conversaran.
- Los momentos de síntesis y consenso se planteaban con todos los grupos en forma simultánea procurando la formulación por parte de los estudiantes.
- Las preguntas de los estudiantes se respondían con preguntas, para devolver la responsabilidad al alumno.
- Se acordaron fechas para la entrega de sus producciones escritas, y de evaluación final.

Durante el desarrollo de cada una de las situaciones propuestas, se registraron en audio las conversaciones de cada grupo en cada encuentro (previo consentimiento de los estudiantes). También se recogió todo el material completo que se les había ido entregando clase a clase, lo que constituyó su carpeta de estudio; las evaluaciones, los cuestionarios realizados y las notas del profesor. Los registros en audio fueron transcritos, constituyendo los protocolos de análisis. En cada encuentro y para cada grupo se identificaron secuencialmente los turnos de habla correspondientes a cada estudiante. A partir del análisis de los protocolos, de las conversaciones y de sus representaciones externas (respuestas, gráficos, síntesis, etc.), se identificaron algunos de los teoremas y conceptos en acto, e inferencias que los estudiantes pudieron haber realizado al abordar las situaciones propuestas.

A. La secuencia desarrollada e implementada

La situación clave de la secuencia didáctica es la explicación de la distribución de los electrones en la experiencia de la Doble Rendija. [8] Utilizando la técnica "Sumar Todas las Alternativas" (STA) que es una adaptación de "Integrales de Camino de Feynman" [8] se obtiene la expresión para la curva de probabilidad de llegada de los electrones a un cierto punto de la pantalla. De esta forma es posible abordar los Principios

fundamentales de la Mecánica Cuántica en forma alternativa a la formulación canónica [8]. Primero se estudia el comportamiento de los electrones y partículas “libres” para comprender las características intrínsecas del mundo microscópico de los electrones, y la diferencia con las partículas de masa mayor. A partir del reconocimiento del fenómeno de interferencia para los electrones, y del análisis de la relación entre la detección del patrón de interferencia y la magnitud de la masa, se asigna una longitud de onda asociada, tanto al electrón como a toda la materia. La secuencia consiste en las siguientes etapas conceptuales:

B. Etapa 1- Experiencia de la Doble Rendija (EDR) con bolillas y con electrones

Se plantearon dos situaciones: en la primera, los estudiantes debían imaginar y anticipar los resultados de esta experiencia cuando se utilizan bolillas. En la segunda situación, se propuso utilizar el software “Doppelspalt”¹ y se simuló la EDR con bolillas. El software permite apreciar los impactos en la pantalla, generar el histograma de frecuencias y visualizar la curva teórica de la curva de probabilidad, $P(x)$.

Los estudiantes tenían que comparar sus predicciones sobre el resultado del experimento con los resultados de la simulación; y resolver un conjunto de tareas para analizar el efecto en la forma de la curva cuando se varía el ancho de las rendijas y su distancia de separación. Con esto se pretendía que el grupo acepte y establezca el principio: “Cuando ambas rendijas están abiertas la curva resultante es la suma de las curvas individuales”

Luego se propuso seleccionar electrones en lugar de bolillas. En este caso, la simulación muestra el patrón de interferencia, que resulta inexplicable tanto desde la teoría clásica como desde la idea escolar de que los electrones serían pequeñísimas bolillas. Esto produce una perturbación que lleva a la necesidad de buscar una explicación para el comportamiento inesperado de los electrones. Se esperaba que el grupo de clase formulase y aceptase uno de los principios clave de la secuencia: “Cuando ambas rendijas están abiertas y aunque los electrones llegan en unidades discretas, la curva resultante difiere de la obtenida con bolillas, porque no se genera sumando ambas curvas individuales”

Como no se puede obtener la curva de probabilidad sumando las curvas individuales -al abrir las rendijas de a una por vez- esto permite inferir que sería inadecuado considerar a los electrones como partículas. Esta nueva manera de considerar a los electrones, permite introducir la noción de “sistema cuántico” y también justifica la necesidad de una formulación probabilística para

¹ “Experimento de la doble fisión en Mecánica Cuántica” (2003). Creado por Muthsam, K (Versión 3.3 traducido al español por Wolfamann y Brickmann) Physics Education Research Group of the University of Munich. Obtenido en Internet de <http://www.fysik.unimuenchen.de/didaktik/Downloads/doppelspalt/dslit.html>.

explicar el diagrama de interferencia en el experimento de la doble rendija con electrones -partiendo del hecho experimental de que llegan a la pantalla en unidades discretas y medibles -.

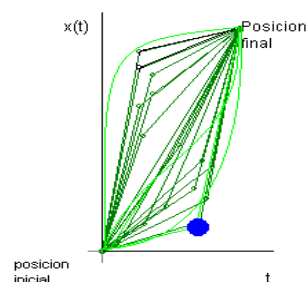
C. Etapa 2- Análisis y aplicación de la técnica STA para electrones libres.

La propuesta enfatiza el carácter probabilístico de las predicciones como un aspecto central de la teoría cuántica. Se plantea la cuestión: Para un electrón que se considere en cierto estado inicial -a la salida de la fuente en este caso- ¿Cuál es la probabilidad de que finalmente se encuentre en cierto lugar de la pantalla colectora?

Para que los estudiantes pudieran usar la técnica “Método de caminos múltiples de Feynman para la Mecánica Cuántica” se reemplazó la notación con números complejos por una representación vectorial. La técnica es aplicable a cualquier sistema físico, sea electrón o partícula libre, o no. Hacer emerger las propiedades de los sistemas cuánticos partiendo del caso de la partícula libre, fue una decisión didáctica clave, pues el ejemplo es sencillo y a la vez reúne las propiedades más generales de los sistemas cuánticos [7].

La técnica o método para calcular la probabilidad se presentó a los estudiantes como “Sumar Todas las Alternativas” (STA) de la siguiente forma:

1- Considerar que no hay una única, sino múltiples formas de conectar el estado inicial I con el final F , - con diversas $x(t)$ - todas igualmente posibles².



Luego, cada $x(t)$ posible, tiene asociado un valor numérico llamado acción, representado por “ S ”, relacionado con la energía cinética promedio (de movimiento) y potencial promedio (de la posición respecto de otros cuerpos con los que interactúa).

$$S = (E_{cin} - E_{pot}) \cdot T$$

Si la partícula está “libre” es decir no está en presencia de fuerzas, consideramos que tiene energía potencial nula. Entonces, directamente la acción en este caso es:

$$S = E_{cin} \cdot T$$

$$S = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \cdot T$$

² Para simplificar solo se dibujaron algunas funciones para conectar el estado inicial con el final -tramos rectos- Por otro lado, son las funciones que el software que se utiliza con los estudiantes permite modelar.

2- Con dicha acción S se construye un vector en el plano llamado "Amplitud de probabilidad" que tiene módulo uno y ángulo de medida S/\hbar (con respecto al eje x positivo). El denominador de este cociente es el valor de $\eta = h/2\pi$, donde $h = 6.625 \times 10^{-34}$ J.s se denomina constante de Planck, y es una constante fundamental en Física.

Es decir:

Cada $x(t)$ tiene un valor de S
con esta S se construye un vector:



Vector Amplitud asociado a cada
 $x(t) = (\cos S/\hbar, \sin S/\hbar)$

3- Se suman todos los vectores asociados a las diferentes funciones que conectan ambos estados inicial y final. Llamamos a este vector suma "Amplitud de probabilidad total"

Amplitud de probabilidad total = Suma de todos los vectores asociados

$$(\cos S/\hbar, \sin S/\hbar)$$

4- Se calcula el MÓDULO de la amplitud de probabilidad total (o sea el vector resultante de la suma) y se eleva al cuadrado. De esta forma, el resultado es la probabilidad de arribar al estado final F , habiendo partido del estado inicial I

Los electrones de la EDR se pueden considerar libres desde el momento que son disparados por la fuente hasta que llegan a la pantalla, suponiendo que el disparo se realiza en intervalos de tiempo suficientemente alejados para que no interactúen entre sí. El análisis para el electrón libre permite: a) validar la técnica, b) generar una explicación del patrón de máximos y mínimos obtenido con la primera simulación.

Para que los estudiantes puedan aplicar la técnica STA al electrón libre, sin realizar todos los cálculos de las acciones para cada función, se desarrolló una simulación con el software ³ModellusTM. La Figura 2 representa una pantalla de salida del software al seleccionar distintas funciones posibles para conectar los estados inicial y final [9]:

Seleccionando las distintas funciones $x(t)$ que conectan los estados iniciales y finales, la simulación muestra los ángulos correspondientes en un plano cartesiano y el valor del ángulo de dicho vector en grados sexagesimales⁴. Simultáneamente se dibujan los

vectores de amplitud de probabilidad correspondiente a cada función $x(t)$ seleccionada.

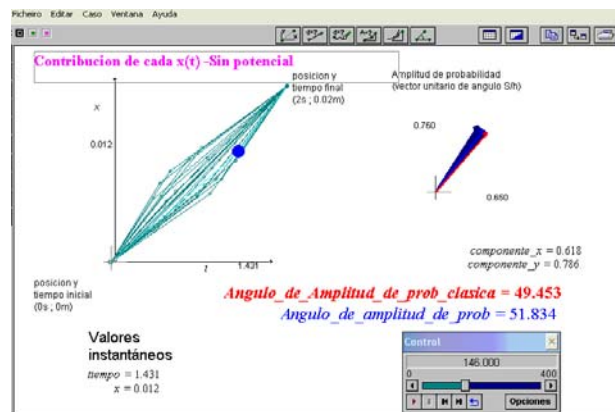


FIGURA 2. Pantalla de la simulación 1.

Las situaciones propuestas para utilizar el software y la representación en un mismo plano cartesiano de los vectores asociados a funciones $x(t)$ cercanas y alejadas de la función clásica, permitirían al grupo de clase formular las siguientes conclusiones:

- La acción S es mínima para la relación funcional $x(t)$ clásica -una recta- comparándola con otras $x(t)$ arbitrarias.
- Los ángulos de los vectores amplitud asociados a aquellas $x(t)$ o "caminos" cercanos⁵ al camino clásico $x_{clas}(t)$ son similares. En cambio, los ángulos de los vectores asociados a las $x(t)$ que se encuentran alejadas del camino clásico, difieren mucho entre sí. Esto significa que sólo un conjunto de caminos "alrededor" del camino clásico pueden aportar a la suma. Los caminos que están demasiado alejados del clásico, tienen asociados vectores que, debido a su diferencia de direcciones, se anulan entre sí al sumarlos.
- Cuanto mayor es la masa de la partícula hay menos vectores que considerar en la suma, porque hasta los caminos más cercanos se anulan. Para una partícula macroscópica, que es el caso límite, la única que contribuye a la suma es la $x_{clas}(t)$.
- Es la relación entre el valor de la acción -determinada por la masa- y el valor de la constante de Planck la que permite interpretar la transición cuántico-clásico.

³ MODELLUSTM versión 2.5 Creado por Víctor Duarte Teodoro, Joao Paulo Duque Viera; Filipe Costa Clérigo Faculty of Sciences and Technology Nova University, Lisbon, Portugal. Obtenido de Internet en Diciembre de 2006 de <http://phoenix.sce.fct.unl.pt/modellus>

⁴ Para los cálculos es necesario tener el valor del ángulo expresado en radianes. Como los estudiantes prefieren el sistema Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 3, No. 2, May 2009

sexagesimal más que el circular decidimos no obstaculizar la visualización de los resultados.

⁵ El significado de "alrededor" debe ser conversado con el grupo de clase. El aporte está determinado por la masa del sistema que se trate. Para un objeto macroscópico, "alrededor" es tan cerca de la partícula clásica que es ella misma. A medida que la masa se reduce posee a dimensiones microscópicas "alrededor" va significando regiones cada vez más alejadas de la $x(t)$ clásica.

D. Etapa 3- Aplicación de la STA para reconstruir el diagrama de la EDR con electrones

La etapa anterior buscaba institucionalizar con el Grupo de Clase el resultado de la técnica STA para los sistemas libres (clásicos y cuánticos) y encontrar una expresión funcional para el cálculo de la amplitud en el caso de la partícula libre, donde la acción clásica juega un papel central - expresión que también puede encontrarse mediante el formalismo canónico-.

Luego se retomó la pregunta clave: *¿Cuál es la probabilidad de que el electrón que disparó la fuente se encuentre finalmente en una distancia x del centro de la pantalla?* Se propuso construir la respuesta aplicando la técnica STA al caso de la EDR con electrones para ciertas disposiciones experimentales dadas: separación de las rendijas, distancia entre la fuente y la pantalla y velocidad de los electrones. Con ello se obtuvo la expresión de $P(x)$. Adoptando un marco geométrico-vectorial, la suma de vectores y aplicando algunas propiedades trigonométricas se obtiene la expresión:

$$P(x) \sim 4 \cos^2 \left(\frac{m d}{2 \hbar T} x \right).$$

Los estudiantes discutieron y analizaron con su grupo los procesos matemáticos utilizados y las características de la forma funcional de la expresión obtenida. A partir de ella y proporcionando determinadas características experimentales (distancia de separación, tiempo empleado, etc.) realizaron una representación gráfica aproximada de $P(x)$. Para que se aprecien los máximos y mínimos, se proporcionó un conjunto de valores de la variable independiente. Sin esta orientación, la reconstrucción de la gráfica habría desviado a los estudiantes del objetivo principal en ese momento: reconocer que la gráfica adopta una forma similar a la gráfica de $P(x)$ obtenida en la primera simulación, por lo cual se infiere que la STA modeliza la situación de la Experiencia de la Doble Rendija. Este resultado permite retornar a la cuestión generatriz de la secuencia: *¿cómo explicar los máximos y mínimos de la curva de $P(x)$?*

E. Etapa 4- Análisis de la transición clásica-cuántica en la EDR

Para evidenciar que la relación entre la masa y la constante de Planck determina la formación del patrón de interferencia, se generó otra simulación con *ModellusTM*. Manteniendo constantes los demás parámetros, se puede observar cómo cambia la curva $P(x)$ en la misma experiencia, con el aumento progresivo de los valores de masa.

La simulación también representa el vector asociado a cada alternativa -pasar por una u otra rendija-, el vector suma y la curva. Las figuras siguientes muestran como aumenta la frecuencia espacial de la curva $P(x)$ al incrementar la masa. Experimentalmente, en el caso límite no es posible distinguir los máximos y mínimos de la curva y detectar así el efecto de interferencia,

poniendo en evidencia la transición entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica.

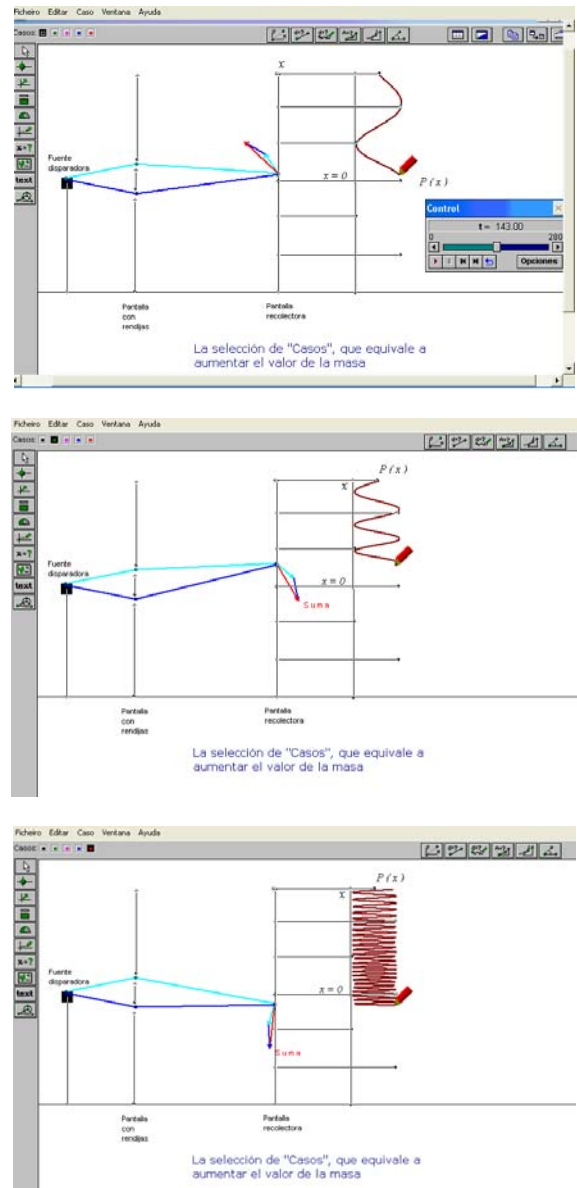


FIGURA 3. Pantallas de salida de la simulación de la EDR.

Para que los estudiantes reconozcan que en el experimento real el aumento de la frecuencia espacial de la curva significa la obtención de una sola curva o “curva promedio”[10] como la que muestra la primera simulación de la experiencia se propuso la siguiente figura:

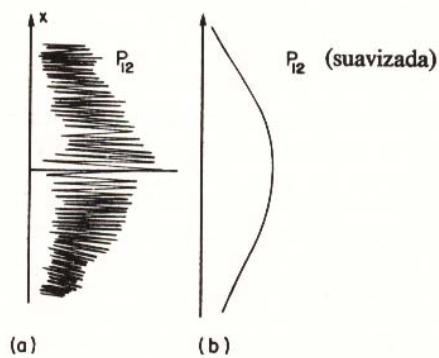


FIGURA 4. Función $P(x)$ con proyectiles de masa mucho mayor al electrón, realizando la EDR. (a) Curva predicha por la mecánica cuántica. (b) Diagrama observado experimentalmente.

Luego se propuso a los estudiantes analizar resultados de la EDR realizada en laboratorio real, ofreciéndoles una serie de fotografías de las sucesivas pantallas colectoras de electrones en el tiempo [11]. En ellas se puede notar la llegada de los electrones en unidades discretas, y a su vez, la distribución en franjas de concentración. En este contexto, fue necesario discutir y justificar el concepto de longitud de onda asociada a los electrones, como proporcional al cociente entre la constante de Planck y al producto masa-velocidad. Luego, se generalizó el concepto de longitud de onda asociada a todas las partículas, aceptando que los sistemas cuánticos, al igual que los clásicos tienen asociada una longitud de onda. Buscando confrontar esta última idea con los resultados antes obtenidos con el primer software, se planteó la cuestión ¿Por qué no se aprecia interferencia cuántica cuando la experiencia se realiza con bolillas? Se propuso analizar la relación entre la longitud de onda asociada y el patrón de interferencia. Se estableció que es posible detectarlo con electrones, y no para las bolillas. En este último caso, el cociente entre la constante de Planck y la masa es extremadamente pequeño, debido al valor de h , por lo tanto la longitud de onda asociada es demasiado pequeña, y los máximos y mínimos de la curva $P(x)$ resultan indistinguibles, obteniéndose una curva promedio que es la curva clásica. La secuencia concluye otorgando a la constante de Planck como constante fundamental un papel fundamental en la naturaleza, como valor de referencia para establecer que el comportamiento cuántico se evidencie experimentalmente o no.

IV. LOS INVARIANTES OPERATORIOS

En esta sección describimos y analizamos algunos de los teoremas en acto utilizados por los estudiantes al abordar cada una de las situaciones de la ECPE. Las situaciones propuestas son “nuevas” para ellos, ya que se considera que no disponen de todo esquemas de asimilación apropiados para resolverlas, y entonces tienen que reflexionar, explorar, dudar, intentar, para poder formular explicaciones. En todos estos procesos, la utilización de los teoremas en acto es esencial para la conceptualización,

ya que estos son parte de los esquemas de los alumnos, que pueden entrar en competición, ser acomodados, separados y recombinados. La identificación de los invariantes operatorios se realiza situación a situación debido a que son las situaciones las que moldean los conocimientos de los estudiantes, y las que dotan de sentido los conceptos que se quieren enseñar.

Situación 1: “Imaginando la Experiencia de la Doble Rendija con bolillas”

Esta situación requería primero a anticipar los resultados de la EDR con bolillas y luego, introducir la idea de probabilidad. Los estudiantes se enfocaron en el proceso aleatorio de emisión de la fuente y la llegada individual de los proyectiles, por lo tanto inferimos que se llamó de forma reiterada al concepto en acto de azar. Los teoremas en acto relacionados con el problema de predecir en qué lugar de la pared se detectarían impactos se denominaron: “Teoremas de los impactos (Ti)”:

Ti_1 : “Si las bolillas son disparadas al azar, la distribución es uniforme”.

Ti_2 : “Las rendijas imponen la forma en la distribución”.

Ambos teoremas fueron utilizados por todos los subgrupos del grupo de clase. Aún los estudiantes que utilizaron el teorema en acto que establece que la distribución aleatoria de impactos se relaciona con la presencia de las rendijas, (Ti_2) solían volver al teorema en acto de la uniformidad (Ti_1), como si el concepto en acto azar les impidiera reconocer la presencia de las rendijas y pensar en términos probabilísticos. El hecho de que en la situación se usaran los términos “aleatorio” y “azar” y que se expresara el desconocimiento del lugar de impacto de “cada” bolilla, habrían obstaculizado inicialmente la comprensión de la distribución. Solo después de introducir la definición de distribución de probabilidad y la curva, el azar perdió su posición dominante y los estudiantes interpretaron adecuadamente los máximos, y mínimos de la curva de probabilidad. Esto ha sido corroborado en las replicaciones realizadas, donde al no hacer referencia al azar, ninguno de los estudiantes utilizó el Ti_1 .

El siguiente fragmento de conversaciones de los estudiantes interesa porque permite inferir el uso del teorema Ti_1 :

A₈: Si una cosa, la rendija o lo que sea, se proyecta en la pared de madera con una línea así pero una bolita puede ir así y va a otro lugar porque dice en distintas direcciones(...) el disparador dijo que era para cualquier lado(...) Acá te dice, una bolilla que se dirige hacia una de las rendijas puede rebotar en el borde y terminar en cualquier lugar, o sea, rebota y se va para cualquier lugar

A₆: Rebota en el bordecito de la rendija y sale para cualquier lugar (...)

A₈: Esta es la pared rebota en un bordecito acá y la hace desviar, pasa y la hace desviar...

El protocolo siguiente corresponde a otro grupo de estudiantes muestra cómo se usan Ti_1 y Ti_2 alternadamente,

sin lograr consenso entre los estudiantes. Parecería que el concepto en acto azar “llama” a Ti_1 en varias ocasiones, y hace que se ignore el efecto de las rendijas sobre la probabilidad de impacto:

A_{11} : Al azar, al azar!!! Si tira al azar, llegan a azar!!

A_{15} : ¿al zar?

A_{11} : y... con la misma dirección de las rendijas, con la dirección que tira el coso

A_{13} : Para mí van a llegar a la misma dirección que en la cual llegan, si salen...

A_{11} : Va a llegar en la misma dirección de la cual salen, la misma dirección!!! Claro! La misma

Otro de los grupos que también inicialmente utilizó Ti_1 , luego continuó sus razonamientos en base a Ti_2 :

A_{27} : Bueno, ehm... si pasan en todas las direcciones decía, no?

A_{28} : Sí...Pero en todas no van a pasar porque están las... las cosas... las rendijas...

Ambos teoremas en acto se utilizarían alternativamente dependiendo de la inicialización del esquema que se use para enfrentar a la situación: si prevalece el concepto de azar, se llama a Ti_1 , y si se privilegian las rendijas, se llama a Ti_2 . Los estudiantes del mismo grupo, un poco más adelante en la conversación:

A_{13} : No! van a caer todas en el mismo lugar, o sea...si te está diciendo que se disparan al azar...

A_{14} : Pará, pará!!! no ves? hay dos rendijas!!, dos rendijas... Una y otra! como son dos, va a haber pelotitas... Va a haber más acá! por eso va a haber más acá y acá que acá...ponele, que están en las rendijas!!!

Era esencial que los estudiantes abandonasen Ti_1 , porque es clave para entender que las rendijas evitan una distribución uniforme de los impactos en la pared, que se produciría solo si estas no estuvieran. Además, es clave para comprender que la distribución de probabilidad para las bolillas resulta radicalmente distinta cuando se utilizan electrones y están las rendijas.

A continuación de esta primer instancia de predicción para las bolillas, se definió el cociente: N° de bolillas que impactan a una distancia “x” del centro de la pared / N° bolillas disparadas en total, para interpretar la ley de probabilidad que rige este fenómeno.

Cuando los estudiantes trazaron la curva de $P(x)$, en general, no fueron consecuentes con sus predicciones iniciales sino con las definiciones de probabilidad ofrecidas. Éstas modificaron la forma en que se estaban interpretando los resultados, es decir reformularon la forma en que los estudiantes entendían la experiencia. Así en el trazado de curvas intervendrían los siguientes dos teoremas en acto (Teoremas de la forma de la curva (Tc)):

Tc_1 : Proporcionalidad entre n° de rendijas y máximos, y

Tc_2 : Superposición de efectos individuales en el centro

A continuación se presentan evidencias de la utilización del teorema en acto Tc_1 : **Proporcionalidad entre n° de rendijas y máximos**, que fue utilizado casi en todos los grupos. Este teorema llevaría a inferir que “como hay dos rendijas, las bolillas copian la forma en la pared de madera y forman dos franjas de concentración, dos máximos en la curva de $P(x)$ ”.

A_8 : Porque nos dimos cuenta acá que en esta zona

Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 3, No. 2, May 2009

es menos probable que haya bolillas

A_6 : O sea, mucho menos probable que en el medio

A_8 : ...acá se va acercando a la zona más probable

A_7 : (...) la curva es como la que hicimos antes porque va menos, menos, mas, mas, es gradual pero como son dos rendijas va a ser nada, nada, un poco, algo y en el borde como hay pared una cosa rara (...)

A_6 : De esta forma la curva va muy baja porque la probabilidad es mínima.

A_7 : En la curva se manifiesta que en la pared habrá más probabilidad de impacto en las líneas de las rendijas mientras que en el centímetro que dista entre línea y línea... pared la probabilidad de impacto es nula

Los gráficos realizados por estos estudiantes se presentan en la Figura 5.1 y son coherentes con la conversación:

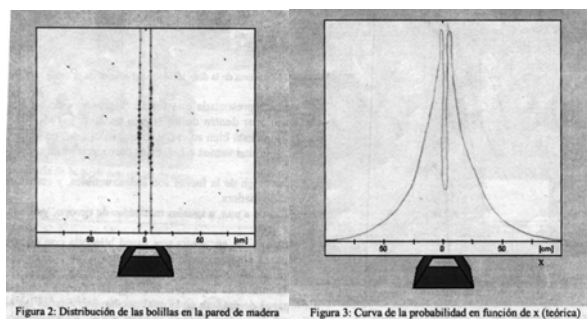


FIGURA 5. Izquierda: Distribución de las bolillas en la pared de madera realizados por el Grupo 2. Derecha: curva de probabilidad en función de x realizados por el Grupo 2.

Otro grupo de estudiantes en cambio, parecen utilizar el teorema en acto Tc_2 : **Superposición de efectos individuales en el centro** concluyendo que “aunque hay dos rendijas, en el centro hay un máximo”. Implícitamente estarían aceptando que el centro es el lugar que tiene el efecto de ambas rendijas. En la conversación, ellos habían acordado que la forma de la concentración sería en dos “bandas” relacionadas con la presencia de las rendijas. Sin embargo, cuando dibujaron los impactos, los concentraron en una sola región. En la curva de probabilidad, dibujaron un único máximo central indicando que la probabilidad es máxima en el lugar correspondiente al medio de las rendijas.

A_{14} : ...que...el máximo... que tenés, que supuestamente es el centro...

A_{16} : ..indica máxima probabilidad

A_{14} : El máximo... coma... que se encuentra en el centro indicado por la curva..... una mayor concentración de bolillas en el centro de la pared.

A_{15} : muestra que habrá una mayor concentración... de bolillas en el centro de la pared!

A_{14} : sí, a medida que nos alejamos del centro de las rendijas

A_{13} : Mientras que...la probabilidad disminuirá... a medida que nos alejamos del centro de las rendijas

Los estudiantes de este grupo realizaron los siguientes gráficos, acorde a lo que previamente habían conversado:

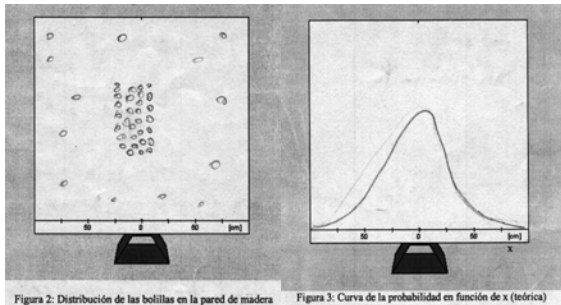


FIGURA 6. Izquierda: Distribución de las bolillas en la pared de madera realizados por el Grupo 3. Derecha: curva de probabilidad en función de x realizados por el Grupo 3.

Acerca de la primera situación se concluye que:

- Cuando los estudiantes tuvieron que anticipar los resultados de la EDR utilizaron inicialmente el teorema en acto en acto de la distribución uniforme T_{i1} . Posiblemente T_{i1} resulta “gatillado” por la referencia explícita al azar, que se menciona dos veces en Situación 1. Luego, cuando logran reconocer la presencia de las rendijas y su influencia en la distribución de impactos, utilizan T_{i2} (“Las rendijas imponen la forma en la distribución”).
- Después de introducir la definición de probabilidad, cuando los estudiantes tienen que representar gráficamente la curva de distribución de probabilidad, la evidencia de la que disponemos indica que solo utilizarían T_{i2} . Es decir, parecería que los estudiantes atribuyen la forma de la curva de probabilidad a la presencia de las rendijas, bien colocando uno, o dos máximos, esto es utilizando T_{c1} ó T_{c2} . Es importante destacar que los estudiantes llegan a esta conclusión a partir del análisis cualitativo de la experiencia, antes de realizar la simulación. Por otro lado, los protocolos muestran que los teoremas en acto T_{i1} , T_{i2} , T_{c1} , T_{c2} , son inestables y que la necesidad de dar una respuesta escrita común, genera un consenso que también es inestable. Sin embargo, desde un punto de vista didáctico las conclusiones de los estudiantes satisfacen las anticipaciones realizadas en el diseño de la secuencia.

Situación 2: “Simulación de la EDR con software

Esta situación proponía a los estudiantes como tarea inicial, simular la Experiencia de la Doble Rendija con el software “Doppelspalt” seleccionando bolillas como proyectiles, y contrastar las predicciones que habían formulado en la Situación 1. Luego pedía abrir de a una de las rendijas y notar la superposición de curvas, lo cual fue aceptado por el grupo de clase sin dificultades.

A continuación, los estudiantes tenían que anticipar si en esta experiencia al cambiar las bolillas por electrones, habría cambios en la distribución, y luego simular la

experiencia. Como se suponía que ellos sólo disponían del concepto de electrón como “pequeñas bolillas” se esperaba que su respuesta fuera afirmativa, y que se produjera una perturbación cuando ellos vieran la distribución en “bandas de concentración de impactos” proporcionada por el software. Este conflicto sería el punto de partida para la introducción de electrones como sistemas cuánticos. En el momento de anticipar, casi todos los estudiantes respondieron que los electrones se comportarían como las bolillas. Sin embargo, cuando observaron los resultados e intentaron explicarlos, utilizaron dos teoremas en acto. (Teoremas de electrones (Te)):

Te_1 “Los electrones tienen una cualidad especial: atravesar paredes”

Te_2 : “Los electrones son bolillitas muy pequeñas”

Ambos teoremas en acto están relacionados con el concepto en acto de electrón y el teorema en acto que lo considera una partícula extremadamente diminuta. El primer teorema en acto, les permitió inferir que el electrón puede “atravesar” la pared blindada, y el segundo, que la pequeñez del electrón comparada con las rendijas, hace que éstos no se vean afectados por ellas.

El teorema Te_1 fue utilizado por uno de los grupos, que explícitamente aceptan que los electrones pueden atravesar las paredes blindadas, y entonces, interpretan que la pantalla colectora muestra una distribución uniforme de electrones. Por una razón enteramente diferente a la esgrimida para las bolillas, los estudiantes insisten en la distribución uniforme de los impactos, también para los electrones. Ellos argumentaron que la distribución uniforme se debe a la propiedad de los electrones de atravesar paredes blindadas, como se aprecia a continuación:

A_{10} - Los electrones son pequeñísimas bolillas de carga eléctrica, ¿se comportan de la misma forma que estos? No, ya que poseen diferentes propiedades y podrán penetrar lugares que las bolillas no pueden. Nos puso... ¿Por qué? Contar cómo sucede esto. Y... los electrones pueden atravesar distintos materiales...

A_6 - Una vez, una Profesora... de química me dijo que los electrones pueden atravesar distintos materiales...

A_{10} - ¿Qué, le cuento la historia de cómo aprendí que los electrones pueden atravesar? Tenemos que pensar cómo sabemos que los electrones atraviesan esto.

A_6 - ¿Le hacemos el cuento de cómo nos dijo que los electrones podían atravesar diferentes materiales? (...) Casi en todos lados pero más acá, si está en todos lados...

A_7 - Los electrones atraviesan...

A_6 - ...Pueden pasar la pared

A_7 - Se distribuyen en toda la pared de madera coma aunque con más concentración... en la zona central a 50 cm... en el centro

A_8 - ¿Cómo interpretas la gráfica?

A_7 - Los electrones pueden impactar en cualquier zona de la pared de madera pero en la zona que tienen mayor probabilidad... a medida que se acercan a... al medio de la pared...

Los estudiantes se sorprendieron porque las franjas donde se concentran los impactos eran más de dos, y estaban distribuidas en todo el ancho de toda la pared. Como no

disponen de conceptos ondulatorios subsumidos para asociar la distribución con un patrón de interferencia, interpretan el resultado en base a la “increíble” cualidad de que los electrones atraviesan barreras. Esto oculta el conflicto que se esperaba producir al considerar que si los electrones son como bolillas y las bolillas copian la forma de las rendijas, entonces no deberían verse ahora franjas que en modo alguno se corresponden con las ranuras.

El teorema en acto Te_2 : “**Los electrones son bolillitas muy pequeñas**” fue utilizado por uno de los grupos, quienes desde la primera situación había considerado el tamaño de las rendijas como un factor importante en el análisis. Cuando predicen para los electrones, interpretaron que el reemplazo de bolillas por electrones se realizó dejando el resto de los parámetros iguales (ancho y separación de las rendijas) sin reparar en que se indicaba cambiar los parámetros para adecuar las dimensiones de la experiencia. Por lo tanto, predijeron que si sólo se varía el tamaño de los proyectiles hasta llegar a electrones manteniendo las dimensiones de las rendijas, el comportamiento sería como el de las bolillas:

A₂₈- No, porque... Claro...y que... hay mayor probabilidad en el centro! Porque... al ser más pequeño, es mayor el ángulo de donde.. pueden rebotar! Va a ir por ejemplo...

A₂₇- Ya sé, pero por qué entran todos? Claro, todo es mucho más grandote ahora...Pongamos eso ahora...

A₂₈- Que depende del tamaño...

A₂₇- No, porque al ser de menor tamaño...eh... varía el ángulo con que pasa....varía la curva, de probabilidad...

A₂₈- Y aumenta las zonas de probabilidad porque ahora es mucho más....

A₂₈- Para mí es lo mismo que...como si se... se agrandaran las dos rendijas... porque al agrandar las rendijas, es como que las bolas sean más chiquitas, entonces se agrandan...

Entonces le ponemos funciona como si, se agrandaran las rendijas

A₂₇- Entonces le ponemos funciona como si, se agrandaran las rendijas

A₂₇- Funciona como si se agrandaran las rendijas en el caso de las bolillas

A₂₉- Le tenemos que poner como si fuera un límite, las bolillas, o sea que cuando atraviesan son bolillas los electrones

De esta segunda situación se concluye que:

- Ellos no utilizaron el concepto de interferencia de ondas estudiado en un curso de física anterior. Tampoco esto resultó un problema en el desarrollo de la secuencia, pues no se pretendía abordar la semejanza entre el comportamiento de los electrones con las ondas. Sí se esperaba que los estudiantes percibieran la diferencia entre electrones y bolillas, tornando ineficaz el teorema en acto de los electrones como pequeñísimas bolillas capaces de atravesar lo que se interponga en su camino. Aún percibiendo diferencias entre ambas curvas de probabilidad, los estudiantes buscaban similitudes entre ellas, aceptando a los electrones como pequeñas bolillas.

Por un lado, porque el software mostraba tanto efectos de interferencia como de difracción, y los

estudiantes se apoyaban en la semejanza entre las curvas de $P(x)$ con bolillas y con electrones, pues en ambos casos hay un máximo central. Por el otro, ellos resultaron sorprendidos por la presencia de varias franjas donde se concentraban los electrones, ocupando así toda la pantalla, e insistieron en que se debían a la capacidad de atravesar paredes de los electrones. Es posible que esto fuera lo que les impedía “ver” la concentración de impactos en lugares que no se correspondían a la proyección de las rendijas, y la ausencia de impactos en otros. Solo cuando el Profesor intervino reflexionando acerca de los mínimos, la diferencia de comportamientos entre bolillas y electrones fue percibida.

- La prevalencia del teorema en acto mencionado impidió parcialmente la continuidad de la secuencia, aunque la intervención del Profesor señalado a los estudiantes la presencia de los mínimos de la curva $P(x)$ que habían resultado inadvertidos, resolvió la dificultad. Se insistió en que las rendijas afectan a la distribución de los electrones de forma que ya no se “copia” la forma de las rendijas en la pantalla como lo hacían las bolillas, sino de otra forma, que resulta inesperada. Se propuso a los estudiantes el nombre de “sistema cuántico” para señalar este comportamiento propio y distinto del esperado de los electrones en la EDR. A partir de allí, se instaló la necesidad de buscar una explicación de la forma de la curva de “no suma”.

Situación 3 “Presentación de la técnica Sumar Todas las Alternativas”

La secuencia didáctica solicitaba a los estudiantes que ejecutaran la Simulación 1 diseñada con Modellus, para comparar los valores de acción de las funciones cercanas y alejadas de la función clásica.

Se utilizaron dos teoremas en acto a partir de la simulación: parte de los estudiantes establecieron una relación entre las distintas funciones seleccionadas y sus correspondientes vectores asociados, a partir del teorema que denominamos Tcv_1 : **Proporcionalidad entre proximidad de funciones y dirección del vector asociado**, fundamental para la continuidad de la secuencia. En este sentido, la simulación colaboró con la visualización de los resultados y los cálculos, como se había propuesto. Algunos fragmentos de la conversación que permiten reconocer este teorema en acto:

A₉: ¿El ángulo depende del vector? ¿O no? ¿O el vector depende del ángulo? ¿Qué depende de qué?

A₆: El ángulo depende de cada vector.

A₉: Entonces cuando vos te alejás poco de la función original te movés poco y por lo tanto el ángulo aumenta...

A₆: ...poco...

A₉: Poco, pero si vos te movés para abajo ¿también es lo mismo o qué?

A₁₀: Aumenta también

A₉: Ah es verdad, aumenta!

A₇: Ves ahí, ahí te corrige del valor de x ...para abajo pero para arriba también aumenta. Para

Maria de los Angeles Fanaro y Maria Rita Otero
arriba

A₁₀: Bueno, en los valores que están repetidos, los valores, aumenta!

A₉: ¿Por qué siempre sube?

A₁₀: 18, 19, 20 ...

Sin embargo, uno de los grupos no lograba establecer la relación entre lo que mostraba el software y la situación que se estaba modelizando, utilizando así el teorema en acto Tcv₂: “Las funciones y los ángulos de los vectores no tienen ninguna relación”. Por ejemplo se puede notar en la siguiente conversación que en otro de los grupos, aún con la intervención del profesor, no conseguían establecer la relación esperada:

A₂₇: Profe! ¿Qué tenemos que poner? ¿que puede tomar cualquier valor de ángulo?

Profesor: ¿Cualquier valor? Fíjate lo que dice acá:

Compara el valor de la acción de cada una de las distintas x que el programa te va mostrando, con respecto a la acción de $x_{clas}(t)$ Al valor de acción de equis clásica ¿ya la habías calculado, no es cierto?

A₂₇: Que es un solo ángulo...

Profesor: Claro, es un solo ángulo. Ahora, cómo es, cómo son los demás, respecto de ése? Tenés que comparar...

A₂₇: Y...Son... son distintos... porque puede tomar cualquier valor!

A₂₈: Ahí, fíjate cuanto te va dando ahí...

A₂₇: Cero coma...nueve, ocho....

A₂₈: Y si subís que pasa?

A₂₇: Al subir...nada! Puede tomar cualquiera!

Esta poca aceptación de la relación entre las funciones y los vectores asociados constituyó un obstáculo que tuvo que sortear el Profesor proponiendo a los estudiantes reflexionar acerca los valores mostrados, proporcionando ejemplos y buscando generar consenso con todo el grupo de estudiantes. Era muy importante para la continuidad de la secuencia que los estudiantes comprendieran que hay un conjunto de funciones, cercanas a la función clásica cuyos vectores tienen dirección similar al vector de amplitud clásico, mientras que aquellas funciones que están más alejadas, tienen asociados vectores cuya dirección es muy distinta. Previendo que los estudiantes tuvieran esta dificultad, en el diseño de la secuencia, se ofreció un conjunto de ángulos correspondientes a los vectores asociados a funciones cercanas y alejados de la función clásica. Con estos valores, se proponía realizar la suma geométrica de los vectores asociados, colocando uno a continuación del otro. De esta forma, se buscaba colaborar con la comprensión de que la suma de todos los vectores se reduce a un conjunto finito de ellos, correspondientes a las funciones cercanas a la clásica.

Al realizar la suma los estudiantes sólo utilizaron el teorema en acto Tava: “Los vectores asociados a funciones alejadas de la clásica se anulan”. Si bien esto formaba parte del concepto que se quería construir, les faltaba formular una conclusión que tuviera en cuenta el aporte de los que no se cancelaban a la suma. Algunos fragmentos de la conversación que se identificaron como evidencia de este teorema en acto:

A₂₇: Pero después de sumar los vectores siempre va a terminar en el último!

A₂₉: Ay, no sé que tiene que ver las alejadas!

A₂₇: Como que al sumar las alejadas, las alejadas se...cancelan, digamos

A₂₈: Las más grandes!

A₂₇: Las alejadas serían los ángulos más grandes!

A₂₈: Claro, se cancelan estas con estas también igual, porque si vos ves, que esto lo trasladás acá, te da... te da cero!

A₂₇: Pero...no entiendo a que se refiere con la contribución a la suma

A₂₈: Y, yo pondría que se cancelan los ángulos a medida que se alejan...

A₂₇: Sí... entonces llegamos a la conclusión de que se pueden anular todos los vectores alejados, y por lo tanto, la suma volvía a éste

Entonces, el Profesor debió orientar a los estudiantes a que interpreten cuáles eran los vectores que no se cancelaban, y contribuían a la suma. La formulación final de la expresión para la suma, también necesitó de la interacción del Profesor con el grupo de clase para establecer que en el cálculo de la probabilidad únicamente hay que considerar el aporte de aquellas $x(t)$ cercanas a la clásica, debido a que las alejadas se anulan sin aportar a la suma

Situación 4: “Análisis de la transición cuántica-clásica: del electrón a las partículas libres”

Se propuso el análisis de la transición cuántico-clásica, a partir del análisis de la suma de los vectores para el caso de mayores valores de masa. En la misma “Simulación I” los estudiantes debían seleccionar distintos “casos” simulando valores de masas sucesivamente mayor. Debían notar que aún aquellas funciones que se alejan muy poco de $x_{clas}(t)$, tienen vectores asociados cuyas direcciones son muy distintas comparadas con la del vector asociado a la clásica. Este efecto es más notable a medida que se seleccionan los casos de masa cada vez mayor. El último caso que el programa permite corresponde a una masa de un billón de veces la masa de un electrón.

Siguiendo lo establecido para el caso del electrón acerca de la cancelación en la suma, se esperaba que ellos concluyeran que a medida que aumenta la masa, cada vez hay menos vectores que aportan a la suma, porque se cancelan mutuamente debido a la diferencia de sus fases. Así, para valores mayores de masa, el conjunto de funciones que se debían considerar en la suma resulta cada vez más pequeño. Se buscó abordar a la conclusión que en el caso extremo, de una masa “macroscópica”, el único vector a considerar es el asociado a la función clásica, ya que todos los demás se anulan. Esto permitía revalidar los conocimientos de los estudiantes acerca de las leyes de Newton, y que los estudiantes percibieran coherencia y continuidad de los saberes escolares estudiados.

Al analizar los resultados del aumento de la masa, surgieron tres tipos de respuesta: Uno de los grupos señaló el aumento del ángulo del vector clásico, y quedaron anclados en esta idea, sin poder establecer ninguna otra relación y sin cuestionarse esto. Otro grupo notó que seguía siendo válido que el ángulo del vector amplitud clásico es el menor respecto de otras funciones, como en el caso del electrón. Otros grupos, en cambio notaron que la regularidad que habían encontrado para el caso del electrón respecto de las direcciones de los vectores asociados a funciones cercanas y alejadas de la clásica cuando se aumenta la masa, dejaba de cumplirse, aunque no podían explicitar la nueva relación. Por lo tanto, se reconoce la utilización de los siguientes teoremas en acto, utilizados al interpretar los resultados observados en la simulación. (Teoremas acerca de cambios al aumentar la masa T_{cam}):

T_{cam1} : “Aunque aumenta la masa, no hay cambios notables”; y

T_{cam2} : “Al aumentar la masa, cambian los resultados encontrados para el electrón”

El teorema en acto T_{cam1} , fue utilizado por uno de los grupos, y posiblemente esté relacionado con el teorema en acto Te_2 : “Los electrones son bolillitas muy pequeñas” que ya había sido utilizado en la segunda situación. La inferencia que se origina es si los electrones son bolillitas pequeñísimas, entonces, ¡las bolillitas son electrones de gran tamaño! Naturalmente esto obstaculiza la secuencia, porque significa que siguen sin reconocer la relación entre las funciones y los vectores, como propone el modelo STA.

En cambio, en las respuestas de los demás grupos se nota que subyace el teorema en acto T_{cam2} es necesario – aunque no suficiente – para comprender la transición Cuántica-clásica. Este debía ser enriquecido para poder concluir que con el aumento del valor de la masa la acción S también aumenta, y como el ángulo está dado por el cociente entre la acción y la constante de Planck, pequeños cambios en la acción, significan grandes cambios en el cociente.

A₁₄: Ehhm, fijate en los casos... Veamos el efecto de la masa del cálculo de la probabilidad

A₁₅: Se acaba el tiempo, nos quedan 10 minutos!!! Profe!!!! acá en el cuatro...

Profesor: Ahí ya pusieron el caso dos que es el caso de cien veces la masa del electrón..y hay que hacer lo mismo, hay que seleccionar, y analizar.

A₁₄: ¿Qué pasa con las alejadas? Con equis te!

A₁₅: Paso, be... vamos al siguiente!

A₁₄: Pará, ¿Cómo comparás?

A₁₃: A ver... acá, estas que están más alejadas..alejadas... que pasa con la equis clas alejadas?... El ángulo va a ser, de probabilidad... Anotá: Alejado poné, ángulo de amplitud de probabilidad clásica... 4,91 para comparar, y el de probabilidad es ... Si están cerca poné, ángulo de amplitud de probabilidad mínimo...

A₁₅: 4.91? Es lejos o cerca?

A₁₃: Cerca

Este reconocimiento explícito de que los resultados que arroja el modelo son distintos según se trate de electrón o de partículas de masa mayor, es más adecuado para la conceptualización buscada, aunque resulta insuficiente. Tal vez la dificultad de los estudiantes para formular explicaciones de los resultados del software, podría haberse sorteado si se les hubiese solicitado que formulen explicaciones basadas en consideraciones cinemáticas para ambas situaciones. Por lo tanto, se requirió la interacción del Profesor, que les propuso realizar consideraciones cinemáticas para comprender los resultados de la técnica STA para valores de masas macroscópicas.

La utilización del teorema en acto T_{cam1} : “Aunque aumenta la masa, todo sigue igual” por parte de algunos grupos estaría indicando un obstáculo para la comprensión, porque se está desestimando la importancia de la masa en los efectos que se buscan analizar. Posiblemente, este teorema en acto no hubiese sido utilizado si antes de ejecutar la simulación, se les hubiera solicitado anticipar qué resultados arrojaría la simulación, y luego utilizar el software para corroborar o refutar sus predicciones.

En relación a la suma de los vectores en forma gráfica se identificó el uso de dos teoremas en acto, utilizado por distintos grupos de estudiantes (Teoremas de la suma de vectores T_{sv}):

T_{sv1} : “Si se suman menos vectores, la suma va a resultar menor” y

T_{sv2} : “Queda un solo vector en la suma, entonces, el resultado es más exacto”

La utilización del teorema en acto T_{sv1} : “Si se suman menos vectores, la suma va a resultar menor” utilizado por uno de los grupos, indica que los estudiantes no lograron actualizar sus conocimientos matemáticos y establecer la diferencia esencial entre sumar números y sumar vectores. Por lo tanto, esto obstaculizó la formulación de conclusiones acerca del cálculo de probabilidades, como se solicitaba:

A₁₈: Se sumarán... Los vectores que estén cerca... Que estén muy muy cerca, muy cerca! del vector original... Y ... Acá, ¿de qué forma afecta esto el cálculo de p de x ?

Profesor: Claro, acordate que la probabilidad... calcular el módulo del vector suma ¿está bien? ¿te acordás la última parte de nuestra técnica? Era sumar todo...

A₂₁: Era eso de h barra?

Profesor: Claro, eso... tenés que sumar todos y después elevar al cuadrado, fijate ¿se ve afectado si yo tengo que sumar muchos o tengo que sumar pocos o no?

A₁₈: Si porque si sumas pocos va a ser más chico el resultado que si sumás muchos...

A₂₁: Cuando se suman vectores... ay cómo ponemos?

A₁₈: Entonces ponemos, si sumás pocos vectores el resultado final será menor... que si sumás muchos.

Maria de los Angeles Fanaro y Maria Rita Otero

En cambio, el teorema en acto *Tsv*₂: “**Queda un solo vector en la suma, entonces, el resultado es más exacto**” utilizado por otro grupo, es más favorable para que se conceptualice la transición cuántico-clásico:

*A*₇: Entonces, ¿por qué se anulan?

*A*₁₀: Escucha una cosa, cuando es macroscópica, grande, se anulan todas.

*A*₆: No queda nada, pero cuando es microscópico....

*A*₁₀: Cuando es microscópica hay algunas que se anulan y las otras no!

*A*₉: A ver, cuando vos tenés microscópico, el vector clásico y vectores casi ahí. Esto es lo que se suma. Es lo que te está diciendo acá.

*A*₇: ¿Y los de lejos se anulan?

*A*₉: Claro!

La utilización de este teorema en acto permite avanzar en la conceptualización porque permite validar las leyes de la Mecánica clásica, conocida por los estudiantes: si no actúan fuerzas sobre un cuerpo, su movimiento queda descrito por una relación lineal entre la posición y el tiempo.

Situación 5: “Aplicación de la técnica STA para la EDR Reconstruyendo el diagrama de la EDR con electrones”

Se retomó la cuestión generatriz de la secuencia: **¿Cómo explicar los máximos y mínimos de $P(x)$ en la EDR realizada con electrones?** Se propuso a los estudiantes analizar la aplicación de la STA para los electrones de la EDR retomando la pregunta clave: **¿Cuál es la probabilidad de que el electrón arribe a una distancia x del centro de la pantalla partiendo de la fuente?** Los estudiantes reconocieron la forma y las características de la función $P(x)$ que se obtiene al aplicar la STA en la EDR, y la graficaron a partir de sus características funcionales –periodicidad, positividad y valores extremos- y de algunos puntos notables de la función que habían sido predeterminados.

Retornando a la cuestión inicial de la distribución de los electrones en la EDR se preguntó a los estudiantes: **¿Qué puedes concluir acerca de lo obtenido aplicando la STA de la Mecánica Cuántica respecto de lo que obtuvimos cuando simulamos la EDR con electrones en el software Dopplespalt?** Al responder, se reconoce que un grupo de estudiantes utilizó el teorema en acto *Tmod*₁: “**La curva teórica debe coincidir con la obtenida experimentalmente**” Este llevó a que acepten la identidad de las curvas, dejando a un lado las diferencias:

Profesor: Claro, esto que obtuviste acá, se parece o no se parece a lo que obtuviste con el software?

*A*₁₈: Sí, se parece...

Profesor: Bueno, se parece... ¿en qué sentido se parece?

*A*₁₈: En que tiene muchos máximos y mínimos

Profesor: Claro en cada uno de estos máximos, ¿qué significa que la probabilidad sea máxima? Que ahí... ¿cuántos electrones va a haber?

*A*₁₈: Y... Muchos

Profesor: Entonces...?

*A*₁₈: y... hay muchos máximos y mínimos

*A*₂₁: Y en los máximos hay más probabilidad

*A*₁₈: Se parecen porque ambos tienen máximos y mínimos, y en los máximos hay más probabilidad de que impacten electrones

El resto de los estudiantes notaron que la curva obtenida no era exactamente la obtenida en la simulación de la experiencia. El reconocimiento de la similitud entre la curva graficada y la curva obtenida para electrones no podía ser posible debido a que ellos se centraban en las diferencias de las dos curvas, sin poder extraer la característica fundamental: la de máximos y mínimos. Inferimos la utilización del siguiente teorema en acto *Tmod*₂: “**Como la curva teórica es sólo parecida en algún aspecto a la obtenida en la simulación de la experiencia, hay algo incorrecto**”.

Profesor: Vos dijiste que son similares. ¿Por qué?

*A*₄: Porque son cosenoidales, nada más que acá el máximo es parecido...

Profesor: ¿Y en el otro que pasaba? ¿En la simulación?

*A*₄: Eran diferentes, muy diferentes.

Como los estudiantes no lograban reconocer que con la aplicación de la técnica STA se estaba modelizando la situación de la doble rendija, la intervención del Profesor fue fundamental para que ellos dejaran a un lado las diferencias basadas en las alturas entre los máximos de la curva teórica y la experimental, y focalicen en las similitudes de ambas. Esto lleva a reflexionar acerca de la necesidad de revisar cómo se presenta la modelización en la Física escolar. No es común que en la escuela se presente un fenómeno para el cual se “construya” un modelo matemático que se ajuste al fenómeno. Por el contrario, generalmente se presenta el modelo matemático, y se lo aplica sin reflexionar acerca de sus ventajas y limitaciones. Este es un punto didácticamente relevante, un objetivo central de una secuencia didáctica de esta naturaleza, es producir conceptualización y explicitación verbal. Esta parece ser una fase obligada de la conceptualización en física a este nivel. Empezar por el modelo matemático nos dejaría “ciegos” frente al fenómeno que estamos distinguiendo.

Por otro lado, la ignorancia de los estudiantes acerca de los conceptos interferencia, difracción, e interferencia modulada por difracción, no permite aceptar la aproximación de la curva obtenida. Si los estudiantes conocieran estos conceptos ondulatorios, sería posible formular una explicación de la aproximación reconociendo que en el modelo se dejan de lado los efectos de la difracción.

Situación 6: “Análisis de la transición cuántico-clásico en la EDR”

En la primer parte de la Situación 6, los estudiantes debían primero predecir cómo resultaba el gráfico de $P(x)$ y luego graficar la función con un valor de masa de 2000 veces la masa del electrón. Para realizar el gráfico de forma aproximada, era necesario analizar el argumento de la función trigonométrica, que como ahora resulta mayor, los máximos y mínimos de la curva que la

representa se encuentran mucho más próximos entre sí. Luego se pidió a los estudiantes que interpreten la función en términos de distribución en la pantalla colectora. Sus respuestas parecen estar basadas en el teorema en acto que denominamos *Teorema de la polaridad clásica-cuántica* (T_{pec}) “Al aplicar la STA en la EDR con masas mayores al electrón tiene que obtenerse la curva que se obtenía para bolillas” Por ejemplo, uno de los grupos respondió: “se distribuirán con la silueta de las rendijas, es decir que tenderán a impactar”. El gráfico de la Figura 7, también evidencia que para los estudiantes no resulta sencillo aceptar la transición, y entonces si los electrones son sistemas cuánticos, todo lo que no lo es, tiene comportamiento clásico:

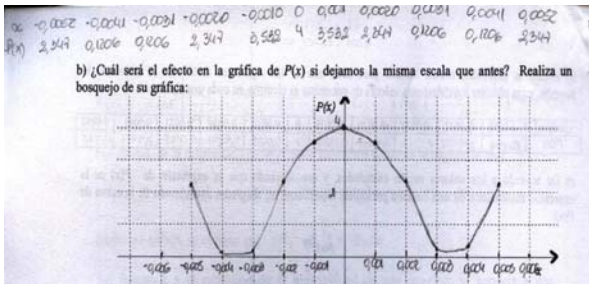
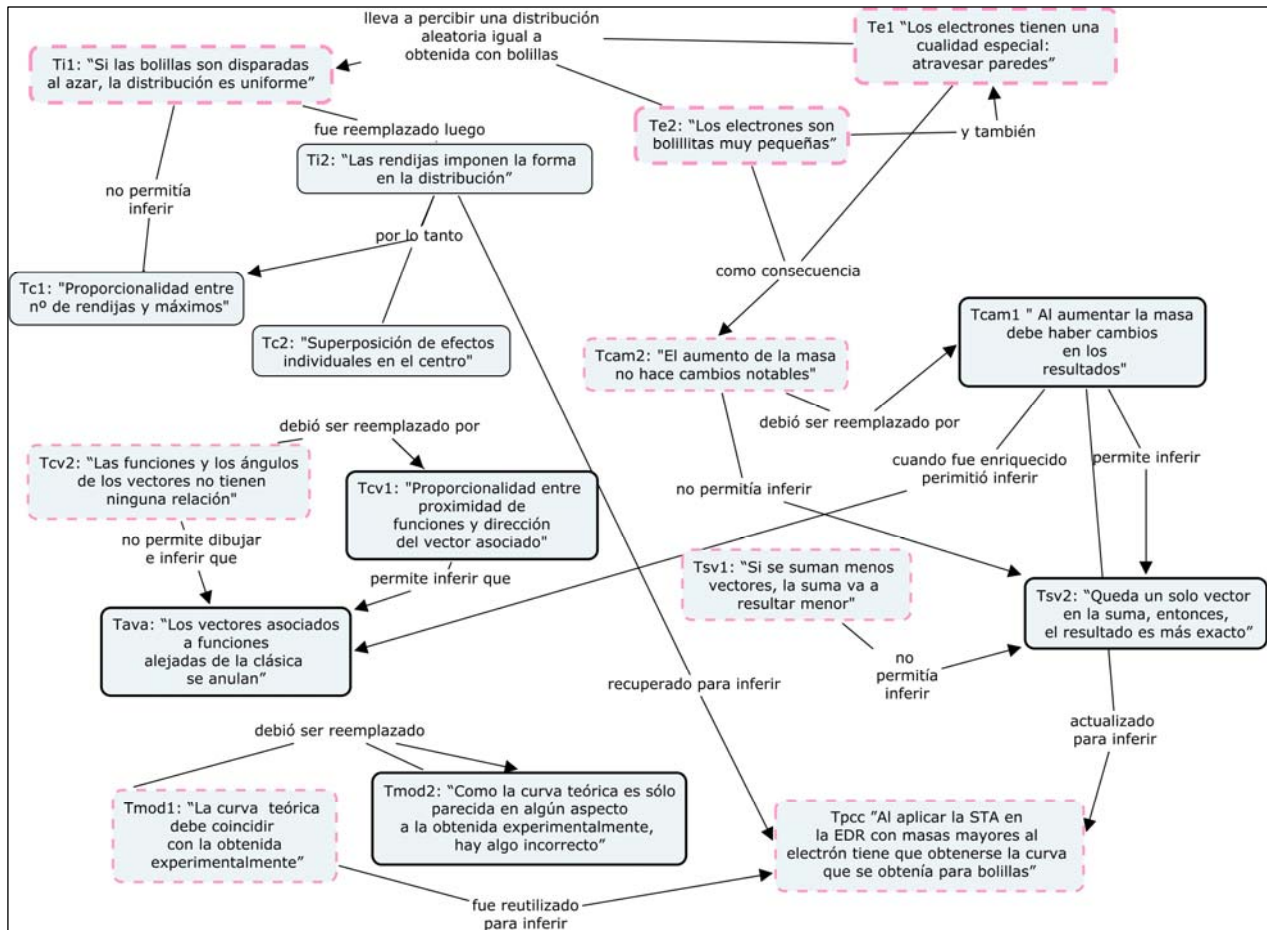


FIGURA 7. Gráfico realizado por un grupo de estudiantes para representar la función $P(x)$ en el caso de un valor de masa

Este teorema en acto indica la dificultad de los estudiantes para comprender que aunque las leyes cuánticas tienen validez universal, hay un límite para el cual los efectos cuánticos dejan de ser perceptibles, detectables por los instrumentos experimentales.

Para poder colaborar en la comprensión y visualizar la transición cuántica - clásica, se utilizó la *Simulación 2*. Ésta resultó ser útil ya que permitió a los estudiantes visualizar que al aumentar el valor de masa, aumenta la frecuencia espacial de $P(x)$, la curva periódica modelizada. Sería deseable que en futuras repeticiones, una versión mejorada de esta simulación, para los casos de masa macroscópica, muestre un gráfico “promedio” que presente uno o dos máximos, así los estudiantes pueden arribar a los mismos resultados que los que mostraba el software inicialmente y comprender que las leyes de la Mecánica Cuántica permiten explicar tanto sistemas macroscópicos como microscópicos.

El siguiente esquema sintetiza los teoremas en acto que se reconocieron a partir de las conversaciones de los estudiantes al abordar las situaciones de la secuencia. Se intenta mostrar el recorrido conceptual que realizó el grupo de clase. En línea discontinua se representó aquellos teoremas en acto que posiblemente obstaculizaron las inferencias deseadas, y en líneas llenas aquellos que colaboraron en la conceptualización:



varios órdenes más que la del electrón.

FIGURA 8. Esquema de los teoremas en acto identificados, y el recorrido conceptual del grupo de clase

CONCLUSIONES

El análisis que realizamos en este trabajo refleja la génesis conceptual que la secuencia consiguió disparar. Se ha focalizado en algunos de los teoremas y conceptos en acto que se pudieron identificar, esto debe entenderse en el contexto de la complejidad del estudio del proceso de conceptualización. Las acciones dirigidas por estos invariantes operatorios, son sistemáticas y se producen en el devenir de la historia cognitiva de los estudiantes. Esto se manifiesta en el teorema en acto que concibe a los electrones como pequeñísimas bolillas.

Este teorema en acto, fertilizado y regado por años de escolaridad, también tiene un correlato mental imagístico y otro pictórico externo. Su origen puede rastrearse y documentarse en múltiples textos de física y de química, y constituye un obstáculo para la conceptualización de sistema cuántico. Una cuestión didáctica relevante es ¿qué se puede hacer para que los estudiantes reconozcan que ciertos teoremas y conceptos en acto deben ser desconsiderados cuando está en juego el concepto de sistema cuántico?

Una respuesta posible a esta pregunta, surge al admitir el carácter *contingente* de la acción, como señala Vergnaud. Los invariantes operatorios dirigen las acciones de los estudiantes, pero éstos invariantes son gatillados a partir de las preguntas y tareas solicitadas en las situaciones. En este sentido, la acción es también una oportunidad para la conceptualización pretendida.

Las replicaciones y adaptaciones de esta secuencia con otros grupos de clase, han permitido reafirmar el papel que la relación entre esquemas del sujeto y situaciones tiene en la conceptualización. Es el caso del azar y la distribución, en la experiencia de la doble rendija. Los estudiantes interpretaron la situación a la luz del concepto en acto de azar, recuperando los teoremas y conceptos en acto disponibles y a su juicio, acordes a la solución buscada. Al modificar la formulación de la situación, los teoremas y conceptos llamados son otros. Así se pone de manifiesto que las situaciones no pueden ser producto de la improvisación, sino que son resultado de un proceso de diseño, del análisis didáctico a priori y de prueba efectiva en aula produciendo una reformulación y un nuevo ciclo.

Este trabajo muestra la necesidad de discutir el significado de modelización en física con los estudiantes. Ellos no perciben que se trata de una forma de representar la situación que se quiere explicar - la distribución de los electrones en la pantalla colectora, en este caso-. Los estudiantes no comprenden que los modelos científicos son aproximaciones que no tratan directamente con la realidad ni la agotan, tal como en la aplicación del método de Feynman

Finalmente, se destaca el carácter fundamental de al menos dos acciones didácticas para auxiliar la conceptualización durante la clase:

- Primero, producir la emergencia y explicitación de las ideas de los estudiantes, a partir de situaciones y preguntas que permitan emerger los conceptos buscados en lugar de ignorarlos o bloquearlos.

- Segundo, exigir conversaciones pertinentes entre los estudiantes y con el profesor. Lo esencial es la negociación de significados, mas allá del instrumento que se use [12]. En nuestro caso, se exige la explicitación de un acuerdo al interior de cada grupo de trabajo y del grupo de clase para expresar la conclusión por escrito. Es decir que sin conversar (lenguajear y emocionar) no es posible la conceptualización.

REFERENCIAS

- [1] Otero, M. R. *Emociones, sentimientos y razonamientos en Didáctica de las Ciencias*, Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias **1**, 24-53 (2006) Obtenido el 24 de febrero de 2009 de: http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/files/anio1/num1/REIE_C_anio1_num1_art3.pdf
- [2] Otero M R, *Emociones, sentimientos y razonamientos en Educación Matemática* Acta I Encuentro Nacional de Enseñanza de la Matemática: perspectiva Cognitiva, Didáctica y Epistemológica. pp. LXXXII-CV (2007). Tandil, Buenos Aires, Argentina.
- [3] Otero, M. R., *Enseñanza de las Ciencias: Aspectos Didácticos, Cognitivos y Afectivos* Actas de la V Semana de Investigación Programa Internacional De Doctorado En Enseñanza De Las Ciencias UBU/UFRGS Puerto Alegre. (En prensa) (2008).
- [4] Vergnaud, G., *La teoría de los campos conceptuales*, Recherches en Didactique des Mathematiques **10**, 133-170 (1990). Traducido por Juan D. Godino.
- [5] Moreira, M. A., *A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a pesquisa nesta área*, Investigações em Ensino de Ciências **7**, 7-30 (2002).
- [6] Vergnaud, G., *Functions, concepts and schemes*. A reply to Rita Otero. (2008) (Comunicación personal)
- [7] Fanaro, M., Arlego, M., Otero, M. R., *El método de caminos múltiples de Feynman para enseñar los conceptos fundamentales de la Mecánica Cuántica en la escuela secundaria*, Caderno Catarinense de Ensino de Física **22**, 233-260 (2007).
- [8] Arlego, M., *Los fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela secundaria utilizando el concepto de integral de camino*, Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias **3**, 59-66. (2008) Obtenido el 24 de febrero de 2009 de http://www.exa.unicen.edu.ar/reiec/files/anio3/num1/REIE_C_anio3_num1_art6.pdf.
- [9] Fanaro, M., Otero, M. R Arlego, M., *Software de simulación y reconstrucción de fundamentos de la mecánica cuántica en la escuela*, Artículo invitado en la Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología **2**, 4-12 (2007).
- [10] Feynman, R., Leighton, R. y Sands, M., *Física Volumen III Mecánica cuántica*, (Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1987), pp 1-12.
- [11] Obtenido el 24 de febrero de 2009 de <http://www.hitachi.com/rd/research/em/doubleslit.html>.

[12] Moreira, M. A., *Why concepts, why meaningful learning, why collaborative activities and why concept*