



# Análisis de propagación de onda acústica en océanos estratificados mediante el método de modos normales

**M. Quino-Cerdán, V. S. Rabinovich**

*Sección de Telecomunicaciones, SEPI-ESIME-IPN,  
Zacatenco, México D.F.*

**E-mail:** vladimir.rabinovich@gmail.com; jmquicer@hotmail.com

(Recibido el 30 de Enero de 2009, aceptado el 13 de Abril de 2009)

## Resumen

En este trabajo es presentada la teoría de modos normales para la transmisión de sonido debido a fuentes que podrían estar tanto en agua como en aire para la aplicación de comunicaciones en océanos estratificados. El cálculo de la pérdida de transmisión es realizada para la característica de modelo Pekeris consistente de una guía de onda que simula la capa de agua sobre un fondo. Los resultados obtenidos muestran el comportamiento del campo acústico en función de la distancia entre transmisor y receptor.

**Palavras-chave:** Modos normales, estratificados, campo acústico, modelo Pekeris.

## Abstract

The normal-mode theory is presented for the transmission of sound from a stationary source in a homogeneous air layer into an arbitrarily stratified ocean. Transmission loss calculations are performed for a Pekeris-type shallow-water environment consisting of a water layer over a uniform solid seabed. Numerical results are presented to illustrate the acoustic field behavior depending on the distance between transmitter and receiver.

**Keywords:** Normal-mode, stratified, acoustic field, Pekeris model.

**PACS:** 43.30.-k, 43.30+m

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

El problema de encontrar una expresión para la determinación de campo acústico, debido a fuentes que están en el aire, es nuevo ya que hasta ahora se ha trabajado en la determinación de campo acústico debido a fuentes que están en agua, donde se refleja el interés común para muchos investigadores de encontrar resultados dentro de esta ciencia [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Ya que el medio de propagación es el océano entonces debemos considerar dos importantes definiciones dentro de esta teoría oceanográfica, y es lo denominado como "océano estratificado" y "océano no estratificado". En el primer caso se considera al océano mediante una división por capas en las cuales la velocidad del sonido solo varía en forma vertical, entonces dicha velocidad se mantiene constante horizontalmente dentro de la capa. En el caso de océanos no estratificados se considera variación vertical y una variación mínima horizontal de la velocidad del sonido.

El análisis de la propagación del sonido bajo el agua se basa en los principios físicos de la teoría acústica, los cuales tienen por objetivo encontrar una ecuación de onda para la presión acústica  $P$  con convenientes condiciones de frontera en la superficie y en el fondo del océano.

Para encontrar el campo acústico  $P$  producido por una fuente fija o en movimiento dentro de un océano o fuera de él, se pueden utilizar tres métodos los cuales conducen a tres representaciones diferentes de  $P$ . Están el método de modos normales, el método de la transformada Hankel y el método de dispersión múltiple

El método de modos normales corresponde a una representación del campo acústico como una sumatoria de cada modo normal determinado mediante una ecuación de dispersión que surge a partir de la ecuación de onda para cada capa con condiciones de frontera específicas. El siguiente paso es la determinación de la función de Green para finalmente encontrar los valores propios y las funciones generalizadas a partir de las soluciones en cada capa. Es así que el campo acústico será representado mediante una sumatoria de colección de rayos correspondiente a cada modo normal donde además el número de los modos normales es finito.

En los resultados que se presentan se consideró el modelo Pekeris el cual establece que tanto la velocidad del sonido como la densidad en cada medio serán constantes.

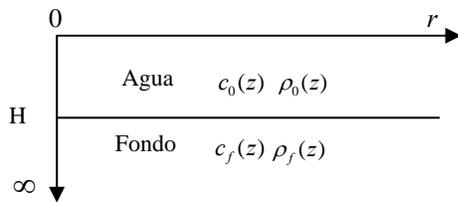
El estudio de la meteorología mundial mediante tomografía, imágenes del fondo del océano (barcos hundidos, montañas marítimas, rocas), identificación de nubes de burbujas formadas por el rompimiento de olas,

detección y seguimiento de submarinos, seguridad en la navegación oceánica, mediciones de precipitaciones en el mar y localización de cardúmenes, ballenas, etc., son algunas de las aplicaciones.

## II. METODOLOGÍA

Plantaremos el problema comenzando con la descripción de la estructura de la guía de onda tomando en cuenta dos casos:

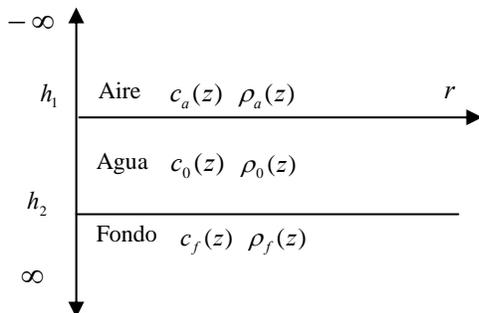
1) *La fuente y el receptor estarán en el agua separados por una distancia grande:* En este caso la guía de onda tiene una altura  $H$  y además está sobre un fondo para el cual se conocen las características de velocidad del sonido  $c$  y densidad  $\rho$ , tal como se ve en la figura 1.



**FIGURA 1.** Estructura de la guía de onda mediante su altura en función de la distancia.

Por lo tanto, la guía de onda queda limitada por la altura  $H$  donde el nivel cero representa la superficie oceánica, y tanto la fuente como el receptor quedan dentro de tal guía, dando opción a cálculos de campo acústico en diferentes posiciones dentro del canal donde es conocido el valor de  $c_0(z)$  y  $\rho_0(z)$ .

2) *La fuente estará en el aire y el receptor en el agua separados por una distancia grande:* En este caso la guía de onda tiene una altura definida por  $h_1$  y  $h_2$ , además está sobre un fondo para el cual se conocen las características de velocidad del sonido  $c$  y densidad  $\rho$ , como se observa en la figura 2.



**FIGURA 2.** Estructura de la guía de onda mediante su altura en función de la distancia.

Por lo tanto, la guía de onda queda limitada entre los valores de  $h_1$  y  $h_2$ , donde el nivel  $h_1$  representa la superficie oceánica.

Ahora encontraremos una expresión para la presión acústica  $P$  que satisface la ecuación de onda sobre  $R^3$  como

$$\left(\frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x - \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \rho^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z}\right) P(t, x, z) = A(t) e^{-i w_0 t} \delta(x) \delta(z - z_0), \quad (1)$$

donde:

$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$  es el Laplaciano con respecto a las variables  $(x_1, x_2) \in R^2$ .  $A(t) e^{-i w_0 t}$  es la fuente con amplitud  $A(t)$  y frecuencia  $w_0$  y  $\delta(x) \delta(z - z_0)$  es la ubicación de la fuente.

Las condiciones de frontera para (1) son

$$[P(t, x, z)]_{z=\pm h} = \left[ \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial P(t, x, z)}{\partial z} \right]_{z=\pm h} = 0 \quad (2)$$

Aplicando la transformada de Fourier a (1) obtenemos la ecuación inhomogénea de Helmholtz

$$\Delta \hat{P}(w, x, z) + \frac{w^2}{c^2(z)} \hat{P}(w, x, z) = -\hat{F}(w, x, z), \quad (3)$$

donde

$$\hat{P}(w, x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t, x, z) e^{i w t} dt. \quad (4)$$

Ahora construiremos la función de Green para la guía de onda

$$\Delta G + \frac{w^2}{c^2(z)} G = -\delta(x) \delta(z - z_0). \quad (5)$$

Y podremos expresar

$$P(w, x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) G(w, x, z, z_0) e^{i(w-w_0)t} dt.$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier obtenemos el campo acústico

$$P(t, x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i w t} dw \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau') e^{i(w-w_0)\tau'} \times G(w, x, z, z_0) d\tau'. \quad (6)$$

Por lo tanto, el asunto se reduce a encontrar la función de Green correspondiente al problema estacionario y que se obtiene a partir de la siguiente ecuación

$$(\Delta_x + L(x, z, \frac{\partial}{\partial z})) G(w, x, z) = -\delta(x) \delta(z - z_0). \quad (7)$$

El operador  $L(x, z, \frac{\partial}{\partial z})$  se define como

$$L(x, z, \frac{\partial}{\partial z}) u(x, z) = \left[ \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \rho^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{w^2}{c^2(z)} \right] u(x, z).$$

Aplicando la transformada de Fourier con respecto a la variable  $x$  obtenemos

$$(-|\xi|^2 + L(x, z, \frac{\partial}{\partial z}))\hat{G}(w, |\xi|, z) = -\delta(z - z_0), \quad (8)$$

donde

$$\hat{G}(w, |\xi|, z) = \iint_{R^2} G(w, x, z) e^{i(x, \xi)} dx. \quad (9)$$

Por lo tanto,  $\hat{G}(w, |\xi|, z)$  es la solución de (8) que satisface las condiciones

$$\begin{aligned} [\hat{G}(w, |\xi|, z)]_{z=\pm h} &= \left[ \frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \hat{G}(w, |\xi|, z)}{\partial z} \right]_{z=\pm h} = 0, \\ \hat{G}(w, |\xi|, z, z_0) &= \frac{Y_1(w, |\xi|, z_<) Y_2(w, |\xi|, z_>)}{W(w, |\xi|, z)}, \end{aligned} \quad (10)$$

tal que  $Y_1(w, |\xi|, z_<), Y_2(w, |\xi|, z_>)$  son soluciones de la ecuación

$$(-|\xi|^2 + L(x, z, \frac{\partial}{\partial z}))Y(w, |\xi|, z) = 0.$$

Ahora podemos escribir la función de Green en coordenadas polares

$$G(w, r, z, z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_1(w, \alpha, z_<) Y_2(w, \alpha, z_>)}{w(z, w, \alpha)} \alpha H_0^{(1)}(\alpha r) d\alpha. \quad (11)$$

Se puede desarrollar esta última integral en términos de una sumatoria

$$G(w, r, z, z_0) = \sum_{j=1}^N G_j(w, r, z, z_0),$$

donde

$$G_j(w, r, z, z_0) = 2\pi i \cdot \text{res} \left( \frac{Y_1(w, \alpha, z_<) Y_2(w, \alpha, z_>)}{w(z, w, \alpha)} \alpha H_0^{(1)}(\alpha r) \right)_{\alpha=\alpha_j}.$$

Los  $\alpha_j$  son las raíces de la ecuación de dispersión y  $\varphi(w, \alpha, z)$  la solución del problema espectral

$$L(w, z, \frac{\partial}{\partial z})\varphi(w, \alpha_j, z) = \alpha_j^2 \varphi(w, \alpha_j, z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Finalmente se obtiene

$$G_j(w, r, z, z_0) = \frac{\varphi(w, \alpha_j, z)\varphi(w, \alpha_j, z_0)H_0^1(\alpha_j r)}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^2(w, \alpha_j, z)}{\rho(z)} dz}, \quad (12)$$

siendo  $H_0^{(1)}(\alpha_j) = \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha r}} e^{i(\alpha_j r + \frac{\pi}{4})} (1 + O(1/\alpha_j r))$  la asíntota de la función de Hankel para  $r \rightarrow \infty$ .

La contribución del modo normal en el campo acústico es

$$G(w, r, z, z_0) = \sum_{j=1}^N \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha r}} \frac{\varphi(w, \alpha_j, z)\varphi(w, \alpha_j, z_0)}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^2(w, \alpha_j, z)}{\rho(z)} dz} e^{i(\alpha_j r + \frac{\pi}{4})} (1 + O(1/\alpha_j r)), \quad (13)$$

donde  $z$  es la ubicación del receptor y  $z_0$  es la posición de la fuente, por otro lado cada modo normal  $j = 1$  hasta  $N$  corresponde a una colección de rayos que viajan en la guía de onda los cuales contribuyen en la determinación total del campo acústico.

### III. RESULTADOS

Para encontrar el campo acústico obtendremos la ecuación de dispersión y el conjunto de soluciones  $\varphi(w, \alpha_j, z)$  para cada caso considerado anteriormente.

Para el caso de dos medios tendremos el siguiente problema espectral

$$\begin{aligned} (L(w, z, \frac{\partial}{\partial z}) - \alpha_j^2)\varphi(w, \alpha_j, z) &= 0, \\ L(w, z, \frac{\partial}{\partial z})\varphi(w, \alpha_j, z) &= \alpha_j^2 \varphi(w, \alpha_j, z), \end{aligned}$$

tal que

$$L(w, z, \frac{\partial}{\partial z}) = \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \rho^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{w^2}{c^2(z)}.$$

Pero  $\rho(z)$  y  $c(z)$ , según el modelo Pekeris, son constantes, por lo tanto

$$L(w, z, \frac{\partial}{\partial z}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{w^2}{c^2}.$$

Para cada capa se tendrá

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[ \left( \frac{w}{c_0} \right)^2 - \alpha_j^2 \right] \right\} Z_1(z) &= 0; \quad z \in (0, H), \\ \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[ \left( \frac{w}{c_f} \right)^2 - \alpha_j^2 \right] \right\} Z_2(z) &= 0; \quad H < z. \end{aligned}$$

Las condiciones de frontera serán

- 1)  $Z_1(0) = 0$ ,
- 2)  $Z_1(H) = Z_2(H)$ ,
- 3)  $\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial Z_1}{\partial z} \right)_H = \frac{1}{\rho_f} \left( \frac{\partial Z_2}{\partial z} \right)_H$ ,
- 4)  $\lim_{z \rightarrow \infty} Z_2(z) = 0$ .

La ecuación de dispersión nos queda

$$\tan \left[ \sqrt{\left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \alpha_j^2} H \right] = -\frac{\rho_f}{\rho_0} \sqrt{\left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \alpha_j^2} \sqrt{\alpha_j^2 - \left(\frac{w}{c_f}\right)^2}$$

Las soluciones en cada capa serán

$$\varphi_1(w, \alpha_j, z) = Z_1(z); \quad z \in (0, H),$$

$$\varphi_2(w, \alpha_j, z) = Z_2(z); \quad H < z.$$

En el caso de tres medios se considera las ecuaciones para cada capa

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[ \left(\frac{w}{c_a}\right)^2 - \alpha_j^2 \right] \right\} Z_1(z) = 0 \quad ; \quad z < -h_1,$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[ \left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \alpha_j^2 \right] \right\} Z_2(z) = 0 \quad ; \quad z \in (-h_1, h_2),$$

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[ \left(\frac{w}{c_f}\right)^2 - \alpha_j^2 \right] \right\} Z_3(z) = 0 \quad ; \quad z < h_2.$$

Las condiciones de frontera son

1)  $\lim_{z \rightarrow -\infty} Z_1(z) = 0,$

2)  $Z_1(0) = Z_2(0),$

3)  $\frac{1}{\rho_a} \left(\frac{\partial Z_1}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial Z_2}{\partial z}\right)_{z=0},$

4)  $Z_2(h_2) = Z_3(h_2),$

5)  $\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial Z_2}{\partial z}\right)_{h_2} = \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial Z_3}{\partial z}\right)_{h_2},$

6)  $\lim_{z \rightarrow \infty} Z_3(z) = 0.$

La ecuación de dispersión es

$$\tan \left[ \sqrt{\left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \alpha_j^2} h_2 \right] = \frac{\frac{\rho_0 \sqrt{\alpha_j^2 - \left(\frac{w}{c_f}\right)^2} + \rho_0 \sqrt{\alpha_j^2 - \left(\frac{w}{c_a}\right)^2}}{\rho_f \sqrt{\left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \alpha_j^2} - \rho_a \sqrt{\left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \alpha_j^2}}}{1 - \frac{\rho_0 \sqrt{\alpha_j^2 - \left(\frac{w}{c_f}\right)^2} \rho_0 \sqrt{\alpha_j^2 - \left(\frac{w}{c_a}\right)^2}}{\rho_f \sqrt{\left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \alpha_j^2} \rho_a \sqrt{\left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \alpha_j^2}}$$

Las soluciones en cada capa serán

$$\varphi_1(w, \alpha_j, z) = Z_1(z) \quad ; \quad z < -h_1,$$

$$\varphi_2(w, \alpha_j, z) = Z_2(z) \quad ; \quad z \in (-h_1, h_2),$$

$$\varphi_3(w, \alpha_j, z) = Z_3(z) \quad ; \quad z < h_2,$$

donde

$$Z_1(z) = e^{(z+h_1) \sqrt{\alpha_j^2 - \left(\frac{w}{c_a}\right)^2}},$$

$$Z_2(z) = \text{sen} \left[ \sqrt{\left(\frac{w}{c_0}\right)^2 - \alpha_j^2} * z \right],$$

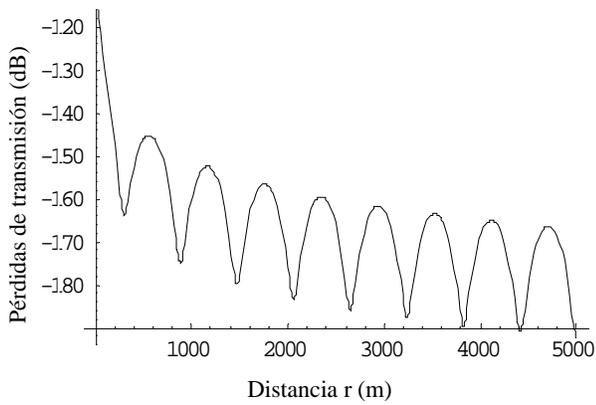
$$Z_3(z) = e^{-(z-h_2) \sqrt{\left(\frac{w}{c_f}\right)^2 - \alpha_j^2}}.$$

Usando (13), obtenemos la función de Green ya que contamos con las soluciones en cada capa para posteriormente utilizar (6) y así determinar el campo acústico.

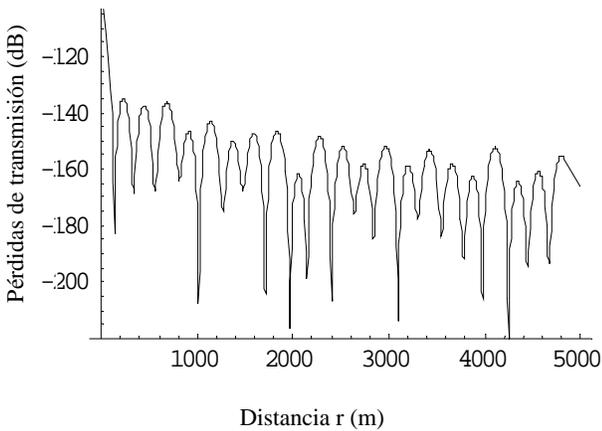
Las figuras 2, 3, 4, 5 y 6 muestran las pérdidas de transmisión  $TL$  que sufre el sonido en función de la distancia de separación entre transmisor y receptor en dos medios, mediante la siguiente ecuación:

$$TL(x, y, z, t) = 10 \log_{10} (|P(x, z, t)|^2) \quad (dB) \quad (14)$$

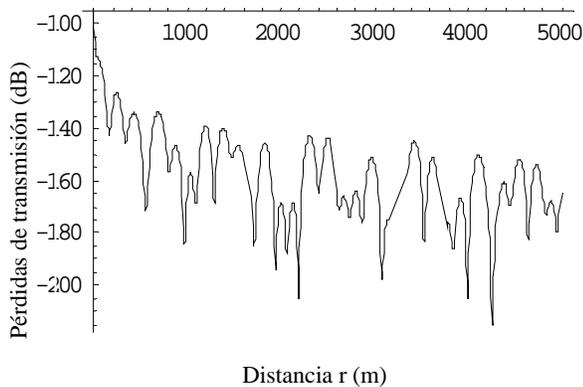
En este caso se consideró los siguientes datos:  $c_0 = 1520 \text{ m/s}$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $c_f = 2000 \text{ m/s}$ ,  $\rho_f = 2500 \text{ kg/m}^3$ ,  $H = 200 \text{ m}$ ,  $f = 60 \text{ Hz}$ , la fuente está a  $50 \text{ m}$  de profundidad y el receptor a una profundidad de  $100 \text{ m}$ .



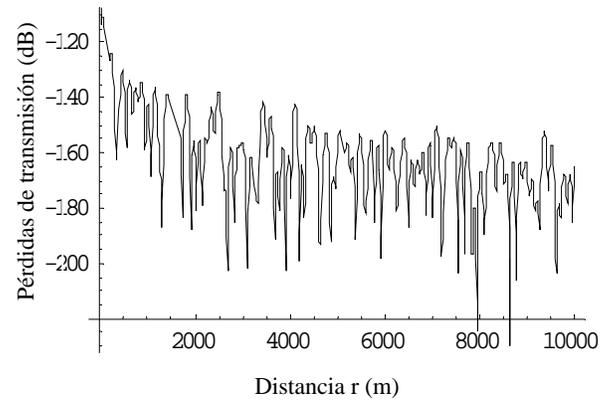
**FIGURA 3.** Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando 2 modos de propagación.



**FIGURA 4.** Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando 4 modos de propagación.



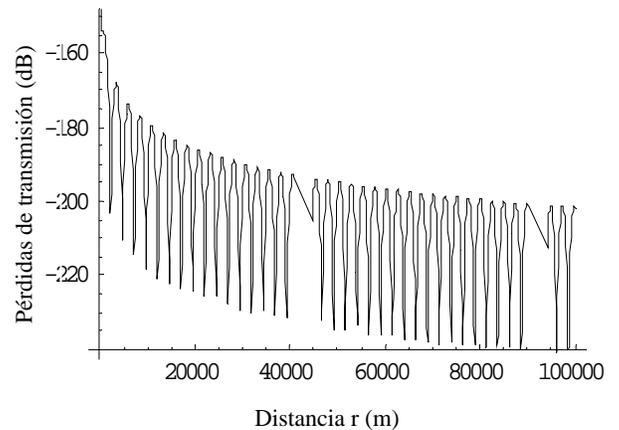
**FIGURA 5.** Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando 7 modos de propagación.



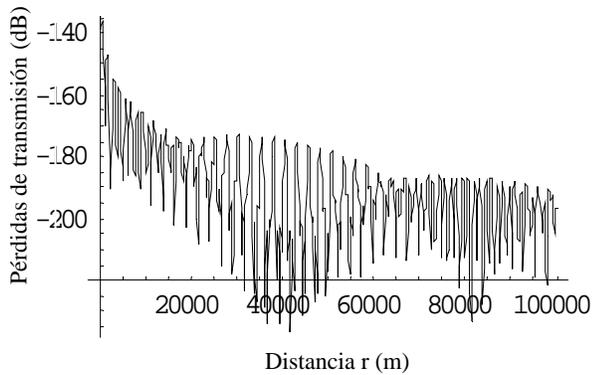
**FIGURA 6.** Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando 10 modos de propagación.

En las anteriores figuras podemos ver cómo las contribuciones de los modos de propagación dan una mejor aproximación al comportamiento del campo acústico el cual se ve reflejado en las pérdidas de transmisión generando más pérdidas cuando estamos más alejados del transmisor. El número de modos de propagación se determinó mediante la ecuación de dispersión que depende de la frecuencia  $f$  y de la altura de la guía de onda  $H$ .

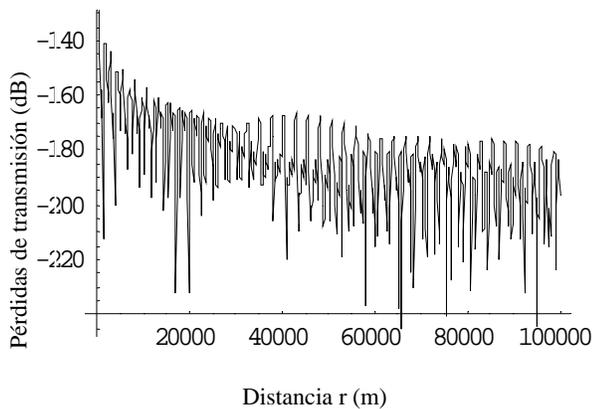
Las figuras 7, 8, 9 y 10 muestran las pérdidas de transmisión  $TL$  que sufre el sonido en función de la distancia de separación entre transmisor y receptor para tres medios mediante (14), considerando los siguientes datos:  $c_a = 340\text{m/s}$ ,  $\rho_a = 1.2\text{kg/m}^3$ ,  $c_o = 1520\text{m/s}$ ,  $\rho_o = 1000\text{kg/m}^3$ ,  $c_f = 2000\text{m/s}$ ,  $\rho_f = 2500\text{kg/m}^3$ ,  $H = 1000\text{m}$ ,  $f = 60\text{Hz}$ , la fuente está a  $100\text{m}$  de altura y el receptor a una profundidad de  $500\text{m}$ .



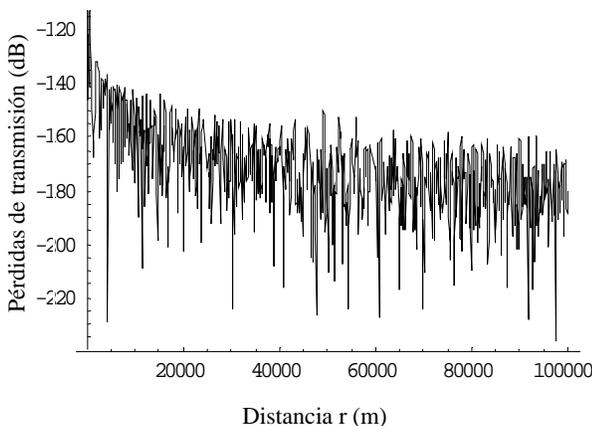
**FIGURA 7.** Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando 2 modos de propagación.



**FIGURA 8.** Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando 4 modos de propagación.



**FIGURA 9.** Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando 5 modos de propagación.



**FIGURA 10.** Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando 15 modos de propagación.

En las anteriores figuras podemos ver nuevamente un comportamiento decreciente del campo acústico en función de la distancia reflejando que a medida que se aleja el receptor menor será el sonido que recibirá. Por otro lado, la consideración de más modos de propagación contribuye al nivel de señal para la comunicación dando una mejor aproximación al comportamiento del campo acústico porque con más modos llegarán más familias de rayos al receptor. El número de modos de propagación es finito y además está limitado por los valores de la frecuencia  $f$  y de la altura de la guía de onda considerada para este caso entre  $h_1$  y  $h_2$ .

#### IV. DISCUSIÓN

En los resultados numéricos presentados, tanto para el caso de dos y tres medios, se consideró una amplitud de la fuente  $A(t)=1$ , es así que el nivel de señal obtenido podrá ser mayor si consideramos fuentes de mayor amplitud, sin embargo, tal nivel de señal visto para el caso donde la fuente y receptor están en el agua será mayor que en el caso en el cual la fuente está en el aire y el receptor en el agua, debido a que el sonido viaja a grandes velocidades en el océano (1520 m/s) en comparación con la velocidad del sonido en el aire (340 m/s). Por lo tanto, para aplicaciones de propagación acústica debido a fuentes aéreas será importante la altura de la fuente sobre la capa oceánica y también su amplitud, garantizando así la recepción de sonido a muy grandes distancias.

#### V. CONCLUSIÓN

Se presentó la teoría de modos normales para la solución de un nuevo problema encaminado a la propagación de sonido en océanos debido a fuentes aéreas. También se consideró la propagación debido a fuentes sonoras acuáticas como punto de partida de nuestro análisis y posterior comparación de las pérdidas que sufre cada caso. La característica de variación de la velocidad del sonido fue únicamente en forma vertical, es decir, con respecto a la profundidad.

Se obtuvo predicciones para la pérdida de transmisión en 2 y 3 medios considerando el modelo de océano Pekeris y para frecuencias de 60 Hz, mediante la contribución de cada modo normal expresada como sumatoria finita de cada colección de rayos que viajan por la guía de onda.

Los trabajos futuros sobre este problema están encaminados a considerar la superficie del océano no plana, fuentes en movimiento y modelos para océanos no estratificados.

#### AGRADECIMIENTOS

El primer autor da las gracias al CONACYT-MEXICO por la beca recibida durante sus estudios de Doctorado en el IPN.

## REFERENCIAS

- [1] Hawker, K., *A normal mode theory of acoustic Doppler effects in the ocean waveguide*, J. Acoust. Soc. Am. **65**, 675–681 (1979).
- [2] Lighthill, G., *Waves in fluids*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1978).
- [3] Lim, P. H. and Ozard, J. M., *On the underwater acoustic field of a moving point source, I. Range-independent environment*, J. Acoust. Soc. Am. **95**, 131–137 (1994).
- [4] Buldyrev, V. S. and Grigoryeva, N. S., *Acoustic field generated by a moving atmosphere source in a fluid layer with variable thickness*, Akusticheskii journal **39**, 782–792 (1993).
- [5] Ichev, V. I., Rabinovich, V. S., Rivelis, E. A. and Hoha, U. V., *Acoustic field of a moving narrow-band source in oceanic waveguides*, Dokl.Akad.Nauk SSSR **304**, 1123–1127 (1989), (in Russian).
- [6] Obrezanova, O. A. and Rabinovich, V. S., *Acoustic field of a source moving along stratified waveguide surface*, Akusticheskii journal **39**, 517–521 (1993), (in Russian).
- [7] Obrezanova, O. A. and Rabinovich, V. S., *Acoustic field generated by moving sources in stratified waveguides*, Wave Motion **27**, 155–167 (1998).