

# Prototipo para la Enseñanza de la Dinámica Rotacional (Momento de Inercia y Teorema de Ejes Paralelos)



**Carlos Andrés Collazos Morales<sup>1,2,3</sup>**

<sup>1</sup>Laboratorio de Física, Universidad Manuela Beltrán, Avenida Circunvalar No. 60-00, Bogotá D. C., Colombia.

<sup>2</sup>Departamento de Ciencias Naturales, Escuela Colombiana de Ingeniería, Ak. 45 No. 205-59, Autopista Norte, Bogotá D. C., Colombia.

<sup>3</sup>Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, Av. Legaria 694, Col. Irrigación, C. P. 11500, México D. F.

**E-mail:** carlos.cacollazos@gmail.com

(Recibido el 16 de Julio de 2009; aceptado el 31 de Agosto de 2009)

## Resumen

El propósito de este trabajo es contextualizar la temática de momento de inercia y teorema de ejes paralelos dentro de una estrategia pedagógica fundamentada en la construcción de prototipos y el aprendizaje basado en proyectos para la enseñanza de la dinámica rotacional. Específicamente se presenta un prototipo que permite medir el momento de Inercia de un sólido rígido respecto a su centro de masa y otros ejes de rotación. El artículo indica el proceso de experimentación y la validación teórica con el montaje. El montaje ha sido empleado como tema de investigación en estudiantes de ingeniería.

**Palabras clave:** Momento de Inercia de sólidos rígidos, construcción de prototipos.

## Abstract

The purpose of this work is to contextualize the thematic of inertia moment and the theorem of parallel axes within a pedagogical strategy based on the prototyping and the learning based on projects for the education of rotational dynamics. Specifically we show a prototype that it allows to measure the moment of Inertia of a rigid solid with respect to its center of mass and other axes of rotation. The article indicates the process of experimentation and the theoretical validation with the prototype. The prototype has been used like investigation project in engineering students.

**Keywords:** Moment of Inertia of rigid solids, Rotation dynamic, construction of prototypes.

**PACS:** 01.40.Fk, 01.40.gb, 01.50.My, 01.50.Pa

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la física puede ser abordada mediante la construcción y experimentación con prototipos de fácil construcción y de bajo costo. Un prototipo económico para medir momento de Inercia de sólido rígido es presentado en [1]. Utilizando el principio físico del sistema rotatorio indicado en [2] y la estrategia pedagógica fundamentada en la enseñanza de dinámica rotacional por medio de la construcción de prototipos y el aprendizaje basado en proyectos presentada en [3], es importante resaltar que cuando un grupo de estudiantes construye, experimenta y valida con un prototipo una teoría física se enfrenta a una problemática. El proceso de construcción de un prototipo conlleva inicialmente a que cada grupo de estudiantes diseñe y construye un prototipo adecuado para la experimentación. Los estudiantes plantean con el prototipo construido el procedimiento experimental a seguir e

involucran simultáneamente la teoría de error y el análisis gráfico con el propósito de validar un modelo teórico.

Dentro del contexto de la dinámica rotacional este artículo presenta un prototipo que permita validar el teorema de ejes paralelos. El prototipo ha sido empleado como proyecto de investigación en estudiantes de ingeniería de la Universidad Manuela Beltrán en el primer semestre del año 2009 (2009-1).

Es importante resaltar que la temática momento de inercia y teorema de ejes paralelos ha sido estudiado desde diversos enfoques desde lo teórico y experimental. Dentro de la enseñanza tradicional a nivel teórico resulta conveniente tener presente el enfoque de instrucción tradicional de los textos clásicos universitarios [4, 5, 6, 7, 8, 9] para abordar la temática. Otros enfoques teóricos dentro de la temática de interés han sido empleados utilizando la geometría [10] y no involucrando el cálculo integral [11]. El momento de inercia y teorema de ejes paralelos también ha sido abordado con base al periodo de

oscilación de un péndulo físico como se indica en [12, 13, 14]. En lo que respecta a nivel empírico, un enfoque experimental de sistema rotatorio para valorar el momento inercia de un sólido rígido sin alcance al teorema de ejes paralelos es presentado en [1]. Se buscó de esta manera mediante un prototipo abordar de forma experimental y teórica el teorema de ejes paralelos con dos sólidos rígidos (disco y varilla rectangular) que pueden girar para diferentes posiciones respecto a su centro de masa. Este artículo se estructura de la siguiente manera. En la sección I se presenta una descripción del prototipo, un breve fundamento teórico y el procedimiento experimental. En la sección II se indica la toma de datos experimentales con el prototipo, además un validación teórica. Para la sección III se indican algunos resultados fruto de la experiencia con estudiantes de ingeniería. Para finalizar en la sección IV se presentan las conclusiones del trabajo.

## II. PROTOTIPO

### A. Partes

El prototipo consiste de un eje cilíndrico vertical sobre el cual se pueden ubicar horizontalmente sólidos rígidos de diversa geometría, para nuestro caso se ha usado un disco y una varilla los cuales poseen orificios simétricamente distribuidos respecto a su centro de masa. Los orificios permiten ubicar los sólidos en diferentes posiciones (ejes de rotación) del centro de masa. El prototipo posee una base que soporta todo el montaje como indica la figura 1.

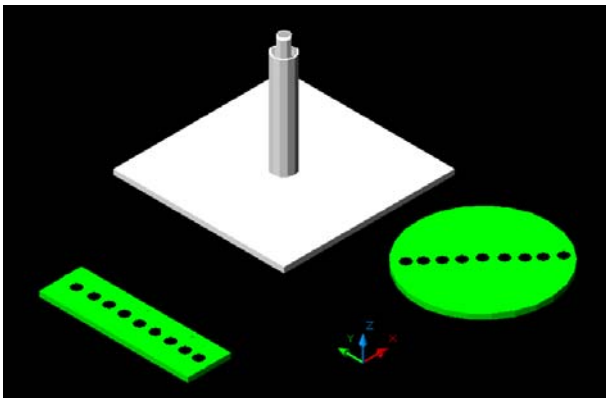


FIGURA 1. Partes del prototipo.

### B. Teorema de Ejes Paralelos

El momento de inercia de un sólido rígido teóricamente es una magnitud que depende de la forma geométrica del sólido, su masa y el eje de rotación del sólido [8].

A nivel teórico utilizando herramientas de cálculo diferencial e integral es posible obtener el momento de inercia para un disco y una varilla rectangular que gira respecto a su centro de masa  $CM$  [8]. La figura 2 presenta los momentos de inercia para el disco y la varilla rectangular respecto al centro de masa.

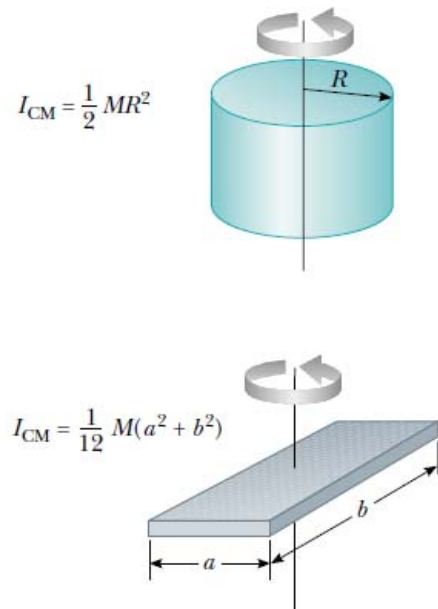


FIGURA 2. Momento de Inercia del Disco y varilla rectangular respecto a su centro de masa  $CM$ , Adaptada de: [8].

En el caso de que un sólido rígido de masa  $M$  gire para un eje diferente de su centro de masa es necesario recurrir al teorema de ejes paralelos o también conocido como el teorema de Steiner. El teorema establece teóricamente que el momento de inercia  $I_{teo}$  de un sólido rígido que rota sobre un eje paralelo separado a una distancia  $D$  del centro de Masa estado dado por la ecuación (1) según [8]

$$I_{teo} = I_{CM} + MD^2. \quad (1)$$

La Figura 3 ilustra los dos ejes de rotación de un sólido rígido.

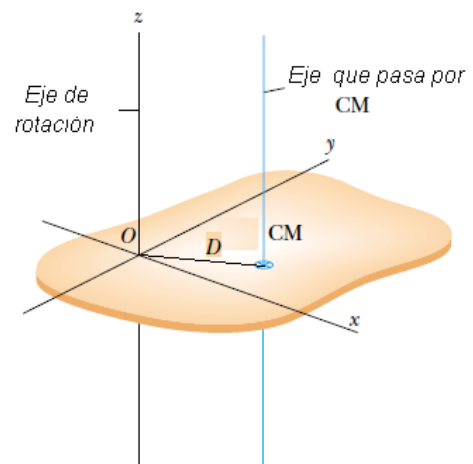


FIGURA 3. Dibujo en perspectiva para ilustrar el teorema de ejes paralelos, Adaptada de [8].

### C. Procedimiento experimental

El objetivo fundamental es hacer rotar horizontalmente el disco y la varilla respecto a su centro de masa y otros 8 ejes de rotación distribuidos simétricamente (4 orificios a la derecha del centro de masa y 4 orificios a la izquierda del centro de masa). Para alcanzar este propósito se libera la masa que cuelga de la polea la cual está atada mediante una cuerda al eje rotacional (Figura 4). Desde el inicio del evento es necesario disponer de un sensor de movimiento de traslación para medir la aceleración que posee la masa cuando esta se precipita.

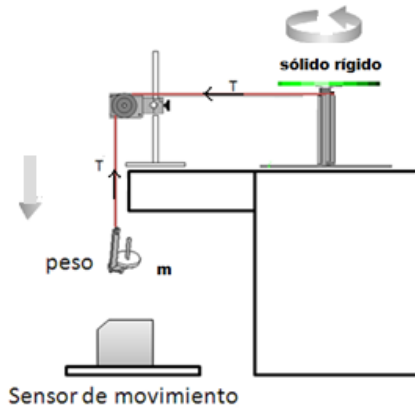


FIGURA 4. Montaje Experimental.

Es fundamental resaltar que el principio físico de eje cilíndrico vertical que rota por efecto de una masa que cuelga de una cuerda y que se precipita a través de una polea ya ha sido usado en otro prototipo a nivel de conservación de momento angular [2], sin embargo, el enfoque de este trabajo se centra específicamente en el teorema de ejes paralelos. De esta manera el momento de inercia experimental  $I$  del sólido rígido que rota sobre cualquier eje de rotación en el prototipo puede ser determinado experimentalmente como se realizó en [2] por medio de la ecuación (2).

$$I = mr^2 \left( \frac{g}{a} - 1 \right). \quad (2)$$

Donde  $m$  es la masa que cuelga de la cuerda,  $r$  es el radio del eje rotacional vertical donde se enrolla la cuerda y  $a$  es la aceleración de la masa que se precipita,  $g$  corresponde a la gravedad terrestre.

A nivel experimental se mantuvieron constantes ( $m=0,1kg$ ,  $r=0,01 m$  y  $g=9,8m/s$ ). Es primordial tener claro que si se varía el eje de rotación del sólido rígido respecto al centro de masa ( $D$ ), esto implica entonces que la aceleración ( $a$ ) y por ende el momento ( $I$ ) también cambien según establece el teorema de ejes paralelos. Por lo tanto el procedimiento se enfocó básicamente en obtener el momento de inercia experimentalmente para los 8 ejes de rotación incluyendo el centro de masa en los dos sólidos rígidos.

### III. RESULTADOS

#### A. Obtención del momento de inercia experimental

Utilizando la ecuación (1) y los registros de aceleración es posible obtener empíricamente los momentos de inercia para los 8 ejes de rotación además del centro de masa en disco y varilla rectangular.

De manera ilustrativa se presenta el método que permite determinar el momento de inercia experimental de los dos sólidos para cuando estos rotan respecto a su centro de masa (orificio central del total de 9 orificios). El método se fundamenta en utilizar las curvas indicadas en las figuras 5 y 6, las cuales corresponden a las curvas de posición en el eje  $Y$  de la masa colgante ( $m$ ) en función del tiempo ( $t$ ) después de que la masa es liberada y desciende hacia el sensor de movimiento. Las curvas en ambos casos poseen características de un movimiento uniforme acelerado, por esta razón en las figuras 4 y 5 se presentan los ajustes cuadráticos respectivos. Por medio del análisis gráfico es posible interpretar el doble del coeficiente cuadrático ( $A$ ) como la aceleración de la masa colgante ( $a$ )

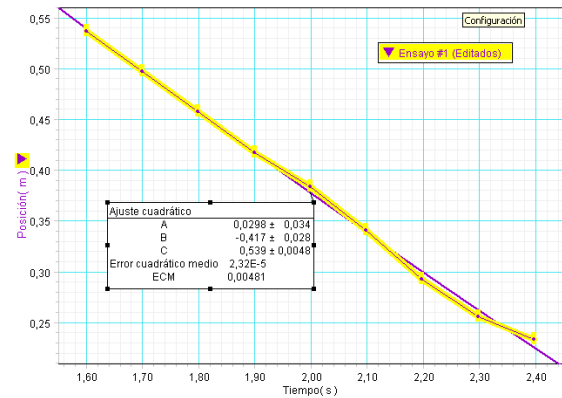


FIGURA 5. Curva de Posición angular vs. Tiempo después de que la masa colgante  $m$  es liberada (Disco, eje de rotación: centro de masa).

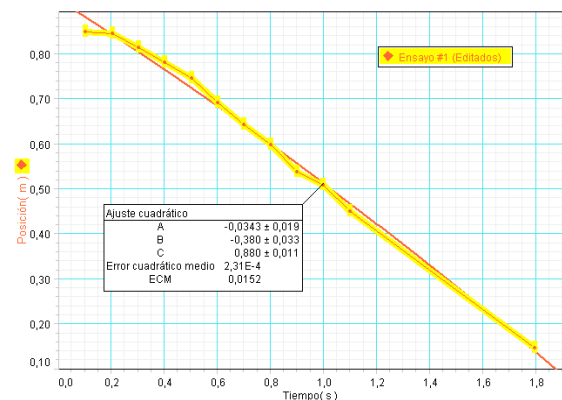


FIGURA 6. Curva de Velocidad angular vs. Tiempo después de que la masa colgante  $m$  es liberada (Varilla rectangular, eje de rotación: centro de masa).

El método descrito anteriormente se utilizó para determinar el momento de inercia experimental para los 8 ejes de rotación restantes a nivel disco y varilla

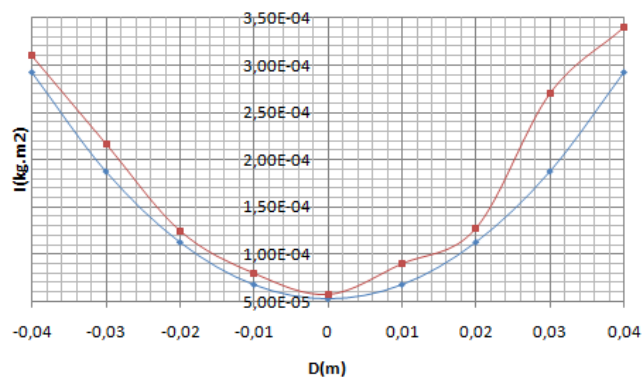
rectangular. La distancia de cada eje de rotación respecto al centro de masa corresponde a la distancia entre el orificio central y cada uno de los orificios, los cuales han sido distribuidos simétricamente respecto al centro de Masa y poseen un valor en distancia de 0,01m ente dos orificios consecutivos (ver figura 2). Los valores experimentales de momento de inercia son presentados en puntos en rojo en las figuras 7 y 8 para los dos sólidos respectivamente.

**B. Validación del teorema de ejes paralelos**

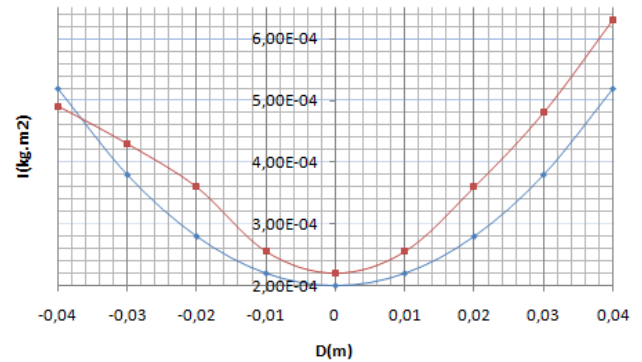
El teorema de ejes paralelos establece teóricamente una dependencia de  $I$  vs  $D$  de forma cuadrática como indica la ecuación (3).

$$y = b + a'x^2. \tag{3}$$

Comparando la ecuación (1) con la ecuación (3) y usando el análisis gráfico, el intercepto  $b$  puede ser interpretado como el momento de inercia del sólido respecto al centro de masa  $I_{CM}$  y el coeficiente  $a'$  corresponde a la masa del sólido rígido  $M$ . Por medio de la interpretación anterior es posible calcular el momento de inercia teórico para disco y varilla rectangular en cada eje de rotación tabulando la ecuación (1) para cada valor de  $D$  a la derecha e izquierda del centro de masa. Los valores de  $D$  positivos corresponden a distancias del eje de rotación a la derecha del centro de Masa, mientras que los valores de  $D$  negativos son las distancias del eje de rotación a la izquierda del centro de Masa. Los valores teóricos de momento de inercia son presentados en puntos en azul en las figuras 7 y 8 para los dos sólidos rígidos implicados en el experimento.



**FIGURA 4.** Curvas de  $I$  vs.  $D$  para el Disco. Los valores teóricos son indicados en puntos y línea en azul, mientras que los valores experimentales son presentados en puntos y línea en rojo.



**FIGURA 5.** Curvas de  $I$  vs.  $D$  para la Varilla rectangular. Los valores teóricos son indicados en puntos y línea en azul, mientras que los valores experimentales son presentados en puntos y línea en rojo.

Con base en los valores obtenidos de los momentos de Inercia a nivel teórico y experimental para disco y la varilla rectangular es posible hacer una validación de teorema de ejes paralelos. La validación implica comparar todos los datos de momento de inercia teóricos y experimentales en cada uno de los ejes de rotación en disco y varilla utilizando el error cuadrático medio, el cual es definido por la ecuación (4).

$$E = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n [(I_{teo})_i - I_i]^2}{n}}. \tag{4}$$

Donde el índice  $i$  asocia cada uno de los datos del momento de inercia teórico ( $I_{teo}$ ) y experimental ( $I_i$ ) para los nueve ejes de rotación ( $n=9$ ). La Tabla II presenta el error cuadrático medio obtenido para el disco y la varilla respectivamente.

**TABLA II.** Resultados.

Sólido Rígido	$E$
Disco	$1,61 \cdot 10^{-2}$
Varilla Rectangular	$8,00 \cdot 10^{-3}$

Los valores obtenidos de  $E$  para los dos sólidos indican que el prototipo es adecuado para la experimentación.

**IV EXPERIENCIA DE LOS ESTUDIANTES CON EL PROTOTIPO**

Este montaje fue propuesto como proyecto final para 88 estudiantes de ingeniería que cursaron mecánica en la universidad Manuela Beltrán en Bogotá- Colombia para el primer semestre del año 2009 (2009-1). La metodología empleada y el método de de evaluación fue similar al utilizado en [3]. Es decir se aplicaron 6 evaluaciones

grupales, 3 a nivel oral y 3 escritas como indica la Tabla III.

**TABLA III.** Descripción de la Evaluación.

Evaluación	Descripción	Semana
Eva-1	Presentación oral I de propuesta	6
Eva-2	Entrega escrita de Anteproyecto	6
Eva-3	Presentación oral II de Avance I	10
Eva-4	Entrega escrita de Avance I	10
Eva-5	Presentación oral III	16
Eva-6	Entrega escrita de Artículo	16

En la Tabla IV se indica la estadística descriptiva de cada una de las evaluaciones aplicadas.

**TABLA IV.** Estadística Descriptiva para 2009-1.

Evaluación	Promedio	Rango	Desviación estándar
Eva-1	3	2.7 - 3.3	0.40
Eva-2	3.1	2.8 - 3.4	0.30
Eva-3	3.6	3.4 - 3.8	0.23
Eva-4	3.6	3.3 - 3.9	0.30
Eva-5	3.7	3.4 - 3.8	0.22
Eva-6	4.0	3.8 - 4.2	0.24

Con base a la estadística descriptiva del experimento educativo realizado con los estudiantes y el seguimiento continuo de la estrategia pedagógica aplicada se pudo establecer que:

-Más de la mitad de los estudiantes reconocen que el proceso de construcción, experimentación y validación del teorema de ejes paralelos por medio de la construcción de un prototipo y el aprendizaje basado en proyectos permite establecer un conexión entre la teoría y la práctica, lo cual fortalece su proceso de aprendizaje acerca de esta temática.

-No todos los estudiantes dimensionan el uso de la teoría error y el análisis gráfico dentro de un proceso experimental, al respecto se busco reforzar esta deficiencia con una asesoría continua hacia los estudiantes que presentaban mayor dificultad para entender estos aspectos.

-El aprendizaje basado en proyectos y la construcción de prototipos genera otros aprendizajes complementarios en la formación de los estudiantes de ingeniería. Estos aprendizajes están relacionados con las habilidades y destrezas técnicas, manifestadas en el aspecto experimental que permite el funcionamiento del prototipo, además activa otros aprendizajes relacionados con la expresión oral y escrita, y los métodos gráficos enfocados al diseño en ingeniería.

-Las entregas que hacen los estudiantes a nivel oral y escrito mejoran progresivamente. Esto es un indicador de ganancia en las habilidades de expresión oral y escrita.

## VI. CONCLUSIONES

Se ha construido un prototipo con el cual se puede validar el teorema de ejes paralelos. La temática y la complejidad del teorema permiten incorporar la teoría de error y el análisis gráfico dentro de un proceso experimental que involucra el modelamiento físico al alcance de la mayoría de los estudiantes.

La temática de teorema de ejes paralelos es un concepto que relaciona otros aspectos importantes de la dinámica de rotación como por ejemplo centro de masa, torque, curvas cinemáticas de traslación y rotación, y analogías ente dinámica de rotación y traslación. La relación del teorema de ejes paralelos con otros temas de dinámica de rotación es intencional y busco que los estudiantes obtuvieran un aprendizaje integro de la dinámica de rotación.

En lo que respecta a la construcción de prototipos y el aprendizaje basado proyectos se muestra nuevamente que este tipo de estrategia es fructífera para la enseñanza y aprendizaje de la de física en estudiantes de ingeniería. La estrategia empleada permite que el estudiante consulte, indague, construya, dimensione y solucione un problemática planteada. El construir un prototipo lleva al estudiante a una apropiación y aplicación de los conceptos de la física; fortalece la abstracción debido a que el estudiante debe utilizar la modelación física como un eje fundamental en el momento de dar solución a la problemática planteada. De igual manera, incentiva la capacidad de análisis y síntesis, cuando el estudiante establece cada una de las partes que integran el prototipo y muestra una aplicación práctica de la teoría.

## REFERENCIAS

- [1] Banks, P. E., *An Inexpensive Moment of Inertia Experiment*, The Physics Teacher **43**, 389-390(2005).
- [2] Collazos, C. A., *Prototipo para la Enseñanza de la dinámica rotacional (conservación del momento angular)*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 446-448 (2009).
- [3] Collazos, C. A., *Enseñanza de la conservación del momento angular por medio de la construcción de prototipos y el aprendizaje basado en proyectos*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 428-432 (2009).
- [4] Eisberg, R. y Lerner, L., *Física, Fundamentos y Aplicaciones* (McGraw-Hill, México, 1984).
- [5] Giancoli, D., *Física, Principios y Aplicaciones* (Prentice Hall, México 1998).
- [6] Lea, S., y Burke, J., *Física, la Naturaleza de las Cosa, Volumen I* (International Thomson Editores, México 1991).
- [7] Resnick, R. y Halliday, D., *Física I*, (CECSA, 5a. Edición, México, 1998).
- [8] Serway, R. y Jewett, J., *Física I* (International Thomson Editores, 3a. Edición, México, 1999).
- [9] Wilson, J., *Física* (Pearson Education, 2a. Edición, México, 1996).
- [10] Oostra, B., *Moment of Inertia without integrals*, The Physics Teacher **44**, 283-285(2006).

Carlos Andrés Collazos Morales

- [11] Denardo, B., *Demonstration of the parallel-axis theorem*, The Physics Teacher **36**, 56-57(1998).  
[12] Takeuchi, T., *The Moment of Inertia of a Rectangular Rod*, The Physics Teacher **45**, 518-519(2007).

- [13] Boyd, J and Raychowdhury, P., *Parallel axis theorem*, The Physics Teacher **36**, 486-486(1985).  
[14][http://dev.physicslab.org/Document.aspx?doctype=2&filename=RotaryMotion\\_PhysicalPendulum.xml](http://dev.physicslab.org/Document.aspx?doctype=2&filename=RotaryMotion_PhysicalPendulum.xml).  
Consultado el 26 de Agosto de 2009.