

# Matrices de Dirac, Transformaciones de Lorentz Y Rotaciones Espaciales vía Cuaterniones



J. López-Bonilla, A. Rangel-Merino, Abacut Sebastián-Pérez

ESIME, Instituto Politécnico Nacional,  
Anexo Edif. 3, Col. Lindavista, CP 07738, México D.F., México.

Email: jlopezb@ipn.mx

(Recibido el 5 de Junio de 2009; aceptado el 28 de Agosto de 2009)

## Resumen

Se estudia cómo generar matrices ortogonales 4x4 mediante un triple producto cuaterniónico, lo cual conduce de manera natural a las matrices de Dirac y al estudio de rotaciones en 3 y 4 dimensiones.

**Palabras clave:** Cuaterniones, matrices de Dirac, Rotaciones espaciales, Transformaciones de Lorentz.

## Abstract

We study how generate orthogonal 4x4 matrix by means of triple quaternionic product, which guide in a natural way to Dirac's matrices and 3 and 4-dimensional rotations.

**Keywords:** Quaternions, Dirac's matrices, Spatial rotations, Lorentz transformations

PACS: 03.30.+p, 03.65.Ca, 03.50.Kk

ISSN 1870-9095

## I. INTRODUCCIÓN

Las unidades cuaterniónicas obedecen el álgebra [1, 2, 3, 4, 5, 6]:

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = -1, \quad \mathbf{IJK} = -1, \quad (1)$$

que permiten realizar el producto:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{pF}, \quad (2.a)$$

con

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{I} + F_2\mathbf{J} + F_3\mathbf{K} + F_4, \quad (2.b)$$

$$\mathbf{p} = p_1\mathbf{I} + p_2\mathbf{J} + p_3\mathbf{K} + p_4, \quad (2.c)$$

y la expresión resultante para  $\tilde{\mathbf{F}}$  puede escribirse matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_3 \\ \tilde{F}_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_4 & -p_3 & p_2 & p_1 \\ p_3 & p_4 & -p_1 & p_2 \\ -p_2 & p_1 & p_4 & p_3 \\ -p_1 & -p_2 & -p_3 & p_4 \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{P}}} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

El cuadrado de la magnitud de  $\mathbf{F}$  está definido por:

$$|\mathbf{F}|^2 = \mathbf{F}\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{F}}\mathbf{F} = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2, \quad (4.a)$$

con

$$\bar{\mathbf{F}} = -F_1\mathbf{I} - F_2\mathbf{J} - F_3\mathbf{K} + F_4, \quad (4.b)$$

notando que para  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  arbitrarios:

$$\overline{\mathbf{AB}} = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}}. \quad (4.c)$$

Entonces de (2.a), (3, 4.a) y (4c):

$$|\tilde{\mathbf{F}}|^2 = \mathbf{p}|\mathbf{F}|^2\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p}\bar{\mathbf{p}}|\mathbf{F}|^2, \quad \det \tilde{\mathbf{P}} = (\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}})^2, \quad (5.a)$$

en donde es evidente que para  $\mathbf{p}$  unitario:

$$\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}} = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = 1, \quad \det \tilde{\mathbf{P}} = 1, \quad (5.b)$$

se conserva la magnitud de  $\mathbf{F}$ :

$$\tilde{F}_1^2 + \tilde{F}_2^2 + \tilde{F}_3^2 + \tilde{F}_4^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2, \quad (6)$$

equivalente a:

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1 & \tilde{F}_2 & \tilde{F}_3 & \tilde{F}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_3 \\ \tilde{F}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix},$$

que en unión de (3) implica el carácter ortogonal de la transformación:

$$\underline{P}^T \underline{P} = \underline{I}_{4 \times 4}. \tag{7}$$

Una matriz es ortogonal cuando da la identidad al multiplicarse por su transpuesta, y su principal virtud es que conserva la magnitud de los vectores bajo su acción. Similarmente, el producto:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F}\mathbf{q}, \tag{8.a}$$

tiene la representación matricial:

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_3 \\ \tilde{F}_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} q_4 & q_3 & -q_2 & q_1 \\ -q_3 & q_4 & q_1 & q_2 \\ q_2 & -q_1 & q_4 & q_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \end{pmatrix}}_{\underline{Q}} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}, \tag{8.b}$$

y si  $\mathbf{q}$  es unitario entonces se verifica (6) y por lo tanto  $\underline{Q}$  es ortogonal con  $\det \underline{Q} = 1$ .

Los casos (2.a), (8.a) pueden unificarse en un solo esquema mediante un triple producto cuaterniónico:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{p}\mathbf{F}\mathbf{q}, \tag{9.a}$$

es decir:

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \tilde{F}_3 \\ \tilde{F}_4 \end{pmatrix} = \underline{D}_{4 \times 4} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}, \quad \underline{D} = \underline{P} \underline{Q}, \tag{9.b}$$

entonces  $|\tilde{\mathbf{F}}|^2 = (\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}})(\mathbf{q}\bar{\mathbf{q}})|\mathbf{F}|^2$  y así es claro que (6) se satisface para  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  unitarios, con  $\underline{P}$  y  $\underline{Q}$  ortogonales implicando que  $\underline{D}$  también lo es:

$$\underline{D}^T \underline{D} = \underline{I}, \quad \det \underline{D} = 1. \tag{9.c}$$

En las siguientes páginas se realizan las aplicaciones de (9.a.b.c): La Sec. II muestra que  $\underline{D}$  reproduce las 16 matrices de Dirac [7] si  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  coinciden con las unidades cuaterniónicas. La Sec. III considera el caso de relatividad *Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 3, No. 3, Sept. 2009*

especial porque  $\underline{D}$  genera transformaciones de Lorentz cuando  $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{p}}^*$ . La Sec. IV se dedica a rotaciones tridimensionales al pedir que el cuaternión unitario  $\mathbf{p}$  sea real ( $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}^*$ ), y en consecuencia  $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{p}}$ .

## II. MATRICES DE DIRAC

En mecánica cuántica relativista son importantes las 16 matrices de Dirac [7]:

$$\underline{I}, \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} \underline{I} & 0 \\ 0 & -\underline{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \underline{I} \\ \underline{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \underline{I} \\ -\underline{I} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_r \\ -\sigma_r & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^r \gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & -\sigma_r \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{0r} = -\sigma^{r0} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_r \\ \sigma_r & 0 \end{pmatrix}, \quad r = 1, 2, 3 \tag{10}$$

$\sigma^{jk} = -\sigma^{kj} = \begin{pmatrix} \sigma_l & 0 \\ 0 & \sigma_l \end{pmatrix}$ , ( $ijkl$ ) es una permutación cíclica de (123), y las  $\sigma_j$  son las matrices de Pauli [7, 8]:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Ahora en (9.a) pueden seleccionarse a  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  como las unidades cuaterniónicas, por ejemplo, si  $\mathbf{p} = 1$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{K}$ , entonces de (9.b) obtenemos que  $\underline{D} = i\sigma^{31}$ . En forma análoga, si  $\mathbf{p} = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{J}$  resulta que  $\underline{D} = -\gamma^1 \gamma^5$ , etc. Así:

TABLA I. Cuaterniones y Matrices de Dirac.

$\mathbf{p} \backslash \mathbf{q}$	1	<b>I</b>	<b>J</b>	<b>K</b>
1	$\underline{I}$	$\gamma^1$	$-\gamma^3$	$i\sigma^{31}$
<b>I</b>	$\sigma^{02}$	$-\gamma^3 \gamma^5$	$-\gamma^1 \gamma^5$	$-\gamma^5$
<b>J</b>	$\gamma^0 \gamma^5$	$\sigma^{32}$	$\sigma^{12}$	$i\gamma^2$
<b>K</b>	$-i\gamma^2 \gamma^5$	$i\sigma^{03}$	$i\sigma^{01}$	$\gamma^0$

(12)

Si  $\underline{W}$  denota a cualesquiera de las matrices de esta Tabla, entonces es simple probar que:

$$\underline{W}^{-1} = \underline{W}^T, \quad \underline{W}^* = \underline{W}, \quad \underline{W}^T = \pm \underline{W}, \quad (13)$$

es decir, son ortogonales, reales y simétricas ó antisimétricas.

### III. TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

En el espacio de Minkowski [9] las transformaciones de Lorentz relacionan, linealmente, a las coordenadas de un evento visto desde dos marcos de referencia en movimiento relativo uniforme ( $c$  es la velocidad de la luz en el vacío):

$$\begin{pmatrix} i\tilde{x} \\ i\tilde{y} \\ i\tilde{z} \\ c\tilde{t} \end{pmatrix} = \underline{D} \begin{pmatrix} ix \\ iy \\ iz \\ ct \end{pmatrix}, \quad (14.a)$$

que en términos geométricos corresponde a una rotación 4-dimensional manteniendo intacta la magnitud del vector:

$$(c\tilde{t})^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2, \quad (14.b)$$

lo cual es exigido por los postulados de la relatividad especial.

Si el cuaternión (2.b) es seleccionado como:

$$\mathbf{F} = ix\mathbf{I} + iy\mathbf{J} + iz\mathbf{K} + ct, \quad (15)$$

entonces (6) y (9.b) reproducen (14.b) y (14.a), respectivamente, y (9.a) da:

$$i\tilde{x}\mathbf{I} + i\tilde{y}\mathbf{J} + i\tilde{z}\mathbf{K} + c\tilde{t} = \mathbf{p}(ix\mathbf{I} + iy\mathbf{J} + iz\mathbf{K} + ct)\mathbf{q} \quad (16.a)$$

y al aplicarle la operación  $*$ :

$$-i\tilde{x}\mathbf{I} - i\tilde{y}\mathbf{J} - i\tilde{z}\mathbf{K} + c\tilde{t} = \mathbf{p}^*(-ix\mathbf{I} - iy\mathbf{J} - iz\mathbf{K} + ct)\mathbf{q}^*,$$

que a su vez bajo la operación  $-$  implica [recuérdese (4.b,c)]:

$$i\tilde{x}\mathbf{I} + i\tilde{y}\mathbf{J} + i\tilde{z}\mathbf{K} + c\tilde{t} = \bar{\mathbf{q}}^*(ix\mathbf{I} + iy\mathbf{J} + iz\mathbf{K} + ct)\bar{\mathbf{p}}^*, \quad (16.b)$$

así la igualdad entre (16.a) y (16.b) se logra si  $\bar{\mathbf{q}}^* = \mathbf{p}$ , es decir:

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{p}}^*, \quad (17)$$

siendo  $\mathbf{p}$  unitario. Por lo tanto, (9.a) adquiere la estructura [9, 10, 11, 12, 13]:

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{p}\mathbf{F}\bar{\mathbf{p}}^*, \quad \mathbf{p}\bar{\mathbf{p}} = 1, \quad (18)$$

que en unión de (15) permite generar transformaciones de Lorentz propias y homogéneas verificando (9.c), basta con dar  $\mathbf{p}$ . En efecto, al sustituir (2.c), (15) en (18), entonces con (14.a) recuperamos las expresiones para  $\underline{D}$  existentes en la literatura [4, 12-15]. Por ejemplo, si elegimos:

$$\mathbf{p} = -i \operatorname{senh}\left(\frac{\tau}{2}\right)\mathbf{K} + \operatorname{cosh}\left(\frac{\tau}{2}\right), \quad \tau \text{ real}, \quad (19.a)$$

resultan las conocidas fórmulas de Lorentz:

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = y, \quad \tilde{z} = \gamma(z - vt), \quad \tilde{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}z\right) \quad (19.b)$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \quad \tanh(\tau) = \frac{v}{c} < 1,$$

para dos observadores moviéndose en la dirección  $z$  con velocidad relativa  $v$ .

### IV. ROTACIONES ESPACIALES

Aquí se consideran transformaciones de Lorentz que no alteran la coordenada temporal:

$$\tilde{t} = t, \quad (20)$$

lo cual corresponde a rotaciones tridimensionales. Si en (16.a) sustituimos (20) es claro que  $t$  puede eliminarse idénticamente (para así solo dejar variables espaciales) si  $\mathbf{p}\mathbf{q} = 1$ , que en virtud de (17) da  $\mathbf{p}\bar{\mathbf{p}}^* = 1$ , equivalente a  $\mathbf{p}^*\bar{\mathbf{p}} = 1$  que para ser compatible con (5.b) impone la condición:

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^*, \quad (21)$$

es decir, las matrices de Lorentz generan 3-rotaciones cuando en (9.a) se emplea  $\mathbf{p}$  unitario y real. Entonces (14.a) adopta la expresión:

$$\begin{pmatrix} i\tilde{x} \\ i\tilde{y} \\ i\tilde{z} \\ c\tilde{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \underline{\mathbb{R}}_{3 \times 3} & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix \\ iy \\ iz \\ ct \end{pmatrix},$$

implicando (20) y:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \underline{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underline{\mathbb{R}}\underline{\mathbb{R}}^T = \underline{\mathbb{I}}, \quad \det \underline{\mathbb{R}} = 1, \quad (22.a)$$

respetándose la invariancia (14.b) en la forma pitagórica  $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Con (9.a), (17), (21) es inmediato obtener la estructura de la  $\mathbf{R}$  reportada en la literatura [13]:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 - 2(p_2^2 + p_3^2) & 2(p_1p_2 - p_3p_4) & 2(p_1p_3 + p_2p_4) \\ 2(p_1p_2 + p_3p_4) & 1 - 2(p_1^2 + p_3^2) & 2(p_2p_3 - p_1p_4) \\ 2(p_1p_3 - p_2p_4) & 2(p_1p_4 + p_2p_3) & 1 - 2(p_1^2 + p_2^2) \end{pmatrix} \quad (22.b)$$

teniéndose así, con (22.a), (22.b), un proceso sistemático para producir rotaciones espaciales, basta con dar un cuarteto de valores reales  $p_j$  cumpliendo (5.b).

## REFERENCIAS

[1] Kronsbein, J., *Kinematics-quaternions-spinors-and Pauli's spin matrices*, Am. J. Phys. **35**, 335-342 (1967).  
 [2] van der Waerden, B. L., *Hamilton's discovery of quaternions*, Math. Mag. **49**, 227-234 (1976).  
 [3] McAllister, L. B., *A quick introduction to quaternions*, Pi Mu Epsilon J. **9**, 23-25 (1989).  
 [4] Penrose, R., *The road to reality*, (Jonathan Cape, London, 2004).  
 5. Hamdan, N., Guerrero, I., López-Bonilla, J. and Rosales, L., *On the Faraday's complex vector*, The Icfai Univ. J. Phys. **1**, 52-56 (2008).

[6] Martínez-Sierra, G. and Benoit-Poirier, P. F., *Una epistemología histórica del producto vectorial: Del cuaternión al análisis vectorial*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **2**, 201-208 (2008).  
 [7] Leite-Lopes, J., *Introduction to quantum electrodynamics*, (Ed. Trillas, Mexico, 1970).  
 [8] Pauli, W., *Über das wasserstoffspektrum vom standpunkt der neuen quantenmechanik*, Zeits. für Physik **37**, 263-277 (1926).  
 [9] Synge, J. L., *Relativity: the special theory*, (North-Holland Pub., Amsterdam, 1965).  
 [10] Lanczos, C., *The variational principles of mechanics*, (University of Toronto Press, Canada, 1970).  
 [11] De Leo, S., *Quaternions and special relativity*, J. Math. Phys. **37**, 2955-2968 (1996).  
 [12] Acevedo, M., López-Bonilla, J. and Sánchez, M., *Quaternions, Maxwell equations and Lorentz transformations*, Apeiron **12**, 371-384 (2005).  
 [13] Guerrero I., López-Bonilla, J. and Rosales, L., *Rotations in three and four dimensions via 2x2 complex matrices and quaternions*, The Icfai Univ. J. Phys. **1**, 7-13 (2008).  
 [14] López-Bonilla, J., Morales, J. and Ovando, G., *On the homogeneous Lorentz transformation*, Bull. Allahabad Math. Soc. **17**, 53-58 (2002).  
 15. Carvajal-Gómez, B. E., Galaz, M. and López-Bonilla, J., *On the Lorentz matrix in terms of Infeld-van der Waerden symbols*, Scientia Magna **3**, 56-57 (2007).