Circuitos duales y resistencia efectiva

Paco H. Talero[1], Leidy F. Santana[2]
[1]Grupo Física y Matemática, Depto. de Ciencias Naturales, Universidad Central, Carrera 5 No 21-38, Bogotá, Colombia.
2Grupo Fisinfor, Proyecto Curricular Licenciatura en Física, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Carrera 3 No 26a-40, Bogotá, Colombia.

E-mail: ptalerol@ucentral.edu.co, fernandasantana1856@gmail.com

(Recibido el 19 de Agosto de 2009; aceptado el 22 Septiembre de 2009)

Resumen
Se presenta un problema físico simple que ilustra la materialización del aprendizaje activo de la física en ingeniería a través de experimentos discrepantes apoyados con simulación y donde se construye un dispositivo como punto final de la experiencia. El problema físico en estudio consiste en hallar todos los posibles circuitos con resistencia efectiva diferente a partir de *n* resistores con igual resistencia, adicionalmente se pide construir los circuitos, calcular su resistencia efectiva y generalizar la solución para un circuito con *n* resistores.

Palabras clave: Experimentos discrepantes, aprendizaje activo, simulación.

Abstract
We present a simple physical problem which illustrates the realization of active learning in engineering physics through experiments and simulations. The physical problem under study is to find all possible circuits with different effective resistance from *n* resistors with equal resistance, additional the students would make the circuits, calculate the effective resistance and generalize the response for a circuit with *n* resistors.

Keywords: Experiments discrepant, active learning, simulation.

PACS: 01.40.Fk, 01.50.Lc, 01.50.Pa **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCIÓN

El aprendizaje activo de la Física es un proceso educativo que permite a los estudiantes realizar un acoplamiento entre los fenómenos que exploran en las actividades de aula con el pensamiento sobre esos fenómenos pero desde una perspectiva disciplinar. Las actividades de aula que realiza el estudiante es fuente de un aprendizaje generador de conciencia y reflexión [1]. La aplicación de este aprendizaje se basa en una combinación entre el análisis, la experimentación, el debate y las clases expositivas o magistrales que cuentan con las estrategias de aprendizaje basadas en la pedagogía que abarca la metodología y la técnica. En este aprendizaje los estudiantes dejan de ser tan solo espectadores para adquirir un compromiso real con el proceso de aprendizaje, siendo esta la característica más relevante; entre otras ventajas se tiene que en el aprendizaje activo la motivación de los estudiantes se incrementa frente a otras metodologías de trabajo [2]. Así mismo, el aprendizaje activo hace que el estudiante sea responsable de su propio proceso formativo.

Una materialización del aprendizaje activo de la física son los experimentos discrepantes (ExD). Un experimento discrepante es un montaje o arreglo experimental que el profesor de física presenta a su grupo de estudiantes en busca de una explicación al fenómeno físico involucrado [3,4]. Este arreglo al maniobrarlo manifiesta un comportamiento impactante, paradójico y contra-intuitivo donde es común que los estudiantes expresen sorpresa y desequilibrio conceptual. Normalmente el fenómeno puede corresponder a un suceso que ocurre cuando el observador está esperando un resultado pero se manifiesta otro, así se dice que un ExD exhibe una fenomenología sorpresiva, inesperada, extraña y que burla la intuición de quien lo observa y pretende explicarlo [3,4]. Los ExD permiten contextualizar los contenidos físicos a enseñar y desarrollar actitudes científicas en los estudiantes. Además, permiten implementar el método científico como procedimiento natural en la solución del acertijo discrepante planteado por el desarrollo del sistema físico.

De otro lado, los avances en la tecnología informática permiten estudiar de manera diferente los campos de la ciencia, la ingeniería y la didáctica. En el campo de la ciencia y su enseñanza se ha demostrado que las leyes Físicas, Químicas o Biológicas que rigen diversos sistemas se pueden expresar en algoritmos que implementados en un ordenador pueden replicar y determinar el comportamiento de dichos sistemas. En particular en el campo de la física la ejecución de un programa que obedezca a tales algoritmos viene a ser como la realización de un experimento en un espacio diferente al del laboratorio, en un espacio virtual, así la informática presenta enormes facilidades en cuanto a analizar problemas físicos se refiere [5].

En la física educativa los experimentos virtuales han brindado múltiples ventajas frente a los métodos tradicionales. Las simulaciones además de permitir el ahorro de tiempo y dinero, muestran procesos que de otra forma sólo quedarían en lo abstracto, sirven como tutores en algunos procesos algorítmicos, permiten resolver problemas que no tienen una solución analítica sino numérica y finalmente acercan al estudiante a la solución de problemas menos ideales y más cercanos a la realidad y cotidianidad, que es el caso concreto de la física en el contexto de la ingeniería. También desarrollan en el estudiante la intuición física, lo acercan a la física computacional y le brindan un nuevo escenario en la discusión de conceptos físicos.

De acuerdo con lo anterior, cuando se presenta un problema de física aplicada en el contexto de la ingeniería es frecuente encontrar sistemas físicos cuyas ecuaciones diferenciales no admiten soluciones analíticas, así como sistemas con muchos grados de libertad y sistemas que por su propia naturaleza son difíciles, casi imposibles, de resolver mediante métodos habituales. Por ejemplo, el estudio de la caída de cuerpos livianos requiere soluciones numéricas para su pleno entendimiento, el ferromagnetismo se estudia bien con el método de Montecarlo y el flujo vehicular mediante autómatas celulares. De manera que es importante un tratamiento adecuado de los métodos de simulación en física aplicados a la enseñanza de la física en ingeniería.

En este trabajo se ilustra con un ejemplo concreto una metodología basada en el aprendizaje activo de la física en ingeniería materializado en ExD y experimentos virtuales (ExV).

II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE TRABAJO CON ExD y ExV

El profesor de física II, electricidad y magnetismo, plantea un problema simple y divertido a sus estudiantes: Dado un circuito compuesto por *n* resistores de igual resistencia y alimentados por una f.e.m. ideal entre dos puntos A y B hallar todos los posibles circuitos con resistencia efectiva diferente, adicionalmente el profesor pide construir los circuitos, calcular su resistencia efectiva y generalizar la respuesta para un circuito hipotético con *n* resistores.

Para efectuar tal tarea primero el profesor expone de manera magistral durante una o dos clases, a lo sumo, los conceptos requeridos como dualidad en circuitos, reducción serie paralelo y conceptos de instrumentación. Después los estudiantes pasan a explorar construyendo y calculando algunos casos particulares con dos, tres y cuatro resistores. Después, el profesor pide una generalización de la solución para *n* resistores y por último estudiantes y profesores muestran que se requiere un ExV que calcula la resistencia efectiva de un circuito con *n* resistores.

A continuación se muestra el análisis teórico y el ExV o simulación que resuelve el problema.

III. CIRCUITOS DUALES Y RESISTENCIA EFECTIVA

Sobre el circuito de la Fig.1 se realiza una operación de dualidad definida en dos pasos:

1. Se reemplazan los resistores de resistencia R_A y R_B por resistores con valor de resistencia que corresponda a los inversos de su resistencia, $1/R_A$ y $1/R_B$.

2. Entre los puntos A y B se reemplazan los resistores en serie por resistores en paralelo o viceversa.

Lo anterior se ilustra en la Fig. 1.

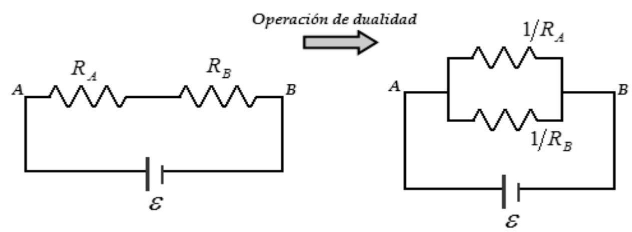

FIGURA 1. Definición de dualidad.

Se calcula ahora la resistencia efectiva del circuito después de la operación de dualidad:

De acuerdo con la Fig. 1 la resistencia efectiva es el producto dividido en la suma de los resistores, así:

$$R'_e = \frac{\frac{1}{R_A}\frac{1}{R_B}}{\frac{1}{R_A}+\frac{1}{R_B}}. \tag{1}$$

Al simplificar (1) se tiene:

$$R'_e = \frac{1}{R_A + R_B}. \tag{2}$$

El resultado (1) y (2) se pueden relacionar como:

$$R'_e = \frac{1}{R_e}. \tag{3}$$

De acuerdo con lo anterior se dice que los circuitos de la Fig.1 son duales. [6]

Como ejemplo el lector podrá observar los circuitos de la Fig. 2.

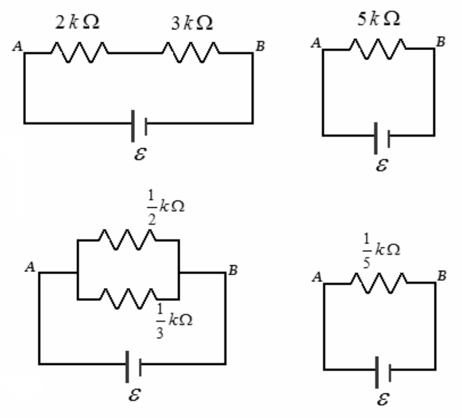

FIGURA 2. Ejemplo de circuitos duales.

Resulta interesante aplicar la operación de dualidad a cualquier circuito con el fin de obtener otro cuya resistencia efectiva sea numéricamente igual a inverso del primer circuito.

Un ejemplo consiste en el circuito mostrado en la Fig. 3.

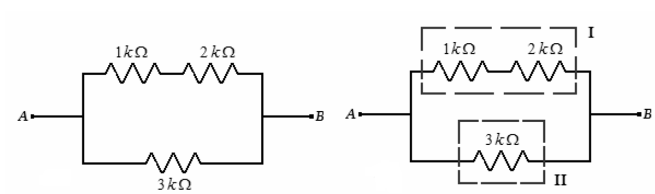

FIGURA 3. En la izquierda un circuito con tres resistores, a la derecha el circuito reducido a dos cajas de resistores.

La configuración en la derecha de la Fig. 3 es equivalente a la mostrada en la Fig.4. Aquí se agrupan los resistores en bloques I, II.

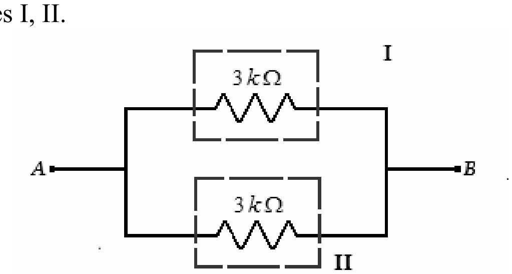

FIGURA 4. Configuración equivalente a la configuración de la derecha en la Fig.3.

Al aplicar la operación de dualidad para obtener una configuración con los bloques en serie que contienen, en este caso, dos resistores de $1k\Omega/3$ en serie, ver Fig. 5.

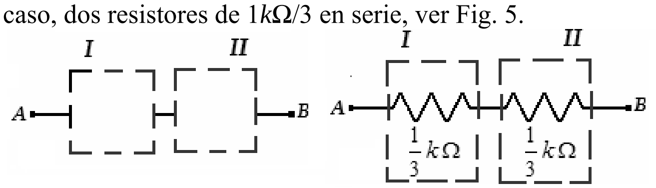

FIGURA 5. Configuración equivalente en bloques.

Los circuitos mostrados en las Fig.4 y Fig.5 tienen resistencias efectivas de $3k\Omega/2$ y $2k\Omega/3$ respectivamente, como es de esperar de una operación de dualidad. De acuerdo con esto para conseguir el circuito dual de un circuito de antemano dado es necesario no solo reacomodar los resistores sino cambiarlos por otros de diferentes valores de resistencia.

IV. RESISTENCIA EFECTIVA EN CIRCUITOS CON *n* RESISTORES DE IGUAL RESISTENCIA

Dado un circuito resistivo con n resistores de igual resistencia alimentado entre los puntos A y B por una f.e.m. ideal y con resistencia efectiva R se desea reacomodar los n resistores de manera que su resistencia efectiva sea numéricamente igual a $1/R$, es decir a su inverso multiplicativo. Puesto que todo conjunto de resistores entre los puntos dados se puede reemplazar por un resistor con alguna resistencia efectiva entonces es posible tomar un circuito con n resistores y dividirlo en dos grupos de n_I y n_{II} resistores y aplicar la operación de dualidad. Si n_I o n_{II} son mayores que la unidad se continua aplicando la operación hasta que el número de resistores de los subgrupos sea la unidad.

Como ilustración del anterior planteamiento se muestra el circuito mostrado en la Fig. 6.

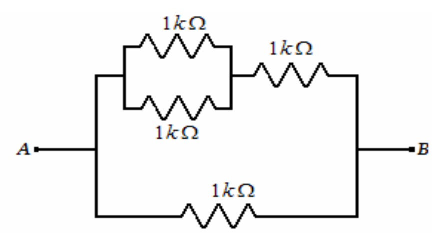

FIGURA 6. Circuito con resistores de igual resistencia.

La resistencia efectiva entre los puntos A y B en este circuito es $3k\Omega/5$, como el lector puede constatar. ¿Cuál es la nueva configuración que formada con los mismos resistores tiene una resistencia efectiva de $5k\Omega/3$? Para resolver esta pregunta se procede de acuerdo a lo planteado al inicio de esta sección.

Se separa el circuito en dos bloques que contienen un conjunto de resistores $n_I=3$ y $n_{II}=1$ respectivamente, ver Fig. 7.

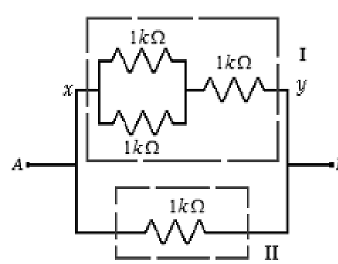

FIGURA 7. Reducción del circuito a dos bloques.

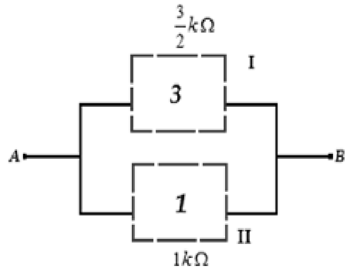

FIGURA 8. Resistencia efectiva de los bloques.

Al aplicar la operación de dualidad al circuito asumiendo cada bloque como un único resistor con resistencia efectiva 3kΩ/2 y 1kΩ, se encuentra la configuración mostrada en la Fig. 8. En la Fig. 9 se muestra el resultado de realizar la operación dual.

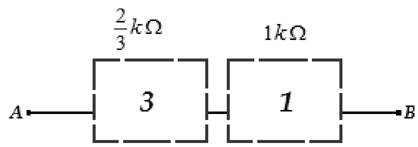

FIGURA 9. Circuito efectivo luego de realizar una operación de dualidad.

Nótese que la resistencia efectiva de esta configuración final es 3kΩ/5, que es lo que se buscaba. No obstante, el primer bloque debe tener 3 resistores cuya resistencia efectiva sea 2kΩ/3, para resolver tal situación se observa el bloque I del circuito mostrado en la Fig. 8, esto sugiere la aplicación directa al bloque I, con $n_I = 3$ resistores, de la operación de dualidad una vez más. La configuración de resistores en el interior del bloque I se muestra en la Fig. 10.

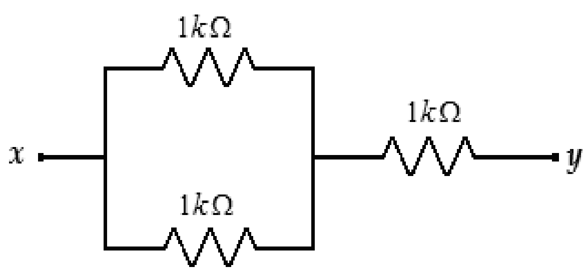

FIGURA 10. Configuración de resistores al interior del bloque I cuya resistencia es de 2kΩ3.

Ahora se organizan en bloques los resistores del circuito de la Fig. 10, como muestra la Fig. 11.

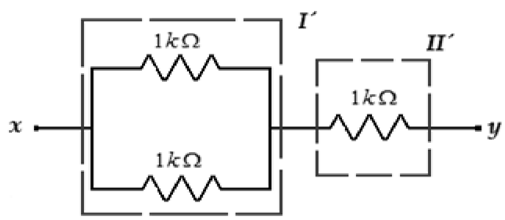

FIGURA 11. Reducción en bloques I' y II'.

Se calcula la resistencia efectiva de cada bloque del circuito de la Fig. 11 y se obtiene el resultado de la Fig. 12.

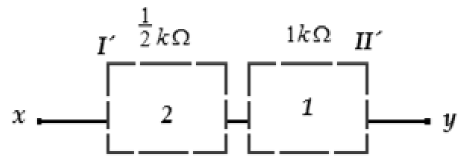

FIGURA 12. Configuración efectiva del circuito en bloques después de una operación de dualidad.

Se aplica la operación de dualidad al circuito efectivo en bloques de la Fig. 12 para obtener el circuito mostrado en la Fig. 13.

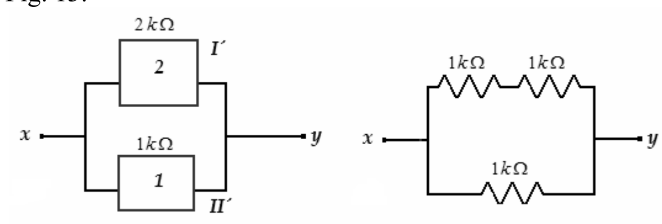

FIGURA 13. Configuración final luego de aplicar una operación de dualidad al bloque I'.

La resistencia efectiva entre los puntos *x*, *y* es 2kΩ/3 como era de esperarse. Sin embargo, el bloque I' aún tiene dos resistores que necesitan ser acomodados de forma que su resistencia efectiva sea 2kΩ. Para realizar esto hay que aplicar de nuevo la operación de dualidad al bloque I' de la Fig. 13 proceso que es análogo al descrito con inmediata anterioridad. El resultado final del circuito dual del mostrado al inicio en la Fig. 6 es el mostrado en la Fig. 14.

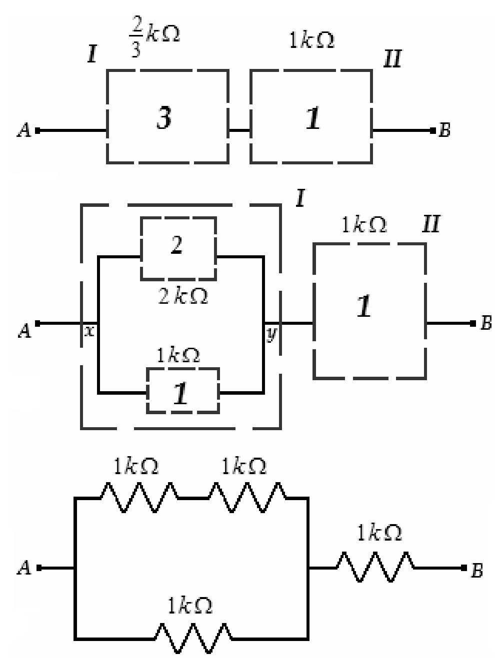

FIGURA 14. Arriba se observa la primera reducción en bloques, en el centro la segunda reducción y abajo se muestra el circuito dual final con resistencia efectiva 5kΩ/3.

Para encontrar las diferentes equivalencias de un circuito con n resistores de igual resistencia cuyas resistencias efectivas sean sus inversos multiplicativos se realiza el análisis con 2, 3, 4 y 5 para buscar una generalización. Cabe anotar que el procedimiento es válido sólo para resistores de igual resistencia, pero también para cualquier valor deseado gracias a que siempre se puede realizar un cambio de unidad diferente a la ofrecida en el mercado, en adelante la unidad de resistencia es arbitraria.

Para un circuito con 2 resistencias de una unidad se puede configurar sólo de dos maneras: los dos resistores en serie o los dos en paralelo. Se parte de cualquiera de las dos configuraciones y con una operación de dualidad se obtiene la otra. El conjunto de resistencias se compone de dos elementos.

$$u_2 = \{2, 1/2\}. \tag{4}$$

Donde el subíndice en la letra u significa el número de resistores.

Cuando se tiene un circuito con $n=3$ resistores es necesario agruparlos en dos bloques que contendrán a su vez uno y dos resistores y de esta manera aplicar las operaciones de dualidad, los bloques están en serie o en paralelo que a su vez pueden estar en serie o en paralelo como muestra el diagrama de árbol de la Fig. 15.

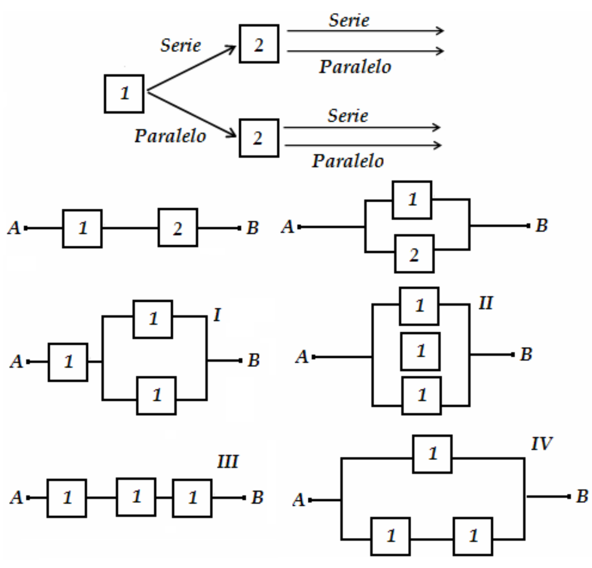

FIGURA 15. Arriba se muestra las combinaciones posibles de los bloques, en el centro las configuraciones de los bloques más extremos y abajo la configuración completa con bloques que contienen solo un resistor.

Las resistencias efectivas de los circuitos mostrados en la Fig. 15 son mostrados en la tabla I.

Tabla I. Resistencia efectiva para un circuito con $n = 3$.

CIRCUITO	*RESISTENCIA EFECTIVA ENTRE A Y B*
I	*3/2*
II	*1/3*
III	*3*
IV	*2/3*

Para obtener los resultados de la tabla I se procede de manera siguiente:

Sobre el conjunto de u_2 se realizan dos operaciones con el resistor sobrante, que también se puede representar como u_1, estas operaciones son la reducción en serie s y en paralelo p. Así que si el conjunto u_n actúa en paralelo sobre un conjunto u_m su notación será:

$$u_n \hat{p} u_m, \tag{5}$$

y si el conjunto u_n actúa en serie sobre el conjunto u_m su notación será:

$$u_n \hat{s} u_m, \tag{6}$$

en ambos casos el resultado es un conjunto de la nueva configuración de resistores y sus valores no se repiten por tratarse de configuraciones idénticas, la configuración resultante se denota y define como:

$$\Gamma^{[N]}_{[n,m,r,p]} = (u_n \hat{p} u_m) \cup (u_n \hat{s} u_m) \cup \ldots \tag{7}$$

La definición (7) es suficiente para calcular todas las resistencias efectivas que un circuito de N resistores puede tener. Los subíndices n, m, r, p se refieren al número de resistores que contiene cada bloque principal.

Como ejemplo de (7) se construyen algunos circuitos. Para un circuito con N=2 resistores se tiene sólo las configuraciones mostradas en la Fig. 16 en la que en cada bloque hay sólo un resistor.

El conjunto de resistores se puede observar en la tabla II.

$$u_2 = (u_1 \hat{p} u_1) \cup (u_1 \hat{s} u_1) \tag{8}$$

Tabla II. Resistencia efectiva para un circuito con N= 2.

$\hat{p}$ / $\hat{s}$	1
1	$1/2$
	2

$$u_2 = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$$

Si ahora se tiene N=3, se encuentra sólo una posibilidad de subdividir el bloque de 3 resistores en un bloque de un resistor y el otro de dos, así se encuentra.

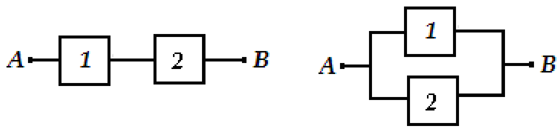

FIGURA 16. Configuración de bloques principales.

Es importante ver que el bloque de dos resistores debe ramificarse como se muestra en la tabla II. La nueva tabla generadora de resistencias efectivas es la tabla III.

$$(u_2\,\hat{p}\,u_3)\cup(u_2\,\hat{s}\,u_3) \qquad (9)$$

Tabla III. Resistencia efectiva para un circuito con N= 3.

$\hat{p}$ / $\hat{s}$	$1/2$	2
1	$1/3$	$2/3$
	$3/2$	3

$$u_3=\left\{\frac{1}{3},3,\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right\}$$

Para $N=4$ se nota que las parejas (1,3) y (2,2) suman precisamente 4 de manera que se tiene dos tablas:

Tabla IV. Resistencia efectiva para un circuito con N= 4.

$\hat{p}$ / $\hat{s}$	2	$1/2$
2	1	$2/5$
	4	$5/2$
$1/2$	$2/5$	$1/4$
	$5/2$	1

$$(u_1\,\hat{p}\,u_3)\cup(u_1\,\hat{s}\,u_3)$$

Tabla V. Resistencia efectiva para un circuito con N= 4.

$\hat{p}$ / $\hat{s}$	$1/3$	3	$2/3$	$3/2$
1	$3/4$	$3/5$	$2/5$	$1/4$
	$4/3$	4	$5/3$	$5/2$

$$z^{[4]}_{[1,2,3]}=\left\{1,\frac{1}{4},4,\frac{2}{5},\frac{5}{2},\frac{3}{4},\frac{4}{3},\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right\}$$

Este es el conjunto de todas las resistencias efectivas para N=4. El proceso es el mismo para un circuito con N resistores.

I. V. MATERIALIZACIÓN DEL EXV

Los resultados anteriores se pueden generalizar a través de un programa en Mathematica 4.0 que ha sido brevemente adaptado de [6] y que se muestra en la Fig. 17. Este es el experimento virtual, pues permite estudiar el sistema físico en dominios donde en la práctica sería imposible. El ExV arroja en particular para 5 resistores los siguientes resultados:

$$u_5=\left\{\tfrac{1}{5},\tfrac{2}{7},\tfrac{3}{8},\tfrac{3}{7},\tfrac{1}{2},\tfrac{4}{7},\tfrac{5}{8},\tfrac{5}{7},\tfrac{4}{5},\tfrac{5}{6},\tfrac{6}{7},\tfrac{7}{6},\tfrac{6}{5},\tfrac{5}{4},\tfrac{7}{5},\tfrac{8}{5},\tfrac{7}{4},2,\tfrac{7}{3},\tfrac{8}{3},\tfrac{7}{2},5\right\}.$$

```
NumResistors = 5;
 ClearAll[CirclePlus, Diamond];
SetAttributes[
   {CirclePlus, Diamond}, {Flat, Orderless}];
Ser[a_, b_] := a⊕b;
Par[a_, b_] := a⋄b;
F[a_, b_] :=
  Flatten[Outer[Ser, a, b]⋃Outer[Par, a, b], 2];
S = {{R}, {R⊕R, R⋄R}};
Do[
    SX = F[S[[1]], S[[i - 1]]];
     Do[
        SX = Flatten[SX⋃F[S[[k]], S[[i - k]]], 2];
      , {k, 2, i / 2}];

     S = S⋃{SX};
  , {i, 3, NumResistors}];
 S[[NumResistors]];

SetAttributes[{CirclePlus, Diamond},
     {NumericFunction, OneIdentity}];
a_⊕b_ := a + b;
a_⋄b_ := a * b / (a + b);
CirclePlus[x_] := x;
Diamond[x_] := x;
fr = S[[NumResistors]] ⋃S[[NumResistors]] ;
Print[S[[NumResistors]] /. R -> 1];
Print[fr /. R -> 1];
```

FIGURA 17. Programa que calcula la resistencia efectiva de N resistores de igual resistencia.

VI. CONCLUSIONES

Se expuso un ejemplo concreto de la aplicación de una metodología de la enseñanza de la física basada en el aprendizaje activo de la física materializado en experimentos discrepantes (ExD) y virtuales (ExV) que conllevan a la solución de problemas prácticos con contexto físico. En particular se estudio el problema de encontrar el conjunto de resistencias efectivas diferentes para *n* resistores iguales. El trabajo concluye al adaptar un programa y usarlo como ExV.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren expresar su agradecimiento a los compañeros del grupo Física y Matemática y al grupo Fisinfor por los comentarios y sugerencias.

REFERENCIAS

[1] Hake, R., *Interactive engagement vs. traditional methods: a six-thousand student survey of mechanics test data for introductory physics*, Am. J. Phys. **66**, 64-74 (1998).

[2] Barbosa, L. H., *Los Experimentos Discrepantes en la enseñanza de la Física*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **2**, 246-252 (2008).

[3]Talero, P. H., Barbosa, L.H., *Botellas equilibristas: Extracción discrepante de un billete desde la boca de dos botellas verticales invertidas*, Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 433-438 (2009).

[4] Barbosa, L. H., Talero, Paco H., *La compuerta mágica: Descripción de un flujo discrepante en dos globos elásticos interconectados,* Lat. Am. J. Phys. Educ. **3**, 135-139 (2009).

[5] Stephen, W., *Programación en ciencias y en matemáticas, Investigación y ciencia*, *Prensa Científica S.A* (1984)

[6] Amengual, A., *The intriguing properties of the equivalent resistances of n equal resistors combined in series and in parallel*, Am. J. Phys. **68**, 175-179 (2000).