El significado de la Relatividad General

EDVCATIO PHYSICORVM
QVO NON ASCENDAM?

Rafael Andrés Alemañ Berenguer[1,2]

[1]*Departamento de Ciencia de Materiales, Óptica y Tecnología Electrónica. Universidad Miguel Hernández, Avda. Universidad, s/n. Edif. Torrevaillo - 03202l - Elche (Alicante – España).*

[2]*Sociedad Astronómica de Alicante (Grupo de gravitación y mecánica celeste), Apartado de Correos 616, 03080-Alicante (España).*

E-mail: agrupación.astroalicante@gmail.com

(Recibido el 3 de Noviembre de 2009; aceptado el 12 de Enero de 2010)

Resumen

En este artículo se exponen los fundamentos de las ecuaciones gravitatorias de Einstein, así como una versión simplificada de las mismas sin notación tensorial, junto con una breve discusión sobre sus implicaciones cosmológicas y la predicción de ondas gravitatorias. Se intenta en todo momento conectar el formalismo matemático con nuestra intuición física sin pérdida de rigor. Un tratamiento semejante puede resultar de utilidad tanto para profesores como para estudiantes que aborden cursos elementales sobre la gravitación relativista, insistiendo en su significado físico y preparando el camino para estudios posteriores.

Palabras clave: Relatividad general, métrica, gravitación, constante cosmológica, ondas gravitatorias.

Abstract

In this paper, the foundations of Einstein's gravitational equations are expounded, as well as a simplified versión of then without tensorial notation, together with a brief discussion on their cosmological implications and the prediction of gravitational waves. The explicit purpose is to link the mathematical formalism to our physical intuition without loss of rigour. Such an approach may be useful as much for teachers as for students involved in elementary courses on relativistic gravitation, by insisting on its physical meaning and clearing the way towards further studies.

Keywords: General Relativity, metrics, gravitation, cosmological constant, gravitational waves.

PACS: 04.25.-g, 04.20.-q, **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Entre las numerosas conmemoraciones celebradas en el año 2009 hubo una que pasó un tanto desapercibida, sobre todo para el gran público, cual fue el aniversario de la primera corroboración experimental –mediante observaciones astronómicas– de una predicción de la Relatividad General. En efecto, en el año 1919, calientes aún los rescoldos de la I Guerra Mundial, un equipo promovido por el astrónomo real, Sir Arthur Eddington se dispuso a medir la desviación de los rayos de luz procedentes de estrellas lejanas que pasasen junto a nuestro Sol durante el eclipse de ese mismo año. A tal fin se enviaron sendas expediciones a una a la Isla Príncipe, en la costa occidental de África, encabezada por Eddington, y otra a la ciudad de Sobral, al norte de Brasil, dirigida por Frank Watson Dyson, responsable general del proyecto. Sus resultados comprobaron, dentro del intervalo de error esperable según la tecnología de la época, la superior exactitud de los pronósticos ofrecidos por la teoría gravitatoria de Einstein [1].

Son numerosísimos los textos que abordan la deducción completa de las ecuaciones de la relatividad general con gran elegancia y minuciosidad [2, 3]. Pero por esa misma razón es difícil encontrar un compendio en el que aparezcan condensados tanto el procedimiento formal de su desarrollo como el significado físico que encierran. En las páginas siguientes se tratará de exponer una deducción semi-rigurosa de las ecuaciones gravitatorias de Einstein insistiendo en la oportuna interpretación física de su aparato matemático, subrayando la originalidad de su concepción de la geometría espacio-temporal, para finalizar comentando algunas de sus más destacadas consecuencias.

Los siguientes desarrollos resultarán perfectamente asequibles si se posee tan solo un dominio adecuado de las bases de la relatividad especial, así como un ligero conocimiento del cálculo tensorial y la geometría diferencial. Por ejemplo, a diferencia del caso relativista especial, en el ámbito de la relatividad general no podemos hablar de velocidades relativas entre dos partículas, excepto si ambas se hallan en el mismo punto del espacio-tiempo (en el mismo lugar y en el mismo instante). Como tantas otras sutilezas en la gravitación de Einstein, el motivo reside en la curvatura espacio-temporal y su consiguiente influencia en el transporte paralelo de cualquier magnitud.

Si concebimos un vector como una pequeña flechita contenida toda ella en un punto concreto del espacio-tiempo, para comparar dos vectores inicialmente situados en distintos puntos espacio-temporales hemos de tomar uno de ellos y transportarlo sin alteraciones hasta el otro. El traslado de un vector a lo largo de un camino sin que experimente rotaciones ni dilataciones o contracciones, se denomina "transporte paralelo", y no plantea dificultades en un espacio-tiempo sin curvatura, como el de Minkowski en relatividad especial. No obstante, cuando la gravedad se hace presente el espacio-tiempo –como después se verá– deja de ser tan sencillo, y el transporte paralelo se vuelve dependiente de la trayectoria escogida.

No resulta necesario –e incluso en ocasiones se convierte en un estorbo– imaginar la curvatura espacio-temporal como si se debiese a la inmersión de nuestra variedad 4-dimensional en un espacio-tiempo plano de dimensión superior. La tentación es comprensible, pues nuestros hábitos mentales se forjan en la percepción visual de la curvatura de diversas superficies aproximadamente bidimensionales sumergidas en nuestro espacio tridimensional ordinario. Sin embargo, para manejar esta nueva manera de entender la curvatura basta la noción de "vector tangente", y en general toda la maquinaria del cálculo tensorial, explícitamente destinado a manipular las magnitudes intrínsecamente (esto es, sin referencia a espacios o dimensiones externas, sólo dentro del espacio-tiempo tetradimensional que nos acoge). Esa es la razón de la gran importancia de los tensores como herramientas matemáticas en relatividad general.

Si preferimos dejar en segundo plano el contenido geométrico espacio-temporal, la teoría gravitatoria de Einstein puede interpretarse en términos de las aceleraciones relativas sufridas por partículas de prueba en caída libre. Hablamos de "partículas de prueba" para referirnos a porciones de materia que, sin ser necesariamente puntuales (cabe admitir para ellas alguna extensión o estructura interna), tienen tan poca energía e impulso que la gravedad ejercida por ellas mismas –o dicho de otro modo, sus efectos sobre la curvatura espacio-temporal– son por completo desdeñables. Por otra parte, un cuerpo se considera en caída libre cuando su movimiento tan solo se ve afectado por la gravedad. Los objetos en caída libre describen geodésicas espacio-temporales, lo que es un modo equivalente de decir que sus vectores velocidad se transportan paralelamente a sí mismo (sin rotaciones ni estiramientos) a lo largo de la trayectoria. Así pues, el concepto de geodésica constituye la transposición natural a una variedad curva de nuestra idea de línea recta.

II. MÉTRICA Y AFINIDAD

Un primer paso en la senda hacia la gravitación einsteiniana, se da generalizando la fórmula de la distancia típica de la geometría euclídea, que viene a ser una sofisticación del conocido del teorema de Pitágoras [4]. Comencemos preguntándonos cómo se habría de escribir la métrica en un sistema de coordenadas en el que usásemos como ejes líneas curvas en lugar de rectas. Esas curvas pueden estar tan onduladas y retorcidas como queramos, de forma que sobre ellas las escalas de medidas se hallen completamente distorsionadas. Entonces necesitaremos emplear ciertos coeficientes $g_{\mu\nu}$ que serán funciones dependientes del punto en que nos encontremos. Además, con el fin de evitar el efecto de las distorsiones de los ejes curvados, definimos la métrica para vectores y coordenadas de tamaño infinitesimal y escribimos

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx_\mu dx_\nu \ , \tag{1}$$

donde hemos aplicado el procedimiento habitual de omitir el paréntesis al elevar al cuadrado los términos de la métrica.

Esta es la fórmula fundamental de la métrica, en la que hemos usado el convenio de Einstein según el cual la presencia de índices repetidos (en los coeficientes de la métrica y en las coordenadas) significa que se suma sobre todos los valores que admitan tales índices. Cuando calculamos una distancia sobre el plano los índices van del 1 al 2, pero si aumentamos el número de dimensiones su abanico de posibles valores también aumentará. En tres dimensiones los índices pueden tomar valores del 1 al 3, en cuatro recorrerán del 1 al 4, y así hasta un número arbitrario de dimensiones. En el caso euclídeo, como el de la geometría vectorial en el plano, los coeficientes diagonales de la métrica son todos iguales a uno, mientras que los no diagonales son cero. No ocurre lo mismo con la métrica en la geometría de Minkowski. Su formulación usual $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, puede reescribirse como $ds^2 = dx_0^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$ donde $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Así es fácil comprobar que los coeficientes no diagonales se anulan también, pero los diagonales no son todos iguales a la unidad; el primero es 1 pero los demás son todos iguales a -1. Es la llamada métrica Minkowskiana o "pseudoeuclídea".

Se denominan *métricas riemannianas* a aquéllas cuyos coeficientes se aproximan tanto más a los de una métrica euclídea cuanto más pequeño se hace el sistema de coordenadas. Si la diferencia entre nuestra métrica y la euclídea puede hacerse tan pequeña como se quiera reduciendo el tamaño de nuestros ejes de coordenadas, entonces resulta ser una métrica riemanniana. Por el contrario, si sobre un entorno infinitesimal nuestra métrica tiende a convertirse en la de Minkowski, se denomina *pseudorriemanniana*. Es natural avanzar que las métricas interesantes para nosotros en la Relatividad General serán las pseudo-riemannianas, puesto que en un entorno infinitesimal del espacio-tiempo curvado parecerá que nos hallemos sobre una variedad plana, al igual que un pequeño huerto parece llano aunque se haya labrado sobre una superficie esférica como la de la Tierra.

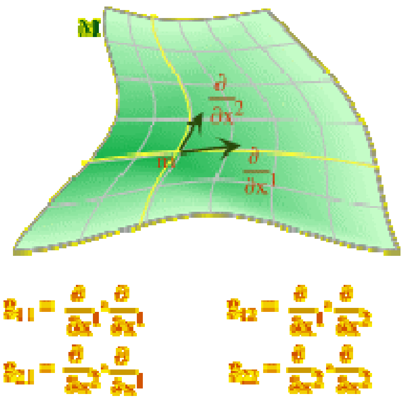

FIGURA 1. Los componentes del tensor métricos se definen mediante las derivadas parciales con respecto a las coordenadas escogidas sobre la variedad de base.

Otra importantísima característica de la métrica consiste en el hecho de que es un tensor, es decir, una cantidad matemática que conserva invariables una serie de propiedades cuando se transforma de un sistema de coordenadas a otro. En concreto, el tensor métrico posee la decisiva propiedad de mantener constante la distancia entre dos puntos calculada con la fórmula de la métrica, aunque sus componentes –los coeficientes de la métrica– cambien al pasar de un sistema de coordenadas a otro. Supongamos, por ejemplo, que nuestro tensor métrico en coordenadas cartesianas es $g_{\mu\nu}$ y que al pasar a coordenadas esféricas sus componentes sean $g'_{\mu\nu}$. Pues bien, multiplicando los coeficientes de cada sistema por las correspondientes coordenadas, la distancia entre dos puntos dados es la misma independientemente de las coordenadas empleadas. Esto es $g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu = g'_{\mu\nu}\, dx'_\mu\, dx'_\nu$, y por tanto $ds = ds'$.

La exigencia del carácter tensorial de la métrica es un requerimiento lógico elemental, pues la distancia entre dos puntos no puede depender del tipo de variables que usemos para etiquetarlos. Y es de suma importancia a la hora de aplicarlo a la gravedad relativista, ya que si la gravitación es una curvatura del espacio-tiempo, los sistemas de referencia sometidos a un campo de gravedad verán sus coordenadas deformadas por dicha curvatura. Por ello la única manera de que distintos observadores concuerden en sus medidas de un intervalo espacio-temporal (que era constante para todos los observadores en la RE y ha de seguir siéndolo aquí) es calculándolo mediante el tensor métrico [5].

A partir de la métrica podemos construir unos coeficientes, $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$, denominados "conexión afín", o más propiamente, símbolos de Christoffel (que no son tensores mixtos de tercer rango), definidos como:

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}\left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\sigma}}\right). \qquad (2)$$

El significado físico de la conexión afín consiste en que nos permite comparar vectores y tensores en distintos puntos, estableciendo relaciones que de otro modo no estarían definidas. Cuando tenemos ya una afinidad Γ, el transporte paralelo del vector a_k (el desplazamiento que en cada punto de la trayectoria mantiene inalterada la orientación del vector) se define justamente por medio de la derivada covariante, $a_{k;i}. \equiv \partial_i a_k - \Gamma^m{}_{ki} a_m$, construida a su vez mediante la afinidad.

En relación con ello, interesa introducir el concepto de vector de Killing [6]. Un tetravector unitario de Killing se define como un tetravector unitario orientado a lo largo de una dirección de isometría de la métrica. Es decir, moviendo cada punto de un objeto en la dirección de un vector de Killing, las distancias entre los puntos del objeto no se alteran. En relatividad general resultan muy útiles puesto que nos permiten, en ciertas condiciones, construir leyes de conservación y obtener otros invariantes espacio-temporales.

Por ejemplo, si el tensor métrico es independiente de la coordenada x_ζ, entonces el 4-vector unitario en la dirección de x_ζ es un tetravector unitario de Killing, $K = e_\zeta$, y tendremos

$$g_{\mu\nu}K^{\mu} = g_{\zeta\nu} \quad . \qquad (47)$$

También podemos definir un tensor de Killing de segundo rango, de forma que junto con la métrica y la 4-velocidad relativista generen una magnitud escalar.

$$g_{\mu\kappa}g_{\rho\nu}K^{\mu\rho}U^{\kappa}U^{\nu} = constante\ . \qquad (48)$$

En general, un 4-vector será un 4-vector de Killing si, y sólo si, satisface la relación

$$K^{\mu}{}_{;\nu} + K^{\nu}{}_{;\mu} = 0. \qquad (49)$$

Igualmente tendremos que $g_{\mu\nu}K^{\mu}U^{\nu} = constante$.

III. COMIENZA LA BÚSQUEDA

El primer obstáculo que Einstein hubo de afrontar, consistió traducir las ecuaciones de la gravitación de la física clásica al lenguaje tensorial en cuatro dimensiones de un espacio-tiempo curvo [7]. La primera ecuación cuya contrapartida relativista buscó Einstein fue para el potencial gravitatorio U la llamada "ecuación de Poisson", $\nabla^2 U = 0$.

Esta igualdad expresa un resultado tan simple como que en un volumen que no encierra masa alguna, o no existe campo gravitatorio, o entra el mismo número de líneas de fuerza que sale. En caso contrario, si hay una cierta cantidad de masa dentro del volumen escogido, tendremos un flujo vectorial neto atravesando el contorno de dicho volumen. La ecuación gravitatoria con que la física clásica describía esta situación era la de Laplace, en la que el miembro de la izquierda ya no era igual a cero sino proporcional a la densidad de masa encerrada en el volumen en cuestión: $\nabla^2 U = -4\pi G\rho$.

En tanto que la fórmula de Poisson para el vacío está referida a una situación en la que no hay campo de gravedad o su efecto neto es nulo, parecería lo más natural hallar su correlato relativista en una ecuación tensorial que señalase que la curvatura del espacio-tiempo tetradimensional es cero. Una perfecta candidata para ello se obtendría tomando un tensor que represente esa curvatura e igualándolo a cero. La elección más natural es la del *tensor de curvatura*, o tensor de Riemann-Christoffel en honor de sus descubridores. Mediante una combinación de los coeficientes de la métrica y sus derivadas, Riemann y Christoffel llegaron a un tensor con cuatro subíndices que contenía toda la información necesaria sobre la curvatura intrínseca de una variedad con un número cualquiera de dimensiones. Igualando ese tensor a cero tendríamos $R_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$.

El lado amargo de esta tentativa es que constituye una condición demasiado restrictiva para nuestros propósitos. La anulación del tensor de curvatura implica que la variedad en la que así ocurra será llana en todas partes (la curvatura global será siempre cero y no habrá campos de gravedad en ninguna parte), por lo que no podría contener casos como los descritos por la ecuación de Laplace. Lo que buscamos es un tensor cuya anulación local sea un caso particular dentro de un conjunto más amplio que contemple la presencia de materia y la aparición de campos gravitatorios, tal como la ecuación de Poisson se deduce de la de Laplace cuando $\rho = 0$. Para visualizarlo gráficamente, podríamos decir que el tensor de Riemann-Christoffel nulo simboliza una superficie llana como la de un espejo, mientras que nosotros precisamos representar algo parecido a las dunas de un arenal, con sus hondonadas y protuberancias que cambian la superficie de un lugar a otro aunque en algunas zonas quede parcialmente lisa.

A partir del tensor de Riemann y mediante un simple paso matemático, Einstein obtuvo el tensor que necesitaba, el llamado tensor de Ricci, con sólo dos índices [8]. Su anulación cumplía el mismo papel en el ámbito relativista que la ecuación de Poisson en la física clásica, $R_{\mu\nu} = 0$.

Ahora llegaba el momento de enfrentarse a la etapa más complicada del problema: hallar un análogo tensorial a la ecuación de Laplace. La masa había sido en la antigua ley de Newton la única fuente del campo gravitacional, pero las cosas no eran tan sencillas en la teoría einsteniana. No sólo era que ahora la energía contribuía también al campo por su equivalencia con la masa, sino que había de tenerse en cuenta asimismo el tetraimpulso del sistema debido a que al incrementarse la velocidad crecía igualmente la masa (≡ energía) relativista y el campo gravitacional generado por ella. El tensor construido con la masa-energía y el impulso de un sistema se simboliza como $T_{\mu\nu}$ [9]. Este tensor cuenta con 16 componentes cuando se escribe para cuatro dimensiones, que provienen de multiplicar los cuatro posibles valores del índice μ por otros tantos correspondientes al índice ν.

Como los valores que es posible adoptar son $\mu = 0, 1, 2, 3$, y lo mismo para el otro índice, el número total de parámetros $T_{\mu\nu}$ que se distingan por sus subíndices es de $4 \times 4 = 16$. Las componentes de este tensor se construyen a partir de la densidad de energía e impulso en un cierto volumen espacio-temporal, y del flujo de esas magnitudes que entra o sale atravesando su frontera. La densidad de impulso-energía se calcula tomando el 4-vector impulso-energía, y dividiendo cada una de sus componentes entre el volumen tetradimensional (el valor del volumen espacial multiplicado por un periodo de tiempo) que estamos examinando. En consecuencia, la densidad de energía-impulso constará también de cuatro componentes. Por otra parte, el flujo del vector ξ posee doce: el producto de las cuatro componentes del vector impulso-energía por las tres direcciones del espacio en que dicho vector puede entrar o salir del volumen en cada unidad de tiempo [10]. La suma de las cuatro componentes de la densidad de impulso-energía más las doce de su flujo, arroja justamente un total de dieciséis. A partir de la densidad de masa-energía propia ρ (densidad medida por un observador en reposo relativo) de la región del espacio considerada, y las velocidades $dx_\mu / d\tau$, con $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$ (t es el tiempo en nuestro referencial y τ es el tiempo propio del referencial asociado al volumen que estudiamos), las $T_{\mu\nu}$ pueden expresarse como:

$$T^{\mu\nu} = \rho \frac{dx_\mu}{d\tau}\frac{dx_\nu}{d\tau} \ , \tag{3}$$

donde el acceso a las $T_{\mu\nu}$ a partir de las $T^{\mu\nu}$ es una operación matemática directa ("subir o bajar índices") realizada mediante el tensor métrico.

El hecho de que el espacio sea isótropo –es decir, posea las mismas propiedades en cualquier dirección– permite rebajar algo la complicación de este tensor considerando que existe una cierta simetría en su construcción. Si todas las direcciones del espacio son equivalentes, es por completo indiferente dónde coloquemos cada eje de coordenadas o cómo llamemos a cada uno. Así el flujo de la componente x del impulso a lo largo de la dirección y ha de ser igual al flujo de la componente y a lo largo del eje x, con lo que T_{xy} debe coincidir con T_{yx}.

En otras palabras, el tensor de energía debe ser simétrico de forma que se cumpla $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$. Es fácil darse cuenta de que esto reduce a diez el número de componentes independientes de este tensor. Pero eso no es todo; todavía es posible establecer cuatro igualdades que en cierto modo expresarían la conservación de la energía y el impulso, lo que nos deja tan sólo con seis componentes independientes a dilucidar de forma empírica [11]. Hasta aquí únicamente hemos hablado de magnitudes físicas, como la energía o el impulso; ¿cómo se relaciona todo esto con la geometría espacio-temporal?

En relación con la curvatura del espacio-tiempo, las condiciones impuestas al tensor de energía tienen una clara contrapartida geométrica. La isotropía de las direcciones espaciales es obvia y también se concreta en la simetría del tensor de Ricci, $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. De igual manera descubrimos una conexión entre las cuatro condiciones que garantizan la conservación de la energía y el impulso, y la propiedad de ser independiente del sistema de coordenadas que caracteriza a la curvatura de una variedad [12]. Al cambiar de sistema de coordenadas la forma de los coeficientes de la métrica se verá modificada, aunque eso no varíe la curvatura del espacio-tiempo. La razón es fácil de comprender: si usamos a capricho coordenadas rectangulares o curvilíneas para etiquetar los puntos en un plano, eso no alterará el valor nulo de su curvatura.

Puesto que podemos cambiar arbitrariamente las coordenadas en cada punto del espacio-tiempo sin modificar su curvatura, ha de haber cuatro condiciones (una para cada coordenada espacio-temporal) impuestas sobre cualquier posible transformación de coordenadas que nos lo garantice. Estas prescripciones matemáticas –las denominadas “identidades de Bianchi”– existen y es una suerte, o una profunda confirmación teórica, que coincidan con las cuatro igualdades mencionadas que reducen a cuatro el número de componentes independientes del tensor de energía [13].

En el significado físico de tales condiciones puede profundizarse un tanto más. Si tuviésemos diez componentes independientes en el tensor de energía y en el de Ricci, y obtuviéramos a continuación diez ecuaciones que los especificasen al relacionar ambos tensores, cabría determinar unívocamente sus valores numéricos porque siempre que tenemos el mismo número de ecuaciones y de incógnitas la solución es única. En última instancia seríamos capaces de determinar también de manera única los coeficientes de la métrica $g_{\mu\nu}$.

Pero estos coeficientes cambian de forma según el sistema de coordenadas utilizado, por lo que la conclusión anterior supondría que no podemos utilizar más que un sólo sistema de coordenadas. Resultaría así que precisamente en la Relatividad General careceríamos de la libertad de elección de las coordenadas, cuando sabemos de sobra que para una curvatura dada del espacio-tiempo (nula, positiva o negativa) existen infinidad de sistemas de coordenadas diferentes (cartesianas, curvilíneas, situadas en cualquier punto del espacio o del tiempo) en esencia equivalentes en sus propiedades físicas y matemáticas. A fin de evitar el escándalo de una teoría de la Relatividad sin relatividad, es necesario contar con menos ecuaciones que incógnitas a resolver, escapatoria que nos conceden las cuatro igualdades antes citadas.

El paso final en la búsqueda de las ecuaciones del campo gravitatorio, consistía en hallar la relación entre ambos tensores, el de curvatura de Ricci y el energético. El camino más inmediato parecería lograrse estableciendo una proporcionalidad entre el tensor de Ricci y el de la energía escribiendo $R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$. Mas nuevamente la senda de la solución se mostraba esquiva. Fueron necesarios bastantes años de dudas, dilaciones y tentativas fallidas hasta encontrar unas ecuaciones que cumpliesen todas las condiciones deseables ya enumeradas y que a la vez garantizasen la conservación de la energía, cosa que no conseguía la sencilla relación de proporcionalidad antes presentada [14].

Un rasgo importante de la teoría gravitacional de Einstein quedaba al descubierto durante estas investigaciones. Para calcular en esta teoría la densidad y flujo de impulso-energía en los sistemas de referencia localmente “llanos” (llanos en el sentido de la relatividad especial, es decir, que en ellos resulta válida la geometría de Minkowski, no la de Euclides), no basta con conocer la distribución de estas magnitudes en tales sistemas. Además se hace imperativo conocer cómo se relacionan espacio-temporalmente dichos sistemas entre sí. Ahora bien, para determinar esto último necesitamos conocer precisamente los coeficientes g_{ij} de la métrica, lo cuales depende a su vez de la distribución espacial y temporal del impulso-energía. En pocas palabras, desde el punto de vista de la relatividad general, *la estructura del espacio-tiempo y su contenido energético dependen mutuamente* de un modo desconocido en la física clásica.

IV. LAS ECUACIONES DE EINSTEIN

Retomando nuestro camino hacia las ecuaciones gravitatorias de Einstein, hemos de recordar que el tensor de Riemann es susceptible de expresarse en función de la afinidad [15]:

$$R^{\lambda}{}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho,\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho} \,. \quad (4)$$

Como de costumbre, las comas en los subíndices indican derivación con respecto al índice situado a la derecha. Por otro lado, el tensor de Ricci definido como la contracción del tensor de Riemann sobre los índices primero y tercero, adopta la forma $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$. Ya que el tensor de Riemann es antisimétrico en sus dos últimos índices, el tensor de Ricci podría definirse también como la contracción de aquél sobre los índices primero y cuarto. Con ello tan solo cambiaríamos el signo delante del escalar o del tensor de Ricci en aquellas expresiones en las que apareciesen estas cantidades. El escalar de Ricci se obtiene de la contracción completa de ese mismo tensor, y por ello es un invariante, $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

Si ahora escribimos explícitamente la llamada identidad de Bianchi (donde “;” simboliza la derivada covariante con respecto al índice posterior)

$$R^{\lambda}{}_{\mu\rho\nu;\sigma} + R^{\lambda}{}_{\mu\nu\sigma;\rho} + R^{\lambda}{}_{\mu\sigma\rho;\nu} = 0 \,, \quad (5)$$

podremos contraer esta expresión en los índices μ y ν, y a continuación de nuevo en λ y ρ. Basta recordar la antisimetría del tensor de Riemann en sus dos últimos índices para llegar a la igualdad

$$R_{;\sigma} - R^{\rho}{}_{\sigma;\rho} - R^{\nu}{}_{\sigma;\nu} = 0 \,. \tag{6}$$

Renombrando los índices,

$$R_{;\sigma} - R^{\mu}{}_{\sigma;\mu} - R^{\mu}{}_{\sigma;\mu} = 0 \,, \tag{7}$$

reordenamos la expresión anterior,

$$R^{\mu}{}_{\sigma;\mu} - \tfrac{1}{2} R_{;\sigma} = 0 \,. \tag{8}$$

Insertamos una delta Kronecker,

$$R^{\mu}{}_{\sigma;\mu} - \tfrac{1}{2}\, \delta^{\mu}{}_{\sigma} R_{;\mu} = 0 \,, \tag{9}$$

y multiplicamos todos los términos por el tensor métrico $g^{\sigma\nu}$ de modo que obtenemos

$$(R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu} R)_{;\mu} = 0 \,. \tag{10}$$

Alternativamente la igualdad anterior puede escribirse con igual rigor mediante tensores covariantes

$$(R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R)_{;\nu} = 0 \,, \tag{11}$$

y la expresión entre paréntesis es lo que llamamos el tensor de Einstein

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g^{\mu\nu} R \,. \tag{12}$$

El tensor $T^{\mu\nu}$, que contiene información sobre la densidad de energía, impulso y tensiones en una determinada región del espacio, adquiere en el caso más sencillo una forma también muy simple, relacionada con la 4-velocidad U^{μ} de las masas gravitatorias que actúan como fuente del campo.

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 U^{\mu} U^{\nu} \,. \tag{13}$$

La componente T^{00} se corresponde con la densidad de energía dependiente del sistema de coordenadas; esto es, la densidad medida por un observador que no se halle en reposo con respecto a la materia fuente del campo.

Todo tipo de materia y radiación presentes en la región considerada, participa de algún modo en el valor de los elementos del tensor $T^{\mu\nu}$. Tomando en cuenta sólo la contribución de la presión local P, las componentes tensoriales tendrían la forma

$$T^{\mu\nu} = (p/c^2) U^{\mu} U^{\nu} - g^{\mu\nu} P. \tag{14}$$

Combinando las contribuciones de la presión con las debidas a la densidad de masa-energía, tendríamos finalmente la expresión asociada con un fluido ideal.

$$T^{\mu\nu} = (\rho_0 + p/c^2) U^{\mu} U^{\nu} - g^{\mu\nu} P \,. \tag{15}$$

El campo electromagnético (representado por el tensor $F^{\mu\nu}$) posee también su energía e impulso, de modo que contribuirá sin duda al tensor $T^{\mu\nu}$.

$$T^{\mu\nu} = \varepsilon [F^{\mu\lambda} F_{\lambda}{}^{\nu} + (1/4) g^{\mu\nu} F_{\lambda\sigma} F^{\lambda\sigma}], \tag{16}$$

lo cual, en términos de los campos eléctrico E y magnético B en coordenadas cartesianas inerciales sobre un espacio-tiempo plano, se reduce a

$$T^{00} = \tfrac{1}{2}\, \varepsilon (E^2 + c^2 B^2) \,, \tag{17}$$

$$T^{0i} = \varepsilon (\boldsymbol{E} \times c\boldsymbol{B})^i \,, \tag{18}$$

$$T^{ij} = -\, \varepsilon [E^i E^j + c^2 B^i B^j - \tfrac{1}{2}\, \delta^{ij} (E^2 + c^2 B^2)] \,. \tag{19}$$

Por ello, en relatividad especial, la conservación del impulso-energía queda implicada en la igualdad $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$.

En un espacio-tiempo curvo, el hecho de que el valor de las componentes de vectores y tensores dependa de la trayectoria elegida para realizar el transporte paralelo, impide definir de manera inequívoca un balance neto de estas magnitudes en un cierto punto. Por eso, estrictamente hablando, en relatividad general no existe una verdadera ley de conservación del impulso y la energía, excepto como caso límite para una masa aislada y un espacio-tiempo asintóticamente plano a una distancia infinita de ella, en cuyo caso la igualdad $T_{\mu\nu;\nu} = 0$ sí se correspondería con una ley de conservación [16].

De hecho Einstein pretendió haber llegado por primera vez a sus ecuaciones guiado en el paso final por su afán de garantizar el cumplimiento de una condición análoga a la conservación de la energía. Haciéndolo así obtuvo

$$R_{\mu\nu} = \kappa\, (T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, T g_{\mu\nu}) \,, \tag{20}$$

con $\kappa = 8\pi G/c^4$, de modo que para velocidades pequeñas comparadas con la de la luz y campos gravitatorios débiles se recuperase la ley gravitatoria de Newton.

Esta expresión admite una formulación equivalente que tiende a resaltar el papel geométrico de la curvatura espacio-temporal y que es usada con mayor frecuencia en la literatura especializada. Dicha formulación alternativa es

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} = \kappa\, T_{\mu\nu} \,, \tag{21}$$

que se suele abreviar como $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ al tomar $\kappa = 1$ y simbolizar por $G_{\mu\nu}$ (el "tensor de Einstein") el miembro de la izquierda en la última ecuación.

Tales son las definitivas ecuaciones de campo de la Relatividad General, donde el miembro de la izquierda expresa la curvatura espacio-temporal y el de la derecha el contenido energético de la región considerada en todas sus formas. Si la leemos de izquierda a derecha, la ecuación nos indica cómo la curvatura espacio-temporal determina el comportamiento dinámico de los sistemas físicos, caracterizados por su energía a través del tensor $T_{\mu\nu}$. Leyendo de derecha a izquierda, es el contenido energético de una región espacio-temporal dada el que determina la curvatura de la misma. Se habla en plural de "ecuaciones" porque la igualdad entre los tensores a cada lado de la igualdad se construyen, como hemos visto, con una serie de componentes que se han de determinar. Conocidas, digamos, la densidad y el flujo de energía-impulso en una región, las incógnitas a despejar serán los coeficientes de la métrica que describirán la estructura espacio-temporal que crea tal distribución de energía e impulso.

Las dificultades para la resolución de las ecuaciones de campo de la relatividad general son inconmensurablemente mayores que en el caso clásico por dos motivos principales. En primer lugar resulta que estas ecuaciones, a diferencia de las newtonianas, no son lineales. Esto se traduce en que el campo creado por un grupo de masa en sus inmediaciones, ya no puede ser calculado como la suma de los campos que ocasionaría cada una de tales masas por separado. Las complicaciones matemáticas que ello introduce en la práctica a la hora de realizar los cálculos, son apabullantes. De hecho una de las pocas soluciones exactas que conocemos de estas ecuaciones relativistas corresponde al caso de una masa inmensamente grande alrededor de la cual orbita otra tan diminuta que su influencia sobre la primera se considera despreciable. Todavía no hemos sido capaces de resolver la situación en la que dos cuerpos de masa comparable se mueven bajo una influencia gravitacional recíproca.

En segundo lugar, pero no menos importante, la naturaleza interdependiente antes comentada de las fórmulas einstenianas, complica todavía más las cosas. Por si fuese poco la no linealidad, el hecho de que las $g_{\mu\nu}$ dependan de las $T_{\mu\nu}$ y viceversa, centuplica las dificultades a las que se ha de enfrentar quien desee obtener respuestas concretas de estas ecuaciones.

V. UN CASO SIMPLIFICADO

Cabe la posibilidad de expresar de modo muy simple el significado físico intuitivo de las ecuaciones gravitatorias de Einstein, aprovechando las simetrías que el espacio-tiempo nos ofrece. Imaginemos una delgada corteza esférica que encierra un volumen V en cuyo centro situamos una partícula de prueba cuya densidad propia es ρ, y supongamos que el flujo del impulso tan solo tiene lugar en las direcciones de los ejes de coordenadas. Según el tiempo medido por un observador en reposo con respecto a la partícula situada en el centro, en $t = 0$ la variación del volumen esférico debida a la atracción de la masa central sobre la corteza esférica que lo limita, vendrá dada por la igualdad [17]

$$(\ddot{V})_{t=0} = -\tfrac{1}{2}\, V(t=0)\cdot\{\Sigma_\mu \,(\text{Flujo de la componente } \mu \text{ del impulso en la dirección } \mu)\} \qquad (22)$$

Es decir, en $t = 0$ la segunda derivada temporal del volumen es proporcional el producto del volumen en ese mismo instante inicial por la suma de los flujos de cada uno de los componentes coordenados del impulso en la dirección de su propio eje. Tales flujos, por descontado, se medirían en el sistema de referencia de la masa central usando coordenadas inerciales locales.

Se comprende de inmediato que estos valores se corresponden con las componentes diagonales de la matriz que representa el tensor de energía $T_{\mu\nu}$. El flujo de la componente t del impulso en la dirección del eje t es lo que habitualmente se denomina densidad de energía, ρ. El flujo de la componente x del impulso en la dirección del eje x, constituye la presión a lo largo de dicho eje, simbolizada como P_x, y de modo semejante en los demás ejes. Cuando todas las presiones coinciden en su valor, $P_x = P_y = P_z$, la ecuación puede escribirse de forma muy compacta como

$$(\ddot{V})_{t=0} = -\tfrac{1}{2}\, V(t=0)\cdot\{\rho + 3P\}\,, \qquad (23)$$

que manifiesta, en definitiva, el carácter atractivo de la gravedad en la disminución del volumen esférico $V(t)$.

VI. LA CONSTANTE COSMOLÓGICA

El hecho de que la derivada covariante de la métrica sea idénticamente nula, $g_{\mu\nu;\nu} = 0$ permite escribir estas ecuaciones de un modo apenas distinto pero que conlleva profundas repercusiones a escala cosmológica.

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4)T_{\mu\nu}\,, \qquad (24)$$

El valor de Λ, la denominada "constante cosmológica", ha de determinarse empíricamente. Einstein la introdujo originalmente con la esperanza de encontrar una solución de sus ecuaciones que ofreciese un modelo estático para el universo en su conjunto [18]. Cuando se comprobó que la constante –con signo positivo– ocasionaría una fuerza repulsiva y que su valor experimental parecía ser prácticamente nulo, Einstein la rechazó juzgándola un grave error. Sin embargo, a partir de la segunda mitad de la década de 1990, se acumularon las evidencias observacionales que asignaban un valor no nulo a esta controvertida constante.

Como consecuencia de ello la expansión del universo parece estar acelerándose en lugar de frenarse, como se había supuesto hasta la década de 1990. La explicación usual considera que la densidad de energía y presión posee un valor no nulo incluso en el vacío. Ahora bien, si no deseamos privilegiar una noción de reposo referida al vacío, su tensor de energía debe ser proporcional a la métrica. Ello implica que en coordenadas inerciales locales dicho tensor para el vacío adoptará la forma

$$T = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Lambda \end{pmatrix} \tag{25}$$

donde Λ es la constante cosmológica. Su presencia se traduce en la asignación al vacío de una densidad de energía igual a Λy una presión $-\Lambda$, de modo que la suma $\rho + 3P$ en el vacío será igual a -2Λ.

Los efectos de la presión dominan porque hay más dimensiones espaciales que temporales. Al añadir el término dependiente de la constante cosmológica a la versión simplificada de las ecuaciones de la relatividad general expuesta más arriba quedaría

$$3\ddot{R} = -\frac{R}{2}\left(\rho + 3P - 2\Lambda\right). \tag{26}$$

Por ello, a partir de cierto valor de la expansión cosmológica, la densidad de energía del vacío, representada por Λ, gobierna la dinámica expansiva del universo, sobrepasando en importancia a la densidad de materia. Si Λ es positivo –como parece ocurrir en el universo real– el ritmo de expansión crecerá exponencialmente.

VII. RADIACIÓN GRAVITATORIA

La analogía entre el campo gravitatorio y el eléctrico, sospechada desde que Coulomb probara que ambas fuerzas se debilitaban con el inverso del cuadrado de la distancia, sugirió la posibilidad de que a semejanza de las ondas electromagnéticas existieran también ondas gravitatorias. La teoría newtoniana no las contemplaba pero la de Einstein sí, de modo que en aproximación de campo débil, en una región vacía tales ondas se desplazan con una velocidad igual a la de la luz transportando impulso y energía [19].

Partiendo de la conocida definición de la conexión afín en términos de la métrica ya ofrecida en (2), $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})$, adoptamos la aproximación de campo débil, en la cual la métrica espacio-temporal curva se considera tan solo ligeramente distinta de la métrica plana de Minkowski. Así podremos escribir $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, lo que indica que el tensor métrico de Minkowski se halla perturbado por la adición de un tensor que distorsiona levemente la geometría espacio-temporal llana.

Manteniendo únicamente términos de primer orden en $h_{\mu\nu}$, reescribimos la afinidad en función de este tensor como

$$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\, \eta^{\lambda\sigma}(h_{\mu\sigma,\nu} + h_{\nu\sigma,\mu} - h_{\mu\nu,\sigma}), \tag{27}$$

tras lo cual el tensor de Riemann,

$$\mathrm{R}^{\lambda}{}_{\mu\rho\nu} = \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu,\rho} - \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho,\nu} + \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}{}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho}, \tag{28}$$

se convierte en

$$\mathrm{R}^{\lambda}{}_{\mu\rho\nu} = \tfrac{1}{2}\, [h^{\lambda}{}_{\nu,\rho\mu} - \eta^{\lambda\sigma}h_{\mu\nu,\rho\sigma} - h^{\lambda}{}_{\rho,\nu\mu} + \eta^{\lambda\sigma}h_{\mu\rho,\nu\sigma}]. \tag{29}$$

A continuación contraigamos el tensor de Riemann para obtener el de Ricci, $\mathrm{R}_{\mu\nu} = \mathrm{R}^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}$, de tal modo que en términos de $h_{\mu\nu}$ se tendría

$$R_{\mu\nu} = \tfrac{1}{2}\, [h^{\lambda}{}_{\nu,\lambda\mu} - \eta^{\lambda\sigma}h_{\mu\nu,\lambda\sigma} - h^{\lambda}{}_{\lambda,\nu\mu} + \eta^{\lambda\sigma}h_{\mu\lambda,\nu\sigma}]. \tag{30}$$

Redefiniendo los índices e introduciendo la delta de Kronecker llegamos a una expresión equivalente,

$$R_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\, \{\eta^{\lambda\sigma}h_{\mu\nu,\lambda\sigma} - [h_{\mu}{}^{\sigma} - \tfrac{1}{2}\,\delta_{\mu}{}^{\sigma}h^{\lambda}{}_{\lambda}]_{,\sigma\nu} - [h^{\sigma}{}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\,\delta^{\sigma}{}_{\nu}h^{\lambda}{}_{\lambda}]_{,\sigma\mu}\}. \tag{31}$$

En consecuencia, las ecuaciones gravitatorias de Einstein, escritas como $R_{\mu\nu} = (8\pi G/c^4)[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}T]$, adquieren un nuevo aspecto,

$$-\tfrac{1}{2}\{\eta^{\lambda\sigma}h_{\mu\nu,\lambda\sigma} - [h_{\mu}{}^{\sigma} - \tfrac{1}{2}\,\delta_{\mu}{}^{\sigma}h^{\lambda}{}_{\lambda}]_{,\sigma\nu} - [h^{\sigma}{}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\,\delta^{\sigma}{}_{\nu}h^{\lambda}{}_{\lambda}]_{,\sigma\mu}\} = (8\pi G/c^4)[T_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}T]. \tag{32}$$

Para que las derivadas $[h_{\mu}{}^{\sigma} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu}{}^{\sigma}h^{\lambda}{}_{\lambda}]_{,\sigma\nu}$ y $[h^{\sigma}{}_{\nu} - \frac{1}{2}\,\delta^{\sigma}{}_{\nu}h^{\lambda}{}_{\lambda}]_{,\sigma\mu}$ no se anulen, resultará conveniente emplear una transformación infinitesimal de coordenadas $x'_{\mu} = x_{\mu} + \varepsilon_{\mu}$, lo que implica $h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \varepsilon_{\mu,\nu} - \varepsilon_{\nu,\mu}$. Entonces tenemos

$$\eta^{\lambda\sigma}\varepsilon_{\mu,\lambda\sigma} = [h_{\mu}{}^{\sigma} - \tfrac{1}{2}\,\delta_{\mu}{}^{\sigma}h^{\lambda}{}_{\lambda}]_{,\sigma} \tag{33}$$

que equivale a la condición

$$\eta^{\lambda\sigma}\varepsilon_{\nu,\lambda\sigma} = [h^{\sigma}{}_{\nu} - \tfrac{1}{2}\,\delta^{\sigma}{}_{\nu}h^{\lambda}{}_{\lambda}]_{,\sigma}\,. \tag{34}$$

Insertando estas igualdades en las ecuaciones de Einstein obtenemos

$$\eta^{\lambda\sigma}h'_{\mu\nu,\lambda\sigma} = -(16\pi G/c^4)[T^{s}{}_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}T']. \tag{35}$$

En el vacío $T_{\mu\nu} = T = 0$, y por tanto, $\eta^{\lambda\sigma}h'_{\mu\nu,\lambda\sigma} = 0$, que es la forma tensorial de una ecuación de ondas con velocidad de propagación igual a c.

Si bien hemos admitido que el tensor de energía se anulaba en la región considerada (condición de vacío), el pseudo-tensor de energía para las ondas gravitatorias no está obligado a anularse también, y en ese sentido las ondas gravitatorias transportan energía e impulso como las asociadas con el resto de las interacciones físicas. El pseudo-tensor de energía $t^{\mu\nu}$ correspondiente a las ondas gravitacionales se obtiene expresando el tensor de Ricci y su escalar asociado en el sistema de coordenadas previamente descrito. Con ello,

$$R'_{\mu\nu} = -\tfrac{1}{2}\,\eta^{\lambda\sigma}h'_{\mu\nu,\lambda\sigma}\ , \qquad (36)$$

y asimismo

$$R' = -\tfrac{1}{2}\,\eta^{\lambda\sigma}h'_{,\lambda\sigma}\,. \qquad (37)$$

Reconstruyendo ahora el tensor de Einstein hasta primer orden de aproximación en $h_{\mu\nu}$ nos proporciona la igualdad

$$R'_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}R' = -\tfrac{1}{2}\,\eta^{\lambda\sigma}[h'_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}h']_{,\lambda\sigma} \quad (38)$$

y finalmente llegamos a

$$R'_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}R' = (8\pi G/c^4)t_{\mu\nu}\ . \qquad (39)$$

Así pues, el tensor buscado será

$$t^{\mu\nu} = -(c^4/32\pi G)\eta^{\lambda\sigma}[2h'^{\mu\nu} - \eta^{\mu\nu}h']_{,\lambda\sigma}\,. \qquad (40)$$

Con respecto a las ondas gravitatorias merece la pena aclarar algunos malentendidos usuales. Suele decirse, por ejemplo, que la falta de evidencia empírica sobre la existencia y características del gravitón debilitan nuestra confianza en la relatividad general de Einstein. Sin embargo, no es la teoría gravitatoria de Einstein la que habla de gravitones, sino la teoría cuántica de campos en su versión preliminar aplicada a la gravedad. Los campos cuánticos, que describen las interacciones mediante el intercambio de cuantones virtuales, asignan una hipotética partícula con espín 2 denominada "gravitón" a la interacción gravitatoria.

Ahora bien, si tras algún sorprendente descubrimiento se demostrase sin lugar a dudas la inexistencia de gravitones, ello tan solo constituiría una reprobación de los modelos cuánticos de intercambio de partículas virtuales como fundamentos válidos para las teorías de unificación. Y desde luego, no sería una refutación de la relatividad general, en tanto que teoría no cuántica.

VIII. GEODÉSICAS Y PARÁMETROS VARIACIONALES

De la relatividad especial sabemos que los cuerpos sobre los que no actúan fuerzas distintas de la gravedad se mueven a lo largo de trayectorias cuyo tiempo propio es máximo, lo que indicamos como $\delta\int d\tau = 0$. Dado que $cd\tau = ds$, podemos escribir la expresión anterior como una requisito por el cual han de anularse las variaciones del intervalo espaciotemporal, $\delta\int ds = 0$, o cual es la condición que define una geodésica espacio-temporal. Así pues, la geometría intrínseca del espacio-tiempo determina que los cuerpos libres de otra interacción que no se la gravedad, siguen trayectorias geodésicas. Esta idea básicamente tetradimensional sustituye la antigua noción de la inercia newtoniana por la cual los objetos tienden a permanecer en reposo relativo o en movimiento inercial. Y así es como la relatividad general nos proporciona una explicación de la gravedad en el ámbito macroscópico de los fenómenos [20].

Parametrizando la condición de extremo, se tendrá

$$\delta\int(ds/d\tau)d\tau = 0,\ \text{o bien},\ \delta\int[(ds/d\tau)^2]^{1/2}d\tau = 0\,. \quad (41)$$

La misma trayectoria que satisface (41) se obtiene bajo la condición

$$\delta\int[(ds/d\tau)^2]d\tau = 0\,. \qquad (42)$$

Empleando ahora la definición de 4-velocidad relativista, $U^\mu = dx_\mu/d\tau$, y la métrica $ds^2 = g_{\mu\nu}dx_\mu dx_\nu$, obtenemos

$$\delta\int g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu d\tau = 0\,, \qquad (43)$$

y recurriendo a las ecuaciones de Euler-Lagrange, llegamos a la igualdad

$$(d/d\tau)[(\partial/\partial U^\lambda)(g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu)] = (\partial/\partial x_\lambda)(g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu)]. \quad (44)$$

Finalmente, tras derivar y sustituir las variables convenientes encontramos el resultado definitivo

$$d^2x_\lambda/d\tau^2 + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}(dx_\mu/d\tau)(dx_\nu/d\tau) = 0\,, \qquad (45)$$

que es la ecuación de una trayectoria geodésica.

Especialmente digno de mención es el caso de las geodésicas definidas en la métrica de Schwarzschild, solución de las ecuaciones gravitatorias de Einstein para una distribución de masa homogénea, estacionaria y esféricamente simétrica. Su conocida expresión es

$$ds^2 = c^2(1 - 2GM/c^2r)dt^2 - (1 - 2GM/c^2r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\phi^2) \qquad (46),$$

y de ella obtenemos ecuaciones geodésicas parametrizadas mediante una variable ϖ que cambia monótonamente a lo largo de la trayectoria.

Cuando tratamos con partículas masivas, cuya velocidad siempre es inferior a c, debemos escoger ϖ proporcional a τ, el lapso de tiempo propio integrado a lo largo de la trayectoria. Pero si nos ocupamos de partículas con masa propia nula –como los fotones– su lapso de tiempo propio es cero por definición. Con ello se nos plantea la interesante pregunta de si cabe imponer la condición de extremo a una trayectoria cuya "longitud" ─en sentido espacio-temporal─ es idénticamente nula.

La respuesta consiste en recordar que pese al valor siempre nulo de las geodésicas recorridas por la luz (que por ello se denominan "nulas") las variables a ella asociadas no han de ser todas necesariamente nulas. Por tanto, podemos parametrizarlas mediante una variable monótona cuyos valores se asocien a los puntos de dichas geodésicas [21].

IX. MÁS ALLÁ DE LA RELATIVIDAD GENERAL

Tan soberbia resultó la arquitectura interna de la relatividad general que, cuando se vio experimentalmente confirmada, Einstein busco una ampliación que abarcase también el electromagnetismo. Ninguna de sus tentativas sobrevivió a su autor, y en la actualidad se acepta que la combinación del electromagnetismo no se ha producido con la gravedad, sino con la fuerza nuclear débil mediante los trabajos de Glashow, Weinberg y Salam. Las teorías que pretenden superar el marco relativista general pueden clasificarse aproximadamente como sigue:

1) *Teorías no relativistas*, como ciertas generalizaciones de la gravedad newtoniana. Esta senda se reveló ya definitivamente obsoleta bastante tiempo atrás.
2) *Teorías con un tensor métrico asimétrico*. Esto significa, por ejemplo, que el ángulo entre dos vectores *a* y *b* situado en el mismo punto, difiere del ángulo entre los vectores *b* y *a*. La diferencia depende (o es una manifestación de la existencia) del campo electromagnético. Fue la opción referida por Einstein en sus últimos años, si bien después cayó prácticamente en el olvido.
3) *Teleparalelismo*. Se trata de una formulación en la cual al transportar un vector paralelamente a sí mismo a lo largo de una trayectoria cerrada, no gira un cierto ángulo con respecto a su orientación inicial –como sucede en la geometría de Riemann– sino que se sufre un desplazamiento y no regresa a la posición de partida. Este efecto se denomina “torsión”, en lugar de curvatura. Tal como la curvatura puede imaginarse como una rotación por cada unidad de superficie encerrada en el recinto descrito por la trayectoria cerrada, la torsión sería el desplazamiento por cada unidad de superficie. También fue ensayado por Einstein, pero a los actuales físicos de partículas no les agrada.
4) *Teorías multidimensionales*. Ya en los años 30 del siglo XX, Kaluza y Klein propusieron una teoría gravitatoria en cinco dimensiones, que sirvió como prototipo para una multitud de artículos con inspiración semejante. A finales de ese mismo siglo, la idea de múltiples dimensiones reapareció con el nombre de “reducción dimensional”. Se trataba de suponer que además de las tres dimensiones espaciales hay varias más –desde una hasta siete– aunque se hallan comprimidas en un tamaño tan pequeño (alrededor de 10^{-33} cm) que resultan macroscópicamente indetectables.

Esta última senda es la que han elegido, de un modo u otro, la gran mayoría de teóricos actuales. La idea subyacente se fundamenta sobre el hecho de que las partículas elementales poseen una componente del impulso, o momento lineal, a lo largo de cada dimensión espacio-temporal. La componente a lo largo de la dimensión temporal es la magnitud que denominamos energía. Si vivimos en un universo con *n* dimensiones, ello significa que el impulso de cada partícula ha de tener componentes a lo largo de las dimensiones adicionales. La esperanza de interpretar dichas componentes como las cargas de las diversas interacciones experimentadas por la partícula, anima a los investigadores a continuar por este camino [22].

El carácter discreto de tales cargas, explicado como un efecto cuántico, se debe a la finitud del radio de las dimensiones adicionales. Cualquier partícula confinada en una dimensión de tamaño finito, muestra valores discretos en su momento lineal a lo largo de esas direcciones supernumerarias, al igual que la cuerda de un instrumento musical vibra sólo en un conjunto discreto de modos, o que un electrón en un átomo de hidrógeno dispone de un número finito de longitudes de onda en cada órbita cerrada.

Una vez que admitimos este marco de trabajo, cabe aceptar que en un espacio-tiempo multidimensional la gravitación poseería componentes de la métrica correspondientes a las dimensiones extra supuestamente capaces de dar cuenta de las cargas de interacción conocidas. Ciertamente, en la teoría de Kaluza y Klein la acción pentadimensional puede escribirse como la suma de dos piezas nítidamente separadas, cuales son la acción gravitatoria de Hilbert-Einstein, y la electromagnética de Maxwell. La longitud de la quinta dimensión queda fijada entonces cuando se estipula la intensidad de la interacción electromagnética, y se relaciona a su vez con la longitud de Planck.

Sin embargo, también es cierto que esta teoría predice valores inadmisiblemente elevados para los modos de vibración cargados del campo (cercanos a la masa de Planck), y que necesita más de una dimensión añadida para incluir las cargas nucleares. Por desgracia, estas nuevas dimensiones complican enormemente el manejo de la teoría, sin mencionar el hecho de que las energías indispensables para explorar experimentalmente tales rangos de distancias, parecen destinadas a quedar fuera de nuestras posibilidades tecnológicas durante mucho tiempo.

VIII. CONCLUSIONES

El significado físico de la relatividad general, se condensa en las ecuaciones gravitatorias de Einstein, que relacionan el contenido de materia y radiación en un entorno infinitesimal con la curvatura geométrica del espacio-tiempo en esa misma región. Por ello, no resulta muy correcto referirse a ellas como “ecuaciones de campo”, puesto que no expresan la presencia de un campo, un ente físico superpuesto sobre el espacio-tiempo. Tales ecuaciones gobiernan más bien la geometría espacio-temporal, cuyo carácter deja de ser minkowskiano en presencia de materia y radiación.

Lejos de ser meras abstracciones matemáticas, los términos de las ecuaciones gravitatorias de Einstein son susceptibles de recibir interpretaciones físicas inequívocas, que los vinculan con fenómenos y procesos desconocidos por la física anterior a la relatividad general. Entre sus predicciones destacan la constante cosmológica y la radiación gravitatoria.

La importancia de la relatividad general y su extraordinaria adecuación a la realidad física, no han detenido los intentos orientados a generalizarla y fundirla con el resto de las interacciones fundamentales de la naturaleza. Hasta la fecha, ninguna de estas tentativas −ni siquiera las populares y muy estudiadas teorías multidimensionales− ha tenido éxito.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi gratitud a todos los miembros de la Agrupación Astronómica de Alicante, en cuyas sesiones plenarias han sido discutidos en profundidad muchos de los aspectos brevemente abordados en este artículo. De estos debates surgió una interpretación tan intuitiva como resultó posible de las ecuaciones relativistas generales.

REFERENCIAS

[1] Kennefick, D., *Not Only Because of Theory: Dyson, Eddington and the Competing Myths of the 1919 Eclipse Expedition*, <arXiv:0709.0685v2>. Consultado el 4 de Noviembre de 2009.

[2] Howard, D., Stachel, J., eds., *Einstein and the History of General Relativity*, Einstein Studies vol. 1 (Birkhäuser, Springer, New York, 1989).

[3] Earman, J., Janssen, M., Norton, J. D., eds., *The Attraction of Gravitation*, Einstein Studies vol. 5 (Birkhäuser, Springer, New York, 1993).

[4] Jost, J., *Riemannian Geometry and Geometric Analysis* (Springer-Verlag, Berlin, 2002).

[5] Norton, J. D., Philosophy of Space and Time, en Salmon, M. H. *et al,. Introduction to the Philosophy of Science* (Prentice Hall, New York, 1992).

[6] Einstein, A., *Zur allgemeinen Relativitaetstheorie*, Preuss. Akad. der Wiss., Sizungsberichte, 778 (1915).

[7] Einstein, A., *Ueber den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*, Ann. der Phys. **35**, 898 (1911).

[8] Einstein, A., *Die Grundlage der allgemeinen Relativitaetstheorie*, Ann. der Phys. **49**, 769 (1916).

[9] Friedman, M., *Foundations of Space-Time Theories* (Princeton University Press, Princenton, 1983).

[10] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).

[11] Carroll, S. M., *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Addison-Wesley, New York, 2003).

[12] Adler, R., Bazin, M., Schiffer, M., *Introduction to General Relativity* (McGraw-Hill, Second Edition, New York, 1975).

[13] Schutz, B. F., *A First Course in General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 1985).

[14] Hartle, J. B., *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity* (Addison-Wesley, New York, 2002).

[15] Wald, R., *General Relativity* (Chicago University Press, Chicago, 1984).

[16] Weinberg, S., *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).

[17] D'Inverno, R., *Introducing Einstein's Relativity* (Oxford University Press, Oxford, 1992).

[18] Lightman, A .P., Press, W. H., Price, R. H., and Teukolsky, S. A., *Problem Book in Relativity and Gravitation* (Princeton University Press, Princeton, 1975).

[19] Hawking S. W., Ellis, G. F. R., *The Large-Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).

[20] De Felice, F., Clarke, C., *Relativity on Curved Manifolds* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).

[21] Sachs, R,. Wu, H., *General Relativity for Mathematicians* (Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977).

[22] Stewart, J., *Advanced General Relativity* (Cambridge, (Cambridge University Press, Cambridge, 2003).