

Los conceptos de espacio y tiempo como variables dinámicas en la teoría cuántica no relativista



Rafael Andrés Alemañ Berenguer^{1,2}

¹*Departamento de Ciencia de Materiales, Óptica y Tecnología Electrónica. Universidad Miguel Hernández, Avda. Universidad, s/n. Edif. Torrevalillo - 032021 - Elche (Alicante – España).*

²*Sociedad Astronómica de Alicante (Grupo de gravitación y mecánica celeste), Apartado de Correos 616, 03080-Alicante (España).*

E-mail: agrupación.astroalicante@gmail.com

(Recibido el 7 de Febrero de 2010; aceptado el 11 de Mayo de 2010)

Resumen

Desde los mismos inicios de la teoría cuántica se originó un debate sobre el papel que en ella desempeñaban el espacio y el tiempo. En este artículo se analiza la interpretación del espacio y el tiempo en el núcleo conceptual de la teoría cuántica no relativista. Se hallará que, rigurosamente, las relaciones de Heisenberg para la energía y el tiempo poseen raíces distintas de las correspondientes al par posición-impulso. En el caso de las variables espaciales, se argumentará que no existe una “coordenada de posición” en la estructura conceptual de la física cuántica, dado que las partículas cuánticas no son objetos puntuales.

Palabras clave: Desigualdades de Heisenberg, energía, tiempo, posición, física cuántica.

Abstract

Since the very beginning of quantum theory there started a debate on the proper role of space and time in it. In this paper, the proper role of space and time in the conceptual core of quantum physics is analyzed. We will find that, rigorously, Heisenberg's relations for time and energy show a different root. For the role of space, it will be discussed that there is no “coordinate of position” in the conceptual structure of quantum physics because quantum particles are not point-like objects.

Keywords: Heisenberg inequalities, energy, time, position, quantum physics.

PACS: 01.40-d, 03.65.Ca, 03.65.Ta.

ISSN 1870-9095

I. INTRODUCCIÓN

Hoy como a comienzos del siglo XX, una de las mayores dificultades conceptuales con que topan quienes tratan de dominar la bases de la teoría cuántica, es el denominado “principio de indeterminación de Heisenberg” (expresión popularizada por Eddington en su Conferencia Gifford de 1928) en sus distintas versiones. La causa principal de estas dificultades –como se expondrá en este artículo– radica en los diferentes papeles jugados en la física clásica y en la cuántica por las variables dinámicas y las coordenadas geométricas (entre éstas últimas, en cierto modo, podríamos incluir el tiempo).

Durante el desarrollo inicial de la física cuántica, y a falta de mejores vías, sus primeros fundadores escogieron la senda del eclecticismo dando a luz una suerte de compromiso ontológico denominado “principio de complementariedad”. Mediante su aplicación se buscaba conciliar dos aspectos de la naturaleza que en la visión clásica parecían ser mutuamente excluyentes, pero que en la cuántica resultaban indispensables por igual. Tal principio sostenía que las partículas cuánticas –o

cuantones– disfrutaban de una doble naturaleza, ondulatoria y corpuscular, susceptible de manifestarse dependiendo de la manera en que el cuantón interactuase con el entorno. Si se realiza la experiencia, digamos, de lanzar electrones uno a uno contra una ranura larga y estrecha tras la que se sitúa una placa fotográfica, la teoría cuántica nos anuncia resultados incompatibles con las predicciones clásicas. Cada uno de los impactos individuales de los electrones dará lugar a un minúsculo punto luminoso sobre la película fotográfica, lo que sería esperable de un comportamiento corpuscular de los electrones (que demuestran con ello no ser simples “paquetes de ondas”). Pero si enviamos un número suficiente de ellos, apreciaremos con el tiempo que los pequeños puntos luminosos sobre la placa se distribuyen según un típico patrón ondulatorio de franjas paralelas de intensidad decreciente.

El principio de complementariedad puede considerarse válido en la medida en que las referencias a ondas y corpúsculos no sean consideradas más que analogías formales, ciertamente provechosas como auxilio para la imaginación, pero en absoluto sustanciales. Los cuantones no deben ser confundidos con los corpúsculos idealizados

de la mecánica clásica, ni tampoco con las ondas ordinarias estudiadas en acústica, electromagnetismo y otras muchas áreas de la física precuántica. Sí son, empero, entidades absolutamente singulares con un comportamiento y unas propiedades tan peculiares que a fin de otorgarles un tratamiento adecuado, se ha revelado ineludible la construcción de una de las teorías más novedosas y profundas de la física. Únicamente resulta lícito añadir que en ciertas situaciones extremas a las que se ve forzado por el entorno con que es rodeado, el cuantón exhibirá una conducta que encontraremos más conveniente describir en términos de lo que macroscópicamente entendemos por “onda” o por “corpúsculo” dependiendo de los casos. Es decir, la interpretación de los cuantones como ondas o corpúsculos tiene un valor básicamente contextual.

II. LAS DESIGUALDADES DE HEISENBERG

A la luz de esta controversia debería contemplarse un conjunto de relaciones matemáticas cuya interpretación ha creado algunos de los más enrevesados malentendidos alrededor de la teoría cuántica. Estas fórmulas reciben el nombre colectivo de “desigualdades de Heisenberg”. Las dos principales presentaciones de tales desigualdades de Heisenberg conciernen al par posición-impulso y al par energía-tiempo. Es bien conocido que ambas fueron controvertidas en su formulación original, pero mientras la primera se aclaró con relativa prontitud pronto –aun cuando la cuestión sigue debatiéndose, como se ve en [1]– la segunda todavía sigue abierta.

La desigualdad que concierne a las variables posición e impulso es la más conocida [2]. Su forma matemática es $\Delta x \Delta p \geq \hbar$, donde \hbar es la constante de Planck, h , una cantidad fija cuyas dimensiones son [energía]·[tiempo], o *acción*, dividida entre 2π . Expresada verbalmente viene a decir que no es posible determinar simultáneamente el valor de la posición y del impulso de un cuantón con exactitud arbitraria. Frente a lo que comúnmente se cree, esta desigualdad no indica que la observación de un sistema cuántico introduzca una perturbación incontrolable que distorsione los valores reales de su posición o de su impulso (pese a los desafortunados ejemplos de montajes experimentales sugeridos por Heisenberg). Ni tampoco significa que su comportamiento sea tan errático que escape a todo pronóstico, como si el cuantón se moviese caprichosamente de forma imprevisible.

Un análisis imparcial de las premisas fundamentales de la teoría no revela referencias a observadores, aparatos de medida o cualquier otro de los elementos que han contribuido a rodear a la física cuántica de un halo de misterio y misticismo. Partiendo de las relaciones de conmutación $p_n q_m - q_n p_m = -i\hbar \delta_{nm}$, que son postulados de la teoría, la definición de promedio cuántico, la definición de desviación típica [3, 4] (una fórmula proveniente de la estadística matemática) y la desigualdad de Schwarz

(tomada del análisis matemático), se obtiene [5, 6, 7] sin dificultad:

$$\Delta_\psi p_n \Delta_\psi q_m \geq (\hbar/2) \delta_{nm} \quad (1)$$

para la componente p_n del impulso y la componente q_m de la posición del micro-objeto representado por ψ .

Como es obvio, esta deducción no hace referencia alguna a mediciones, detectores, observadores –con o sin mente– experimentos ideales o analogías ópticas de cualquier clase. Se trata de un teorema completamente general –ni siquiera se especifica el hamiltoniano– que no concierne en absoluto a “incertidumbres” (la incertidumbre es una propiedad de un estado mental, y los estados mentales conciernen, en principio, a la psicología, no a la física teórica), ni introduce la interferencia inevitable del dispositivo experimental (que por ningún lado aparece en la deducción), ni presupone que los micro-objetos sólo existen cuando se les observa (ninguna mención hay en las premisas de la deducción sobre las condiciones de contorno), pues las variables p_n y q_m pertenecen exclusivamente al sistema cuántico, sea observado o no.

Naturalmente, si entendemos las incertidumbres experimentales en el sentido de “errores concretos en los actos de medida”, tales incertidumbres se dan aquí como en cualquier otro ámbito de la ciencia. Pero la teoría cuántica no los incluye entre sus axiomas básicos, porque los errores experimentales dependen del montaje experimental y del resto de condiciones de contorno.

En relación con ello, es muy corriente leer o escuchar que de acuerdo con la teoría cuántica toda medida de un observable proporcionará un cierto autovalor de los permitidos a dicho observable [8]. No obstante, debería decirse en realidad que una serie interminable de medidas experimentales concretas arrojaría, en el límite de infinitas repeticiones sobre sistemas idénticos (y esto es otra idealización, pues no existen dos sistemas verdaderamente idénticos), la distribución de autovalores pronosticada por la teoría cuántica.

En rigor, habría de decirse que *probablemente* proporcionaría la distribución estadística de la teoría cuántica, pues los experimentos proporcionan frecuencias de resultados y las fórmulas de la teoría de la probabilidad no son satisfechas exactamente por frecuencias, ni siquiera a largo plazo, que siempre es un plazo finito. Sólo en un tipo especial de procesos aleatorios (las series de Bernouilli) puede demostrarse que la probabilidad de cualquier divergencia dada de una frecuencia con respecto a la probabilidad teórica correspondiente, decrece con el tamaño de la muestra. Además, esta probabilidad de segundo orden no es reducible en sí misma a una frecuencia.

De hecho, salvo cuando los autovalores son discretos y están muy separados, en la práctica medimos intervalos de tales autovalores. Nunca debemos confundir los supuestos axiomáticos de una teoría física con la teoría matemática de errores o los modelos de mediciones experimentales que le son propias.

Tampoco las desigualdades de Heisenberg manifiestan una indeterminación intrínseca en los sistemas cuánticos, si por ella entendemos fluctuaciones impredecibles inherentes a los micro-objetos. Admitirlo así implicaría que existen valores exactos para las variables p y q , pero que dichas fluctuaciones imponen unos intervalos de error irreducibles, Δp y Δq respectivamente. Ya hemos visto que no es así; los sistemas cuánticos no son objetos clásicos sometidos a un incesante vaivén que nos impide localizarlos con precisión.

Más sentido físico tiene –aunque también es erróneo– deducir las relaciones de Heisenberg de la dualidad onda-corpúsculo junto con la teoría de desarrollos armónicos en serie de Fourier. Si suponemos que un objeto cuántico no es más que un “paquete” o grupo de ondas, es obvio que cuantas más ondas (cada una con su longitud λ) se combinen para formar el paquete, más estrecho y localizado resultará éste, aunque debido a la relación de De Broglie, aumentará igualmente el intervalo de valores del impulso asociado al grupo de ondas. Y al contrario, una onda plana ideal tendrá un impulso perfectamente definido, pero al ser de extensión infinita la imprecisión de su posición también será infinita.

Ahora bien, los micro-objetos no son equiparables a meros grupos de ondas, como hizo notar Lorentz a Schroedinger (aunque es cierto que el registro individual de impactos en detectores de partículas suele probar la cuantización de los niveles atómicos en los átomos del detector, más bien que la propagación corpuscular de los cuantones detectados). Así es, entre otros motivos porque de lo contrario los experimentos de difracción reproducirían una figura de interferencia completa por cada partícula individual, cosa que no sucede [9].

De hecho, en el formalismo riguroso de la teoría cuántica las desigualdades de Heisenberg no aparecen a consecuencia del teorema de Fourier sobre descomposición armónica de ondas. Al contrario, son resultado de los postulados de la teoría –que no se comprometen con la naturaleza de los micro-objetos a los que se refieren– y en particular de la no conmutatividad de los operadores. Por eso difieren los significados físicos de la relación impulso-posición y la relación energía-tiempo, como fue señalado por Jordan [10] y Pauli [11].

No es cierto, como afirmó Bohr [12, 13], que el tiempo posea una dispersión al igual que la posición o el impulso. En la teoría cuántica el tiempo no es una variable dinámica (por lo que carece de un operador asociado en el espacio de Hilbert y por tanto carece de dispersión), sino un parámetro perteneciente a un cierto grupo de transformaciones [14, 15].

Sí es posible, no obstante, definir un “tiempo de evolución”, $\delta_{\psi}t_A$, para un variable dinámica cualquiera A en un estado ψ , como el intervalo de tiempo necesario para que la variación temporal del valor medio de A resulte apreciable sobre su dispersión intrínseca $\Delta_{\psi}A$. Entonces tendríamos

$$\delta_{\psi}t_A \cdot \Delta_{\psi}A \geq \hbar, \quad (2)$$

que se reduciría a la desigualdad energía-tiempo cuando A representase la magnitud energía [16].

Del formalismo de Von Neumann se desprende con toda claridad la ausencia de menciones sobre dispositivos experimentales o actos de observación. Cuando efectuamos una medida de la posición, o por la propia evolución temporal de ψ , el vector de estado girará para coincidir con uno de los ejes de las funciones propias de posición en el espacio abstracto de Hilbert, lo que nos dará un valor propio para la posición. Ahora el vector de estado representará una posición bien definida, pero precisamente por eso no coincidirá con ninguno de los ejes del impulso, y en consecuencia no será función propia de ellos ni tendrá un valor definido de tal magnitud. En todo caso, contaremos con las probabilidades de hallar en una medida uno de los valores propios mediante las proyecciones del vector ψ sobre los ejes del impulso.

Análogamente, si decidiéramos medir el impulso, el vector de estado giraría para coincidir con uno de los ejes de las autofunciones del impulso. Tendríamos entonces un valor del impulso bien definido perdiendo como contrapartida toda posibilidad de definir unívocamente el valor de la posición, ya que ahora ψ puede descomponerse en sus proyecciones sobre los ejes de las autofunciones de la posición. El punto crucial en este razonamiento reside en advertir que según los fundamentos de la física cuántica, tan solo cuando el vector de estado coincide con una de las funciones propias de una magnitud observable, tendrá sentido hablar de un valor definido de dicha magnitud.

En resumen, las desigualdades de Heisenberg no involucran indeterminaciones, ni incertidumbres, ni la intervención de observadores externos, ni un fantasmal “libre albedrío” de los objetos cuánticos. Más bien, obligándonos a renunciar a los conceptos clásicos de onda y corpúsculo puntiforme, estas desigualdades expresan el grado de incompatibilidad en la aplicación simultánea de ciertos conceptos clásicos a unos micro-objetos que carecen realmente de ellos.

III. ¿DUALIDAD ONDA-CORPÚSCULO?

Tras las consideraciones anteriores, deberíamos admitir ya sin reservas que los objetos cuánticos son entes específicos con propiedades peculiares y absolutamente novedosas; llamémosles *cuantones* para utilizar un término neutral, como propuso Bunge en [14].

Los conceptos de posición e impulso no les son aplicables, no se pueden definir trayectorias, y por consiguiente la teoría cuántica no es en modo alguno una “mecánica”. No existe realmente un “operador de posición”, aunque sea llamado así, porque la variable x es una magnitud numérica que tan solo etiqueta puntos del espacio. Por esa razón sus “autofunciones”, las deltas de Dirac, no son verdaderas funciones [17].

Bohr o Heisenberg, entre otros muchos, no escaparon a un cierto prejuicio newtoniano, según el cual toda teoría fundamental de la naturaleza debe ser una especie de

mecánica, y no algo más parecido a la termodinámica o la teoría de campos (piénsese, por ejemplo, en la teoría cuántica de campos), donde no se definen posiciones ni trayectorias de objetos puntuales. No obstante, persiste la controversia, puesto que algunos investigadores afirman haber refutado el así llamado “principio de complementariedad” de Bohr, poniendo a la vez de manifiesto en un solo experimento los aspectos ondulatorios y corpusculares [18].

Por decirlo brevemente, cuanto mayor sea la influencia del entorno sobre un cuantón para acentuar su semejanza con el comportamiento de un corpúsculo clásico (disminuyendo Δx) menor será su similitud con una onda clásica ideal (aumentará Δp), y viceversa, pero se trata en todo caso de pseudo-corpúsculos y pseudo-ondas. Sería difícil interpretar en términos de esta presunta dualidad, por ejemplo, las dispersiones cuadráticas medias de las componentes del campo electromagnético en la electrodinámica cuántica.

Los cuantones carecen de las propiedades físicas típicamente clásicas que se les atribuyen cuando son concebidos ya sea como ondas o como corpúsculos. Por muy útiles que hayan resultado tales analogías –y lo han sido– no debemos perder de vista la genuina y, para nosotros, extravagante naturaleza real de los objetos cuánticos. Un experimento de difracción a través de una doble rendija realizado con electrones enviados uno a uno, por ejemplo, puede encontrarse en [19].

El genuino significado de las desigualdades de Heisenberg es el que corresponde a un teorema de incompatibilidad entre pares de variables complementarias en el sentido antes discutido, o dicho más técnicamente, entre pares de variables “no conmutables”. La razón de que no sea posible determinar exactamente la posición y el impulso de un cuantón, es sencillamente que no poseen tales atributos a diferencia de los objetos de la física clásica.

En la mecánica de Newton los corpúsculo gozaban siempre de una posición determinable en principio con arbitraria precisión, al tiempo que las ondas eran fenómenos extensos caracterizados por un impulso bien determinado. Nada de eso ocurre, en cambio, en lo concerniente a los cuantones puesto que no son realmente ni una cosa ni otra, pese a que algunas de sus propiedades representables macroscópicamente como típicas de ondas o de corpúsculos, se manifiesten en ciertas situaciones experimentales. De ello tampoco se deduce en modo alguno que sea el observador el responsable de “crear” dichas propiedades de la nada con su acto de observación y que, por consiguiente, nada exista en realidad con independencia de los observadores y sus mediciones.

Las amplitudes de dispersión Δx y Δp conciernen a la anchura de las curvas de distribución de posición e impulso sobre los intervalos en los que estas magnitudes se encuentran definidas. Cuanto mayor sea la precisión que mediante un montaje experimental adecuado tratamos de lograr en la posición, tanto más obligaremos a la curva de distribución de impulso a ensancharse en torno a su valor medio. Y recíprocamente, el estrechamiento en la

dispersión de p impone un aumento en la amplitud de la dispersión para x . De la carencia de un concepto de posición se sigue la inexistencia de la noción de trayectoria en la teoría cuántica, y por tanto la inadecuación del nombre de “mecánica” que en tradicionalmente se le adjudica.

Cobra especial importancia distinguir entre los diferentes conceptos que subyacen a las distribuciones de probabilidad de la física cuántica y de la física clásica. La mecánica estadística clásica emplea las distribuciones de probabilidad para calcular la fracción de moléculas en un gas, por ejemplo, que a una temperatura dada se mueven con una determinada velocidad y energía. El esfuerzo sobrehumano que comportaría el cálculo de esas magnitudes para cada una de las moléculas del gas, hace ineludible semejante recurso. A diferencia de ello, las distribuciones de probabilidad cuánticas están referidas a un solo cuantón, el cual se caracteriza en cada instante por las curvas completas de distribución de velocidad y posición. Bajo ningún concepto debemos suponer que los cuantones posean velocidades y posiciones por cuya ignorancia nos vemos empujados al uso de las distribuciones de probabilidad. Muy al contrario, estas curvas de distribución probabilística reemplazan a los conceptos mismos de posición e impulso –entre otros– que se ven desprovistos así de su significado clásico.

IV. LA DESIGUALDAD ENERGÍA-TIEMPO

La desigualdad de Heisenberg relacionada con el tiempo [2], acostumbra a ser escrita en función de la energía (que es equivalente a la masa) y del tiempo que dura una interacción entre cuantones. Matemáticamente,

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar/2, \quad (3)$$

donde ΔE es la energía en juego, Δt es el intervalo de tiempo que dura la interacción y \hbar es la constante de Planck dividida entre 2π .

Son muchos los físicos empezando por el mismo Bohr – que consideraban esta ecuación como una de las relaciones de incertidumbre de Heisenberg, en pie de igualdad con las que se dan entre las componentes de la posición y el impulso. Esto, sin embargo, es un error. Y lo es porque dentro del marco formal de una teoría cuántica completamente desarrollada, la deducción de las relaciones de Heisenberg es por entero distinta de la que nos lleva a la ecuación anterior.

Usando un método matemático conocido como “transformada de Fourier” es posible derivar la relación entre el tiempo y la energía del mismo modo que las indeterminaciones de la posición y el impulso. Pero esto implicaría despreciar el aspecto corpuscular que también es imprescindible en la física cuántica. Para ello hemos de usar la teoría completa y entonces resultan válidas las consideraciones hechas aquí.

A diferencia de lo que ocurre con variables clásicas como la energía o el impulso, que poseen sus correspondientes operadores cuánticos, no existe –como se verá después– ningún “operador temporal” que asociar al tiempo en la física cuántica, por lo menos tal como la teoría es hasta el presente. De ello se sigue que las operaciones matemáticas que se utilizan deducir las desigualdades de Heisenberg, no son aplicables en este caso.

Concretamente, en la versión formalizada de la teoría cuántica que Dirac desarrolló, el tiempo se considera lo que él llamaba “un número c ”, es decir, una variable sin dispersión. Dicho con otras palabras, en la física cuántica los conceptos de posición e impulso difieren de los admitidos en la física clásica, pero la noción de una variable temporal que toma siempre valores exactos es idéntica en ambas.

La interpretación correcta de esta desigualdad comienza imaginando un cierto sistema físico (que puede ser una colección de cuantones o uno solo), con propiedades físicas que adquieren unos valores cuyos promedios cuánticos se conocen. Entonces Δt es el intervalo de tiempo que debe transcurrir para que tales promedios varíen apreciablemente.

Por su parte, ΔE es la dispersión de la energía del sistema, la anchura del intervalo de los valores de la energía (la energía del sistema como tal concepto ya no tiene un valor definido con exactitud). Así, cuanto mayor sea la precisión con que se defina la energía del sistema (ΔE es pequeño), mayor será también el tiempo que tardarán sus propiedades en variar de modo apreciable (Δt es grande), y viceversa.

Nada nos impide aplicar esta relación incluso al vacío, donde la energía jamás resulta realmente nula a pesar de que la denominación ‘vacío’ nos incline a suponer lo contrario, pues la condición de nulidad estricta de todos los campos físicos en una región dada del espacio no es un estado propio del hamiltoniano cuántico. Concentremos entonces nuestra atención en una región de espacio vacío durante un minúsculo intervalo de tiempo, de forma que la dispersión de la energía sea muy elevada. Siendo así, no podremos afirmar que la energía posea un valor determinado, sino que existe un intervalo de valores de anchura ΔE . Puesto que energía y masa son equivalentes, la indeterminación en la energía del vacío durante muy breves periodos de tiempo se traducirá en una indeterminación en la cantidad de partículas –virtuales, por descontado– que allí existan.

La conclusión es que el vacío cuántico no se halla verdaderamente “vacío”, por cuanto que en él se da una continua aparición y desaparición de partículas virtuales. Esta circunstancia no viola el principio de conservación de la energía porque el valor de la energía total de la región considerada no está perfectamente determinado excepto para un tiempo infinito. El hecho de que el vacío cuántico es en realidad un efervescente océano de partículas efímeras, ha sido corroborado incluso experimentalmente. El “efecto Casimir” demuestra que la presión ejercida por los choques de las partículas virtuales del vacío sobre las

placas de un condensador situadas frente a frente, no es la misma por el lado que mira al exterior que por el interior. La diferencia de empujes entre ambos coincide exactamente con la esperable a causa de la presión del vacío cuántico [20].

V. ESPACIO Y TIEMPO EN LA FÍSICA CUÁNTICA

Podría pensarse que algunas de las confusiones antes discutidas, tal vez tengan su origen en el propio papel del tiempo como magnitud física en el marco de la teoría cuántica. En realidad éste es un asunto muy debatido. Bastan para comprenderlo las palabras de Von Neumann [21]:

«(...) una debilidad esencial que es, de hecho, la principal debilidad de la mecánica cuántica: su carácter no relativista, el cual distingue el tiempo t de las tres coordenadas espaciales x, y, z , y presupone un concepto de simultaneidad objetiva. De hecho, mientras todas las demás cantidades (en especial esas x, y, z estrechamente conectadas con t por las transformaciones de Lorentz) están representadas por operadores, corresponde al tiempo un parámetro numérico ordinario t , tal como en la mecánica clásica.»

Es cierto, sin duda, que la teoría cuántica elemental fue elaborada en un formato no concordante con la relatividad einsteiniana, pero es erróneo suponer que las coordenadas espaciales se representan en ella mediante operadores. Lo cierto es que en ese extremo coinciden tanto las coordenadas espaciales (x, y, z) como el tiempo t ; ninguna de esas magnitudes posee un operador funcional asociado a ella. Veamos la razón de esto.

La teoría cuántica se desarrolló a imagen y semejanza de la mecánica hamiltoniana por dos motivos cruciales, en parte históricos y en parte lógicos. Desde el triunfo en el siglo XVIII de la mentalidad newtoniana, se tenía la convicción de que cualquier teoría fundamental de la materia –y por extensión de toda la física– había de ser alguna especie de “mecánica”; es decir, un conjunto de ecuaciones del movimiento de partículas que interaccionasen entre ellas obedeciendo alguna ley de fuerzas más o menos complicada.

La noción de campo introducida posteriormente por Faraday en el siglo XIX no cambió sustancialmente la situación. De hecho, quien elaboró matemáticamente las ideas de Faraday, el escocés James Maxwell, obtuvo sus ecuaciones imaginando un éter mecánico sometido las leyes de Newton. Era natural, así pues, que se adoptase el poco afortunado nombre de “mecánica cuántica” para una parcela de la física que nació con el fin de explicar series espectroscópicas, distribuciones de frecuencias electromagnéticas, calores específicos, y una diversidad de cantidades profundamente alejadas de las genuinas magnitudes mecánicas.

Por otro lado, y también en el siglo XIX, los métodos matemáticos de Hamilton demostraron abarcar tanto la descripción mecánica de las partículas como la de las

ondas. Esto supuso una absoluta novedad en el ámbito de la mecánica clásica. Se ha especulado a menudo si con algo más de perspicacia –como si Hamilton hubiese carecido de ella– el científico irlandés hubiera sido capaz de dar un paso más y descubrir por sí mismo el marco matemático de la futura teoría cuántica. No parece, empero, que las cosas fuesen tan sencillas [22]:

«(...). Se ha dicho que si Hamilton hubiese avanzado un poco más, habría descubierto la ecuación de Schroedinger. No es así; le faltaba autoridad experimental para dar ese salto. En los tiempos de Hamilton se consideraba que la Mecánica clásica era rigurosamente cierta y no existían justificaciones basadas en la experiencia para considerar que fuese una aproximación a una teoría más amplia. (...)».

Era casi inevitable, pues, que se recurriese al formalismo hamiltoniano en la naciente física cuántica, toda vez que sus referentes –los cuantones– manifestaban tanto propiedades corpusculares como ondulatorias. Y así se hizo, aderezando la mecánica analítica de Hamilton con el álgebra de operadores de Von Neumann sobre el espacio funcional de Hilbert. Es digno de reflexión el hecho de que la estructura formal de la teoría cuántica puede obtenerse “deformando” la estructura característica de la mecánica clásica [23, 24, 25, 26].

En la mecánica analítica de Hamilton –ya lo sabemos– un sistema de n partículas se describe mediante $3n$ parejas de variables dinámicas conjugadas, que en su forma canónica se suelen representar como q_k y p_k . Se trata de variables generalizadas que pueden representar ángulos, momentos angulares, etc., si bien es cierto que cuando nos ocupamos de partículas puntuales –cosa que *no* son los cuantones– p_n y q_n suelen referirse respectivamente a impulsos y posiciones.

Estas variables obedecen las relaciones expresadas en los corchetes de Poisson:

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{kl}, \quad (4)$$

$$\{q_k, q_l\} = \{p_k, p_l\} = 0. \quad (5)$$

Definimos con ello un punto $6n$ -dimensional en el espacio de fases del sistema. Y la evolución temporal se caracteriza mediante la función hamiltoniana de estas variables dinámicas, $H = H(q_k, p_l)$, que suponemos no dependiente explícitamente del tiempo:

$$dq_k/dt = \{q_k, H\}, \quad (6)$$

$$dp_l/dt = \{p_l, H\}. \quad (7)$$

VI. VARIABLES DINÁMICAS Y COORDENADAS GEOMÉTRICAS

En todas las teorías físicas, salvo en Relatividad General, se supone que el espacio y el tiempo (o el espacio-tiempo si hablamos de la Relatividad Especial) constituyen un escenario meramente pasivo en el que transcurren los

procesos naturales, una suerte de marco inerte imprescindible para describir los fenómenos físicos.

Esto hace necesario distinguir entre las coordenadas espacio-temporales (t, x, y, z) y las variables dinámicas q_n y p_n correspondientes al espacio de fases. Las primeras tan solo sirven para etiquetar matemáticamente los distintos puntos del espacio y el tiempo, por lo cual podrían denominarse “variables de campo”, aunque solo fuese en referencia a un campo métrico que nos permite definir distancias entre dichos puntos.

Muy al contrario, q_n y p_n son variables dinámicas asociadas, por ejemplo, a la posición y el impulso de un cierto objeto físico. No etiquetan de forma genérica todos los puntos de un continuo –como el espacio-tiempo– usado como marco básico para formalizar nuestras teorías; únicamente se refieren a los puntos que de hecho ocupa el objeto físico en cuestión.

Dicho de otro modo, q_n y p_n especifican las propiedades de sistemas materiales concretos, mientras que las coordenadas (t, x, y, z) caracterizan el continuo espacio-temporal adoptado como variedad de base en la que subsumir dichos sistemas materiales concretos.

Ahora nos parecerá más sensato distinguir, en primera instancia, entre la variable de posición de una partícula puntual, q_x , y la coordenada espacial del punto que dicha partícula ocupa en un cierto instante, x . Es cierto que se da la relación numérica $q_x = x$ (y análogamente para el resto de coordenadas), pero una cosa es la partícula puntual –entendida como un ente físico dotado de masa-energía, posición, velocidad y aceleración– y otra muy distinta la coordenada x de un punto fijo en un espacio vacío preexistente.

Por otra parte tenemos el insustituible papel desempeñado por las simetrías en nuestra comprensión de las leyes físicas. Las leyes naturales no se alteran cuando cambiamos la posición del origen de nuestro sistema de referencia (simetría espacio-temporal de traslaciones), ni cuando giramos sus ejes un cierto ángulo (simetría espacial de rotaciones).

Las transformaciones de Lorentz añaden la equivalencia de referenciales en movimiento inercial relativo, lo que se traduce en la simetría de rotaciones espacio-temporales. Pero de nuevo hemos de subrayar una distinción crucial: el obligado cumplimiento de ciertos requisitos de simetría concierne tan solo a las leyes físicas (es decir, a la representación formal de la totalidad de fenómenos y procesos físicamente permisibles), no necesariamente a los sistemas físicos individuales y concretos. En multitud de casos encontraremos sistemas materiales que, por la asimetría de su configuración, digamos, no serán rotacionalmente simétricos. Y ello no significa que la simetría rotacional de las leyes naturales haya quedado en suspenso.

Las simetrías de traslación espacial se generan mediante el impulso total, P , las temporales lo hacen gracias a la energía total (suponiendo que la energía total del sistema venga representada por la función hamiltoniana, cosa que no siempre ocurre) H , y el generador de las simetrías rotacionales es el momento

angular total, J . Si todas estas simetrías se hallan en pie de igualdad, con frecuencia se cuestiona la razón de la preponderancia otorgada a la función hamiltoniana, H , representativa de la evolución temporal de los sistemas físicos. ¿A qué se debe la prioridad de las traslaciones temporales sobre las traslaciones espaciales en la descripción de la naturaleza?

La respuesta ha de buscarse en la tradición histórica de la mecánica analítica, dedicada en su mayoría al estudio de objetos puntiformes y cuerpos rígidos, todos los cuales se transforman trivialmente bajo traslaciones en el espacio. Muy otro, empero, es el caso de los campos clásicos (electromagnéticos, distribución de velocidades o densidades en un fluido, etc.), cuyas propiedades de traslación espacial pueden ser en absoluto triviales. En tales situaciones, P y H cobran igual importancia; tanto así que en Relatividad Especial la energía y el impulso constituyen los componentes de un mismo tetravector espacio-temporal.

La acentuada similitud formal entre el comportamiento de q_x y de x bajo traslaciones y rotaciones espaciales, ha oscurecido notablemente las diferencias de fondo entre ambas magnitudes. Y el uso de la notación x para la posición de las partículas (igualmente para las demás coordenadas) todavía ha acarreado mayor confusión, hasta el punto de que difícilmente hallaremos muchos textos en los que se señale explícitamente la distinción entre ambas variables.

Es más, los denodados esfuerzos de algunos autores por incluir la coordenada temporal, t , como variable canónica conjugada de H , estaban destinados al fracaso (siempre y cuando nos mantengamos dentro del esquema hamiltoniano ortodoxo). El funcional hamiltoniano H depende de las variables canónicas originales, q_n y p_n —y en ocasiones también de t — luego no puede ser él mismo una variable canónica independiente. El malentendido es consecuencia, nuevamente, de confundir coordenadas espacio-temporales (etiquetas matemáticas asignadas a los puntos del espacio-tiempo) con variables dinámicas (propiedades que caracterizan los sistemas físicos situados en el espacio-tiempo).

VII. LOS CUANTONES COMO OBJETOS SUI GENERIS

En la física cuántica elemental la situación es del todo similar: se presupone la existencia de un espacio-tiempo de base, continuo e inerte, los puntos del cual vienen especificados mediante coordenadas espacio-temporales que son variables clásicas sin dispersión (los “números c ” de Dirac). Las simetrías y transformaciones espacio-temporales se expresan en términos de tales coordenadas. Las variables dinámicas, por su parte, sí se hallan cuantizadas, debido a lo cual se sustituyen por operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert. Todas las fórmulas hamiltonianas conservan su validez sin más que reemplazar los corchetes de Poisson por conmutadores cuánticos según la regla $\{A, G\} \rightarrow (i\hbar)^{-1} [\hat{A}, \hat{G}]$. En

particular, las variables canónicas quedan sustituidas por operadores que obedecen las siguientes relaciones de conmutación:

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\hbar\delta_{kl} ; [\hat{q}_k, \hat{q}_l] = [\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0 \quad (8)$$

Llegamos ahora a una de las claves de esta controversia: *la sustitución de variables dinámicas por operadores y corchetes por conmutadores, manifiesta las limitaciones inherentes al hecho de representar mediante magnitudes típicas de partículas puntuales las propiedades de los cuantones, que no son en modo alguno objetos puntiformes.*

En efecto, de ordinario se mantiene la notación q_i para las componentes cartesianas de la posición del cuantón, considerado como un punto material, y análogamente para las componentes del impulso, p_j . Pero ocurre que mientras a p_j se le asigna su correspondiente operador diferencial, la variable q_x , por ejemplo, queda reemplazada por el llamado “operador de multiplicación”, $x \cdot ()$. Que este último no es un operador genuino resulta evidente por su carencia de verdaderas autofunciones. Las deltas de Dirac ni siquiera son auténticas funciones en sentido matemático riguroso, motivo por el cual ningún estado cuántico puede desarrollarse como combinación lineal de funciones propias del operador posición.

El operador impulso no sufre las complicaciones precedentes porque la noción de velocidad, o de momento lineal, es compatible tanto con objetos idealmente puntuales (la masa puntual de la mecánica clásica), como con entidades extensas (una onda plana ideal). Sin embargo, la variable dinámica q_i solo rige sobre objetos idealmente reducibles a un punto, cosa imposible con los cuantones. Por eso sí cabe hablar de la velocidad de propagación de una onda plana, pero no hablamos de su posición puntual; como bien sabemos por la óptica geométrica, el límite no ondulatorio de una onda plana es un rayo, no un punto.

Numerosos textos de física cuántica elemental parten de considerar una única partícula puntual, lo que ya introduce un error en el origen. Sin embargo, se sabe que los cuantones son entes espacialmente extensos, razón por la cual Por eso se habla de “campos electrónicos”, en lugar de “electrones”, o de “campos de materia” en general. Por ello, la función de onda dependiente del tiempo no se escribe $\psi(q_x, t)$, como cabría esperar, sino $\psi(x, t)$, donde x denota una coordenada geométrica que abarca todo el espacio, no la posición instantánea de un corpúsculo puntiforme. Y es natural que así sea, pues un cuantón libre se representa mediante una onda plana infinita, aunque $\psi(x, t)$ no simbolice una onda clásica tridimensional (una falsa impresión reforzada por explicaciones ilustradas con apelaciones a “experimentos de interferencias mediante doble rendija”, etc.).

La función de estado cuántico, en realidad, es una magnitud que se sitúa en un nivel de abstracción todavía más elevado, cuya caracterización formal se da en un espacio funcional de Hilbert con un álgebra específica. De todos modos, la notación empleada, en la que x y t

aparecen en pie de igualdad como argumentos de la función ψ , nos incita a preguntarnos por qué t no es un operador como x . La respuesta, obviamente, consiste en recordar que ni t ni tampoco x son verdaderos operadores.

VIII. LA VARIABLE TIEMPO

De un modo u otro, tal como han sido definidos los operadores asociados a q_i y p_j no están acotados, y su espectro de valores permitidos abarca toda la recta real. En el caso de que se impongan condiciones de contorno periódicas a la variable posición, los autovalores del operador impulso pasan a ser discretos. Y si la función de onda ha de anularse en los extremos de un intervalo espacial finito (el socorrido ejemplo de la “partícula en una caja”), ni siquiera existe entonces un operador autoadjunto para el impulso.

El empeño de considerar t como si fuese un operador genuino, nos llevaría a esperar que obedeciese la relación $[t, H] = i\hbar$. De ser así, t debería poseer un espectro continuo de autovalores desde $-\infty$ hasta $+\infty$, puesto que abarca todos los instantes del tiempo. En consecuencia, lo mismo habría de ocurrir con el hamiltoniano H , contra la palmaria evidencia de que existen sistemas con autovalores discretos de la energía.

Todo este razonamiento parecía apuntar hacia la imposibilidad de construir un operador tiempo, en tanto la presunta existencia de un operador posición acentuaba la asimetría entre espacio y tiempo alejando todavía más la teoría cuántica del espíritu relativista. Ahora bien, ya hemos visto que no hay un auténtico problema; ni x ni t son operadores, y la simetría formal entre ambas coordenadas se mantiene.

Una alternativa, desde luego, consiste en definir formalmente un operador de evolución temporal (no un operador “tiempo”), que proporcione la transición desde un estado particular $\psi_0(x)$ en un instante t_0 hasta otro estado posterior $\psi_t(x)$ en un instante t .

Tendríamos así

$$\psi_t(x) = \hat{U}(t)\psi_0(x), \quad (9)$$

donde el operador $\hat{U}(t)$ es igual a $\exp_e[-i\hat{H}t]$. Es sencillo demostrar que el operador de evolución temporal, aunque lineal, no es hermítico (sus valores propios, $\exp_e[-iE_n t]$, no son reales). Por ese motivo, $\hat{U}(t)$ no puede considerarse sino un artificio puramente formal destinado a expresar el paso desde un estado inicial a otro final mediante un operador lineal que sólo depende de \hat{H} y de t , en un lenguaje matemático equiparable al de otros operadores físicos auténticos.

La situación es todavía más delicada al incorporar la relatividad especial en la teoría cuántica elemental, porque entonces nos vemos privados incluso del pseudo-operador de posición manejado hasta ese momento. En una teoría cuántica relativista, el concepto de partícula localizable –y,

por ende, la idea de función de onda portadora de su densidad de probabilidad– es todavía más delicada que en el caso no relativista [27, 28].

En 1949, T. D. Newton y E. P. Wigner publicaron un conocido artículo [29] en el que mostraban la caracterización prácticamente unívoca de un operador denominado “de posición” mediante su comportamiento bajo traslaciones y rotaciones espaciales. Sin embargo, el operador así definido resulta ser no covariante en el sentido relativista. Más aún, debido al signo positivo de la energía de los sistemas físicos habituales, si en un cierto instante tenemos un autoestado de este operador (un “estado localizado”, en la terminología de Newton y Wigner), tras un intervalo de tiempo infinitamente breve el estado posterior se halla extendido por todo el espacio.

Tan desagradable conducta ha venido propiciando una copiosa literatura en torno a la discusión sobre el significado y utilidad real del concepto de “partícula localizable” en el marco de una teoría cuántica-relativista. Concretamente, en el caso de los espinores de Dirac correspondientes a cuantones con espín $\pm 1/2$, el operador de posición de Newton-Wigner se muestra idéntico al operador de “promedio posicional” de Foldy-Wouthuysen [30].

La verdad es que en las versiones relativistas al uso de la física cuántica, ni la posición ni la duración se cuentan entre las nociones básicas [31, 32]. El papel principal lo juega en este contexto el operador de campo cuántico, $\hat{\Phi}(x,t)$, que se parametriza mediante las coordenadas espacio-temporales consideradas como magnitudes clásicas sin dispersión (nuevamente, los “números c ” de Dirac).

IX. DESARROLLOS POSTERIORES

A partir de la década de 1990, la discusión sobre las relaciones de Heisenberg aplicadas a la energía y al tiempo, cuando la formulación del principio E-t, a un nivel más elaborado, se apoya en la moderna teoría de la medida, incorporando herramientas matemáticas como, por ejemplo, los POVM (*positive operator-valued measures*). Estos desarrollos permiten considerar una amplia y enriquecedora gama de relaciones de indeterminación, con distintas interpretaciones para Δt y ΔE , en el marco de una teoría cuántica que, en desarrollo, considera tiempos que son observables cuánticos (medibles, representables por operadores en el formalismo).

Desde semejante perspectiva, la definición matemática de una medida resulta ser una cantidad M obtenida como valor de un operador, caracterizado sobre una colección de subconjuntos Σ de un conjunto Ω , cuyo dominio es la clase de los operadores acotados no negativos sobre un espacio de Hilbert complejo y separable, bajo la condición de normalización $M(\Omega) = I$, siendo I el operador identidad. Una medida que cumpla estos requisitos recibe el nombre de medida POVM. Una de estas medidas POVM cuyo

dominio se restringe tan solo a operadores de proyección, se abrevia como PVM. Las mediciones asociadas con el caso POVM se llaman “medidas generalizadas”, en tanto que las mediciones PVM (especialmente las mediciones espectrales) se denominan meramente “medidas”.

El formalismo POVM –muy utilizado en la teoría de la información cuántica– procede mediante operadores auto-adjuntos no negativos en un espacio de Hilbert, con el fin de obtener la formulación más general posible de una medida cuántica. Sucede a menudo que las medidas proyectivas en un sistema influyen sobre los subsistemas que lo componen de un modo que no puede describirse adecuadamente por medio de la realización de tales medidas sobre dichos subsistemas. Ello nos conduce a un planteamiento operacional de la medición cuántica [33, 34, 35], en el cual la interacción entre el sistema medido y el aparato de medición reviste una importancia crucial [36, 37].

Existen también trabajos que considera hamiltonianos varios, con espectro puntual no vacío, así como operadores tiempo acotados y autoadjuntos. Parecería que hay distintos conceptos de tiempo en la teoría cuántica, con operadores asociados, no necesariamente autoadjuntos: tiempos de llegada, de efecto túnel, etc. [38, 39].

Sin embargo, no es que haya "otros tiempos en el formalismo", sino que tenemos diversos procedimientos para interpretar distintas maneras de medir intervalos de tiempo en proceso cuánticos. Pero ese no pretendía ser el tema del artículo. La idea del tiempo como sólo un “parámetro” de la teoría, que aparece en la ecuación de evolución y que es medido por un “reloj externo”, sigue siendo la única que subyace a todos estos formalismo [40].

X. CONCLUSIONES

En resumen, gran parte de la confusión engendrada alrededor del debate sobre el espacio y el tiempo en la física cuántica, podría disiparse distinguiendo entre las coordenadas espacio-temporales –que son números c – y las variables dinámicas –heredadas de la mecánica analítica a través del formalismo hamiltoniano– que caracterizan el comportamiento de los sistemas físicos en el espacio-tiempo [41, 42, 43, 44]. Ya que los cuantones no son reducibles ni siquiera idealmente a corpúsculos puntuales, no existe un auténtico “operador de posición” en la teoría cuántica, lo que equilibra la situación, pues tampoco hay un “operador tiempo”.

La creencia opuesta, tan común, se funda en un doble malentendido: por un lado, confundir las variables dinámicas de posición, típicas de las partículas, con las coordenadas de puntos en el espacio; y por otro, asignar las variables dinámicas de posición a entes físicos, como los cuantones, para las cuales resultan esencialmente inapropiadas.

Así pues:

- Las desigualdades de Heisenberg no expresan incertidumbres o errores en mediciones, sino la

adecuación contextual de propiedades puramente clásicas, como la posición o el impulso .

- No existen genuinos operadores cuánticos correspondientes a la posición o al tiempo, dado que la teoría ni asigna a los cuantones atributos tales como la posición espacial, ni considera que el tiempo se más que una variable clásica.
- Por ello, la conservación de la energía se cumple estrictamente, y no tan solo como un promedio estadístico para tiempos prolongados.
- Las teorías cuánticas de campos se describen mediante los operadores de creación y aniquilación, parametrizados mediante las variables espaciales y temporales típicas, que en sí mismas siguen siendo números c sin dispersión cuántica.

En efecto, cuando tratamos de sumergir la teoría cuántica en una formulación relativista, los requisitos de covariancia espacio-temporal se vuelven tan exigentes que nos vemos despojados incluso del recurso a un mal llamado operador de posición: el concepto de objeto puntiforme se pierde desde el principio de manera mucho más diáfana todavía que en la teoría cuántica no relativista, y la totalidad de la controversia queda un tanto obsoleta. Finalmente acabamos desembocando el dominio de la teoría cuántica de campos, concebida como la vía regia para la inserción de la covariancia relativista en el mundo cuántico. Ese es, al menos, el consenso general de la comunidad científica; un consenso que, sin embargo, cuenta con sus propios y nada desdeñables inconvenientes.

AGRADECIMIENTOS

Debo un especial reconocimiento a mis colegas Juan Miguel Suay y Ángel Torregrosa por haber dirigido mi atención sobre los errores conceptuales y malentendidos que todavía en la actualidad se mantienen entorno a la adecuada interpretación de las desigualdades de Heisenberg, muy especialmente en relación con la energía y el tiempo en los sistemas cuánticos. También he de expresar mi gratitud a la profesora Estrella Jornet, que revisó la parte matemática del artículo para asegurar la corrección del formalismo.

REFERENCIAS

- [1] Appleby, D. M., *Maximal accuracy and minimal disturbance in the Arthurs-Kelly simultaneous measurement process*, J. Phys. A: Math. Gen. **31**, 6419-6436 (1998).
- [2] Heisenberg, W., *Ueber den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik and Mechanik*, Zeitschrift für Physik **43**, 172-198 (1927).
- [3] Uffink, J. and Hilgevoord, J., *Uncertainty principle and uncertainty relations*, Foundations of Physics **15**, 925-944 (1985).

- [4] Hilgevoord, J. and Uffink, J., “The mathematical expression of the uncertainty principle” en A. Van der Merwe (ed.), *Microphysical Reality and Quantum Description* (Kluwer, Dordrecht, 1988), pp. 91-114.
- [5] Kennard, E. H., *Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen*, Zeitschrift für Physik **44**, 326-352 (1927).
- [6] Robertson, H.P., *The uncertainty principle*, Physical Review **34**, 573-574 (1929).
- [7] Schoedinger, E., Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip, *Berliner Berichte*, 296-303 (1930).
- [8] Dicke, R. H. and Wittke, J. P., *Introducción a la Mecánica Cuántica*, (Librería General, Zaragoza, España, 1975), p. 98.
- [9] Levich, B. G., *Física Teórica, Vol. 3, Mecánica, Cuántica*, (Reverté, Barcelona, España, 1974), p. 7.
- [10] Jordan, P., *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik II*, Zeitschrift für Physik **44**, 1-25 (1927).
- [11] Pauli, W., “Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik” en K. Geiger y H. Scheel (eds.) *Handbuch der Physik*, (Springer, 2ª ed., Vol. 245, Berlin, 1933).
- [12] Bohr, N., *Atomic Theory and the description of nature*, (Cam. Univ. Press, Cambridge, U. K., 1934).
- [13] Bohr, N., “Discusión with Einstein on epistemological problems in atomic physics”, en P.A. Schilpp (ed.), *Albert Einstein Philosopher-Scientist* (The Library of Living Philosophers, Evanston, Ill., USA, 1949).
- [14] Bunge, M., *Foundations of Physics* (Springer-Verlag, New York, 1967).
- [15] Bunge, M., *The so-called fourth indeterminacy relation*, Canadian Journal of Physics **48**, 1410 (1970).
- [16] Gillespie, D.T., *Introducción a la mecánica cuántica* (Reverté, Barcelona, 1976).
- [17] Schwartz, L., *Théorie des distributions, Tomes I & II*, (Hermann, Paris, 1950-1951).
- [18] Afshar, S.S., *Violation of the principle of complementarity, and its implications*, Proc. SPIE **5866**, 229-244 (2005).
- [19] Tonomura, A., Endo, J., Matsuda, T., Kawasaki, T., and Ezawa, H., *Demonstration of single-electron build-up of an interference pattern*, American Journal of Physics **57**, 117-120 (1989).
- [20] Lamoreaux, S. K., *Demonstration of the Casimir Force in the 0.6 to 6 μm Range*, Phys. Rev. Lett. **78**, 5-8 (1997).
- [21] Von Neumann, J., *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955), p. 354.
- [22] Goldstein, H., *Mecánica Clásica*, (Reverté, Barcelona, 1990).
- [23] Bayen, F., Flato, M., Fronsdal, C., Lichnerowicz, A., and Sternheimer, D., *Deformation theory and quantization I, II*, Annalen der Physik **111**, 61-151(1978).
- [24] Connes, A., *Géométrie non commutative*. (Inter-Editions, Paris, 1990).
- [25] Deligne, P., *Déformations de l'algèbre des fonctions d'une variété symplectique: comparaison entre Fedosov et De Wilde, Lecomte*, Selecta Math. - N.S. **1**, 667-697 (1995).
- [26] Fedosov, B., *Deformation quantization and index theory*, (Akademie Verlag, Berlin, 1996).
- [27] Malament, D. B., “In Defense of Dogma: Why There Cannot Be A Relativistic Quantum Mechanics Of (Localizable) Particles”, en R. Clifton (ed.), *Perspectives on Quantum Reality: Non-Relativistic, Relativistic, and Field-Theoretic* (Academic Publishers, Dordrecht., 1996), pp. 1-10.
- [28] Halvorson, H., Clifton, R., *No Place for Particles in Relativistic Quantum Theory?*, Philosophy of Science **69**, 1-28 (2002).
- [29] Newton, T. D., Wigner, E. P., *Localized states for elementary systems*, Rev. Mod. Phys. **21**, 400-406 (1949).
- [30] Foldy, L.L., Wouthuysen, S.A., *On the Dirac Theory of Spin $\frac{1}{2}$ Particles and Its Non-Relativistic Limit*, Phys. Rev. **78**, 29-36 (1950).
- [31] Jammer, M., *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, (MacGraw-Hill, New York, 1966).
- [32] Jammer, M., *The Philosophy of Quantum Mechanics*, (J. Wiley & Sons, New York, 1974).
- [33] Günther L., *Foundations of quantum mechanics, I. Texts and Monographs in Physics*, (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [34] Ludwig, G., *An axiomatic basis of quantum mechanics. Interpretations and foundations of quantum theory*, Grundlagen Exakt. Naturwiss. **5**, 49-70 (1981).
- [35] Davies, E. B. and Lewis, J. T., *An operational approach to quantum probability*, Comm. Math. Phys. **17**, 239-260 (1970).
- [36] Busch, P., Grabowski, M., Lahti, P.J., *Operational quantum physics*, (Springer, New York-Berlin, 1995).
- [37] Davies, E. B., *Quantum theory of open systems*, (Academic Press, London, 1976).
- [38] Muga, J. G., Mayato, R. S., Egusquiza, I. L., *Time in quantum mechanics*, Lecture Notes in Physics, Vol. 734, (Springer, New York-Berlin, 2007).
- [39] Galapon, E. A., *Pauli's Theorem and Quantum Canonical Pairs: The Consistency Of a Bounded, Self-Adjoint Time Operator Canonically Conjugate to a Hamiltonian with Non-empty Point Spectrum*, arXiv:quant-ph/9908033. Consultado el 7-2-2010.
- [40] Hilgevoord, J., *The uncertainty principle for energy and time*, Am. J. Phys. **64**, 1451 (1996).
- [41] Busch, P., *On the Energy-Time Uncertainty Relation*, Found. Phys. **20**, 33 (1990).
- [42] Han., D., Kim, Y. S., Noz, M. E., *Uncertainty relations for light waves and the concept of photons*, Phys. Rev. A **35**, 1682-1691 (1987).
- [43] Gislason, E. A., Sabelli, N. H. and Wood. J. W., *New form of the time-energy uncertainty relation*, Phys. Rev. A **31**, 2078-2081 (1985).
- [44] Pfeifer, P., Fröhlich, J., *Generalized time-energy uncertainty relations and bounds on lifetimes of resonances*, Rev. Mod. Phys. **67**, 759-779 (1995).