

# El efecto Magnus y La paradoja de D'Alembert: consideraciones del flujo Potencial



J. C. Cuevas<sup>1</sup>, O. Ocaña<sup>1</sup>, A. Hurtado<sup>1</sup>, S. Hidalgo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Grupo de Investigación Física e Informática Fisinfo, Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Carrera 3 No.26 A-40, Bogotá, Colombia.

**E-mail:** jccuevasb@estudiante.udistrital.edu.co, ahurtado@udistrital.edu.co

(Recibido el 22 de Marzo de 2010; aceptado el 15 de Mayo de 2010)

## Resumen

La simulación y descripción de la mecánica de los fluidos se hace desde varios modelos dinámicos de aproximación dependiendo de las variables y el fenómeno a considerar, cuando los efectos viscosos no son apreciables, éstos pueden ser simulados y estudiados desde la teoría de flujo potencial. Aquí se emplea esta teoría para describir cómo ocurre el efecto Magnus, a través de la superposición de varios flujos de potencial y calculando las fuerzas de sustentación que actúan sobre un cilindro con circulación inmerso en un fluido. Como se consideran efectos no viscosos, los cálculos para la fuerza de arrastre dan cero originando la conocida paradoja de D'Alembert. El escrito construye un modelo por medio de la teoría de potencial para calcular su expresión y acto seguido se expone como se relaciona ésta con el desarrollo de la vorticidad para un cuerpo con circulación y sin circulación.

**Palabras clave:** Aproximación dinámica, Flujo Potencial, efecto Magnus y Paradoja de D'Alembert.

## Abstract

The simulation and description of the fluid mechanics is made from several dynamic models of approach depending on the variables and the phenomenon to consider, when the viscous effects are not considerable, these can be simulated and studied from the potential flow theory. Here this theory is used to describe how the Magnus effect happens, through the superposition of several potential flows and calculating the lift forces that act on a cylinder with circulation embedded in a fluid. As these are considered non viscous effects, the calculations for the drag force gives zero causing the well-known D'Alembert's paradox. The paper builds a model using potential theory to calculate its expression and then exposed as it relates to the development of vorticity for a body with movement and without movement.

**Keywords:** Dynamical approach, Potential Flow, Magnus effect and D'Alembert's paradox.

**PACS:** 02.30.Em, 47.15.K, 47.15.km.

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

La teoría de flujo potencial es empleada en los fluidos para describir ciertos fenómenos que se caracterizan por [1]:

- Incompresibilidad: la densidad y el peso específico se consideran constantes.
- Flujo estacionario: Todas las propiedades y parámetros de flujo dependen de la posición pero son independientes del tiempo.
- Válida para flujos planos o bidimensionales.

Para realizar descripciones dinámicas de flujos más complejos, se utilizan técnicas matemáticas y computacionales más avanzadas, como por ejemplo las agrupadas por las CFD por sus siglas en inglés (Computational Fluid Dynamics) [2, 3, 4]. Aunque en la teoría de flujo potencial no se consideran efectos viscosos y se emplea para bajo número de Reynolds, ésta si predice

el desarrollo de la viscosidad, en lo que se conoce como paradoja de D'Alembert.

Describir la dinámica del efecto Magnus a través de las ecuaciones de Navier-Stokes recae en una tarea difícil de explicar estas ecuaciones permiten una aproximación del comportamiento real de los fluidos, además es de anotar que las ecuaciones no prevé si este movimiento se va a mantener o cambiara, el estudio que se muestra aborda la teoría de flujo de potencial este basado en el concepto matemático de función potencial para calcular la expresión del efecto Magnus.

## II. EL EFECTO MAGNUS

Los estudios actuales demuestran que la fuerza Magnus es el resultado de la deformación asimétrica en el grosor de la

capa límite cuando ésta es desplazada por la rotación de la esfera en el flujo [5, 6, 7]. Un objeto como una esfera o un cilindro puede impartir un movimiento de rotación a una capa muy delgada adyacente a la superficie de éste. Las partículas de fluido que componen dicha capa (capa límite) desarrollaran vorticidad y en consecuencia circulación sobre el objeto. El movimiento impartido a esta capa afecta la manera en la que el flujo se separa de la superficie en la parte trasera de la esfera [8].

La separación de la capa límite es retrasada en el lado en donde el objeto rota en la misma dirección que el flujo de corriente libre (parte inferior derecha de la esfera en la Figura 1), mientras la separación ocurre prematuramente por el lado en que se mueve contra el flujo de corriente libre. La estela entonces cambia hacia el lado que se mueve contra el flujo de corriente libre. Por consiguiente, el flujo por delante del objeto es desviado, y la variación que resulta del cambio de momentum en el flujo genera una fuerza en dirección contraria (Fig. 1).

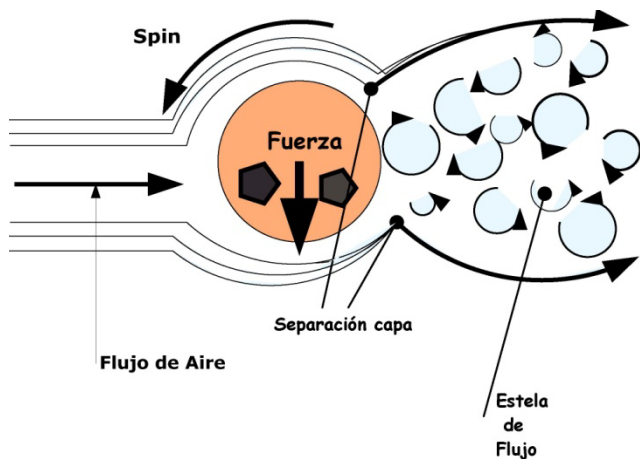


FIGURA 1. Deformación de los elementos en la capa límite por una esfera que rota en sentido dextrógiro.

### III. FLUJO POTENCIAL

Para realizar el cálculo de la fuerza Magnus, primero se tiene en cuenta las consideraciones mencionadas anteriormente para el flujo potencial y aplicándolas a la ecuación de vorticidad de Navier-Stokes [9] se obtiene la condición principal que permite formular un campo escalar que describe el efecto Magnus

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla) u, \tag{1}$$

la ecuación (1) con la condición de irrotacionalidad queda reducida a

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad i \neq j. \tag{2}$$

La ecuación (2) garantiza la existencia de una función escalar  $\phi$  llamada potencial de velocidad, la cual se relaciona con las componentes de la velocidad por

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{y} \quad u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}, \tag{3}$$

y una función  $\psi$  que a su vez se relaciona con las componentes de la velocidad por

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad \text{y} \quad u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \tag{4}$$

Ahora bien, el potencial para un cilindro con circulación (Fig. 2) es:

$$N = u \left( z + \frac{a^2}{z\pi} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{a}. \tag{5}$$

Donde  $a$  es el radio del cilindro y  $\Gamma$  es la intensidad del vórtice.

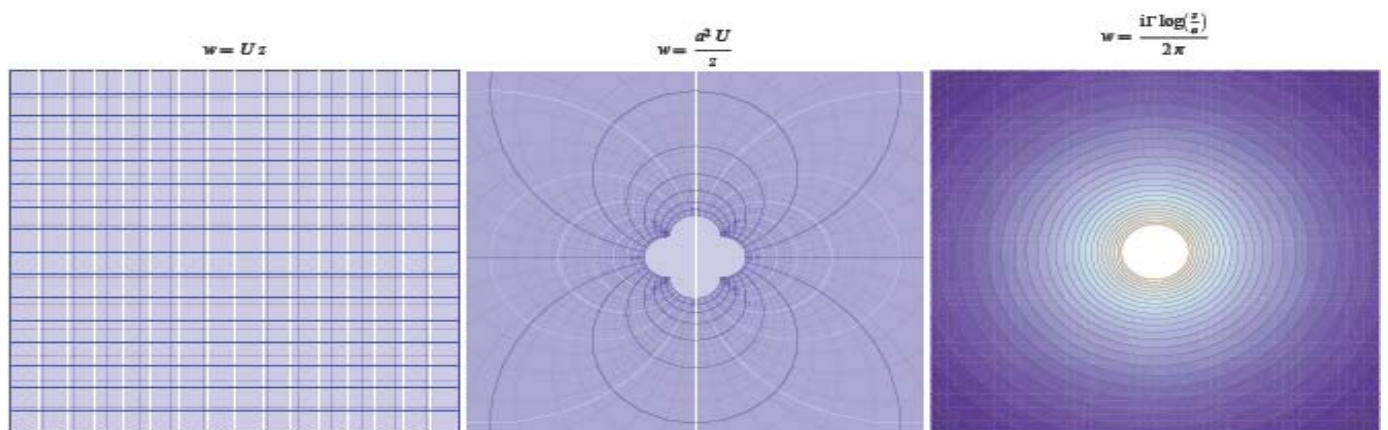
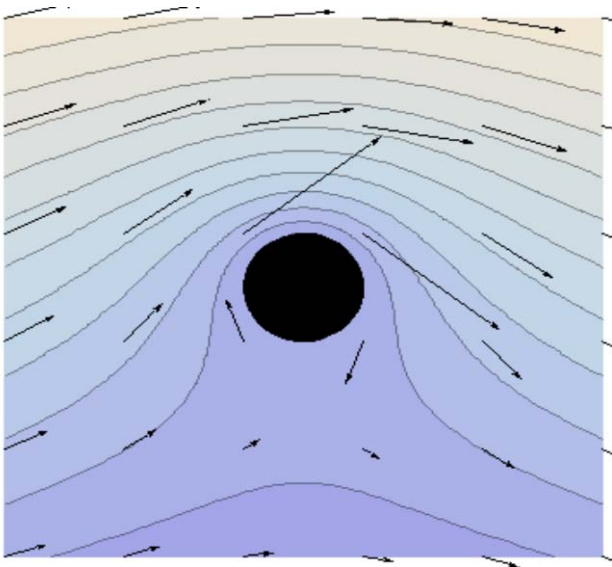


FIGURA 2. Superposición de un flujo uniforme, un doblete y un vórtice respectivamente para formar el patrón de un cilindro con circulación. Las líneas más intensas (azules) son el campo de velocidades y las líneas más tenues (blancas) representan las líneas de corriente.

En la Fig. 2 el flujo uniforme se mueve de izquierda a derecha, el sentido del doblete y el vórtice es levógiro respectivamente. Encima del cilindro el movimiento del vórtice se suma a la velocidad causada por el flujo uniforme y por el doblete, mientras que por debajo del cilindro el vórtice resta la velocidad causada por el flujo uniforme y el doblete, la adición de velocidades se evidencia ya que en la parte superior del cilindro las líneas de corrientes están más próximas entre sí indicando alta velocidad. En contraste en la parte inferior del cilindro, el vórtice resta la velocidad causada por el doblete y el flujo uniforme (Fig. 3). La ecuación de Bernoulli predice una presión más alta debajo del cilindro ocasionando una fuerza de sustentación hacia arriba.

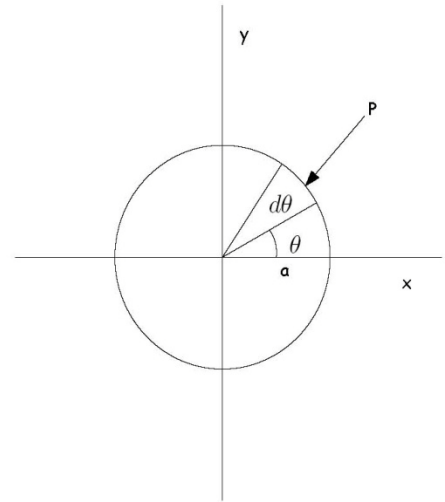


**FIGURA 3.** Flujo alrededor de un cilindro con velocidad angular saliendo de la hoja y el fluido circula de izquierda a derecha (los vectores flecha indican el cambio de velocidad en el flujo de corriente libre y los puntos de estancamiento, donde la velocidad relativa del cilindro respecto al flujo es cero se encuentran justo debajo de éste y opuestos diametralmente.).

La geometría del cilindro la podemos observar en la Fig. 3, donde las funciones de corriente  $\psi$  y velocidad  $\phi$  son la parte imaginaria y real de la función potencial (ecuación 5) respectivamente.

Para calcular el exceso de presión sobre el cilindro hallamos las componentes tangencial y radial de la velocidad en cualquier punto del flujo en coordenadas polares (ecuaciones 3 y 4)

$$u_{\theta} = -u \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}. \quad (6)$$



**FIGURA 4.** Geometría para el cálculo del exceso de presión sobre un cilindro con circulación.

$$u_r = u \left( \theta - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos \theta. \quad (7)$$

Evaluando las ecuaciones (6) y (7) en el contorno del cilindro

$$u_{\theta}|_{r=a} = -2u \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a}, \quad (8)$$

$$u_r|_{r=a} = 0. \quad (9)$$

Lo que indica que sólo una componente contribuye a la fuerza de levantamiento, en este caso al efecto Magnus, de la ecuación (8) obtenemos los puntos P de estancamiento

$$\sin \theta = \frac{\Gamma}{4\pi au}. \quad (10)$$

Esta ecuación puede tener solución para dos valores, que en general para un flujo bidimensional son los puntos de estancamiento. La ecuación radial nos indica que hay 3 valores que determinan los puntos de estancamiento (velocidad cero) estos son  $r=a$  y  $\theta = \pm \pi/2$ , con estos valores se calcula la distancia radial al punto de estancamiento

$$u_{\theta}|_{\theta=\pi/2} = -u \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0, \quad (11)$$

$$r = \frac{1}{4\pi u} \left[ \Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - (4\pi au)^2} \right], \quad (12)$$

se obtiene una raíz para  $r > a$  y la otra da un punto de estancamiento dentro del cilindro. Ahora con ayuda de la ecuación de Bernoulli se encuentra la presión

$$P_{r=a} + \frac{\rho}{2} (u\theta|_{r=a})^2 = P_{\infty} + \frac{\rho u^2}{2}, \quad (13)$$

$$P_{r=a} = P_{\infty} + \frac{\rho}{2} \left[ u^2 - \left( 2u \sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \right]. \quad (14)$$

La simetría del flujo sobre el eje y implica que la fuerza debida a la presión no tiene componente a lo largo del eje  $x$ , entonces  $P_{\infty} = 0$ . La fuerza debida a la presión a lo largo del eje y se llama fuerza de sustentación (Fig. 4), esta es [9]:

$$S = \int_0^{2\pi} P_{r=a} a \sin\theta \, d\theta = \rho u \Gamma, \quad (15)$$

en donde la ecuación (14) es sustituida en la ecuación (15), dado que los términos lineal y cúbico dan cero al integrar. Ahora, se calcula la componente para el arrastre de manera similar

$$S = \int_0^{2\pi} P_{r=a} a \cos\theta \, d\theta = 0, \quad (16)$$

el resultado indica, que para un cilindro con circulación inmerso en un fluido el arrastre es cero, lo cual contradice claramente las observaciones reales.

#### IV. DISCUSIÓN

Antes del siglo XX no se contaba con una descripción de los fluidos, donde se tuviera en cuenta la importancia de la capa límite y su influencia sobre el movimiento de los cuerpos en dichos fluidos. Como se vio anteriormente la teoría de flujo de potencial no predice el efecto de arrastre que se da sobre estos cuerpos, por eso fue necesario introducir más términos que dieran cuenta de los efectos viscosos, turbulentos, y arrastre sobre los cuerpos. Esto se logró gracias a la teoría de la capa Límite desarrollada por Prandtl y el desarrollo de Navier-Stokes, contrario a lo que se hizo aquí, la teoría de flujo potencial fue primero y luego se desarrollaron las ecuaciones de Navier-Stokes que incluyen una descripción más completa de los fluidos.

Al comienzo del artículo se mencionó que la teoría de potencial no consideraba efectos viscosos pero si los precedía, D'Alembert publicó un informe en el cual afirmaba que de acuerdo a la teoría no viscosa "la fuerza de arrastre de cualquier cuerpo sin importar su forma, inmerso en un flujo de corriente uniforme, su arrastre es idénticamente cero", este hecho no concordaba con las observaciones para los flujos reales [10]. Sin embargo se consideró que la vorticidad para el flujo uniforme es cero

(ecuación 2), si se elimina el término para el vórtice de la ecuación (5) y se calcula nuevamente la sustentación y el arrastre de manera similar a la anteriormente expuesta, se obtiene que el arrastre y la sustentación son cero, de manera que la única forma para que sobre el cilindro, el fluido ejerza una fuerza de desviación lateral u horizontal (efecto Magnus) o sustentación, es que éste se encuentre rotando en el fluido, es decir que desarrolle circulación. En los cilindros hay dos formas de desarrollar circulación una es que éste se encuentre rotando y la otra es por medio de la viscosidad del fluido; además, según la definición del efecto Magnus, el cilindro mediante su rotación transfiere una cantidad de momentum a las partículas que rodean el contorno del cilindro (capa límite) y éstas a su vez provocan una reacción igual en las partículas del fluido, haciendo que adquieran vorticidad y desarrollen efectos viscosos (Fig. 1). Contrario a la suposición inicial de un flujo con vorticidad cero.

#### V. CONCLUSIONES

Considerar las ecuaciones de Navier-Stokes para calcular la expresión del efecto Magnus es una tarea muy compleja debido a la naturaleza de dichas ecuaciones; la teoría de flujo potencial matemáticamente es más fácil de manipular, por eso abordar la descripción de este fenómeno empleando conceptos más sencillos, pero que pueden tener una forma de aprehensión y comprensión más visual [11, 12], facilita la enseñanza y aprendizaje de los principales conceptos de la mecánica de fluidos que intervienen en el efecto Magnus, a la vez que potencializa las capacidades intelectuales del estudiante como estudiante-investigador de las ciencias básicas. Alternativamente se puede considerar el cambio de momentum neto del aire debido a su interacción con el cilindro, considerando un volumen de control sobre dicho cilindro y aplicando las leyes de Newton, obteniéndose así una expresión idéntica a la ecuación (15) [13].

#### AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos a la Facultad de Ciencias y Educación y al Proyecto Curricular de Licenciatura en Física de la Universidad Distrital, por el apoyo a los miembros del grupo Física e Informática y al semillero de investigación SILAB.

#### REFERENCIAS

- [1] Shames, I., *Mecánica de Los Fluidos* (Mc Graw Hill, 3ra. Edición, Colombia, 1995).
- [2] Löner, R., *Applied Computational Fluid Dynamics Techniques* (John Wiley & Sons, 2nd Edition, England, 2008).

- [3] Pozrikidis, C., *Fluid Dynamics Theory, Computation, and Numerical Simulation* (Kluwer Academic Publishers, United States of America, 2001).
- [4] Buchanan, G., *Schaum's outline of Theory and Problems of Finite Element Analysis* (Mc Graw Hill, United States of America, 1995)
- [5] Achutara, K.,  
<<http://www.geocities.com/k\achutarao/MAGNUS/magnus.html>>, Consultado el 21 de Mayo de 2010.
- [6] Alan, M., *The effect of spin on the flight of a baseball*, Am. J. Phys. **76**, 119-124 (2007).
- [7] Aguiar, E. y Rubini, G., *A aerodinâmica da bola de futebol*, Revista Brasileira de Ensino de Física **26**, 297-306 (2004).
- [8] Nudson, D., *Fundamentals of Biomechanics* (Springer, California, 2007).
- [9] Kundu, K. and Cohen, I., *Fluid Mechanics* (Academic Press, 2nd Edition, California, 2002).
- [10] White, F., *Fluid Mechanics* (Mc Graw Hill, 4th Edition, New York, 2002).
- [11] Korsunsky, A. and Constantinescu, A., *Elasticity with Mathematica®: An Introduction to Continuum Mechanics and Linear Elasticity* (Cambridge University Press, New York, 2007).
- [12] Esquembre, F., *Synchronous collaboration of virtual and remote laboratories*, Computer Applications in Engineering Education **17**, (2009).
- [13] Cuevas, J. et al., *Cálculo de la Fuerza Magnus desde La Capa Límite*. (Memorias XXIII Congreso Nacional de Física (resumen). Santa Marta, Colombia, 2009).