Generador de Lanczos

S. Barragán-Gómez, J. López-Bonilla, J. Robles-García
ESIME-Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional,
Anexo Edif. 3, Col. Lindavista, CP 07738 México DF.

E-mail: jlopezb@ipn.mx

(Recibido el 18 de Agosto de 2010; aceptado el 17 de Septiembre de 2010)

Resumen

Se utiliza el formalismo de Newman-Penrose para determinar el espíntensor de Lanczos para el espacio-tiempo de Minkowski y el superpotencial de Weert para una carga puntual en movimiento arbitrario.

Palabras Clave: Espíntensor de Lanczos; Superpotencial de Weert; Campo de Liénard-Wiechert.

Abstract

Here the Newman-Penrose formalism is employed to determine the Lanczos spintensor for Minkowski space-time and the Weert superpotential for a point charge in arbitrary motion.

Keywords: Lanczos spintensor; Weert superpotential; Liénard-Wiechert field

PACS: 04.20.-q ; 0.40.+e ; 95.30.Sf **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Lanczos [1] mostró que en todo 4-espacio de Riemann el tensor conformal es generado por un tensor K_{abc} (que él llamó espíntensor) cuyo significado físico (si lo tiene) aún se desconoce. La construcción del espíntensor es muy difícil mediante el enfoque tensorial, es más exitoso utilizar el formalismo de Newman-Penrose (NP) [2], por esta razón en el presente trabajo indicamos ecuaciones tipo NP equivalentes a las relaciones tensoriales de Lanczos. Con la herramienta desarrollada se obtienen los superpotenciales de Minkowski (relatividad especial) y de Weert [3] (electrodinámica de cargas puntuales) y también se expone una clasificación Petrov [4] del campo de Liénard-Wiechert [5] calculándose las correspondientes direcciones principales.

II. GENERADOR DEL TENSOR CONFORMAL

En la Parte A de la presente Sección se expone el resultado de Lanczos [1] en forma tensorial, y en la Parte B dicho resultado se transfiere al formalismo de Newman-Penrose [2]. La idea esencial es la presencia de un tensor de tercer orden que genera al tensor de Weyl, en general es difícil calcular el espíntensor de Lanczos.

A. Superpotencial de Lanczos

Mediante el cálculo variacional Lanczos [1] probó que en todo espacio-tiempo existe K_{abc} generador del tensor conformal (emplearemos las cantidades y notación de [6]):

$$C_{pqjb} = K_{pqj;b} - K_{pqb;j} + K_{jbp;q} - K_{jbq;p} + g_{pb}K_{jq}$$

$$-g_{pj}K_{qb} + g_{qj}K_{pb} - g_{qb}K_{pj}, \qquad (1.a)$$

con las propiedades:

$$K_{aij} = -K_{iaj}, \quad K_{abc} + K_{bca} + K_{cab} = 0,$$

$$K_{a\ \ c}^{\ c} = 0, \qquad (1.b)$$

$$K_{ab\ \ ;c}^{\ \ c} = 0, \qquad (1.c)$$

$$K_{rj} = K_{jr} \equiv K_{r\ \ j;c}^{\ c}. \qquad (1.d)$$

No se conoce el significado físico-geométrico del espíntensor K_{ijr}. Bampi-Caviglia [7] dieron una demostración rigurosa de (1.a) y obtuvieron K_{bct} para algunos R_4 tipo 0; diversos investigadores opinan que en el caso general K_{abt} será un objeto no-local, es decir, dependerá de toda la geometría del espacio-tiempo, sin embargo, en [8] se calculó el superpotencial de Lanczos para las métricas de Schwarzschild, Kasner [9], Narlikar-Karmarkar [10], Gödel [11], Taub [12] y Bertotti [13], y en todos los casos K_{tij} resultó ser local.

En los cálculos C_{ijkc} es dato y la incógnita K_{bat} debe obtenerse a partir de (1.a) con las restricciones (1.b,c,d), pero este enfoque directo no es conveniente porque (1.a) no proporciona un método sistemático para despejar a K_{ijc}; es más útil proyectar (1) sobre la tétrada nula, esto se hace en la próxima Parte.

Lanczos [1] afirma que K_{bcd} será importante en la unificación de efectos cuánticos y gravitacionales, por ello lo bautizó con el nombre de espíntensor: Taub [14, 15] no comparte esta opinión. Por otro lado, Maher-Zund [16] y Zund [17] han mostrado que el espinor asociado a K_{ijr} satisface una ecuación para partículas con masa en reposo nula y espín 2 (por ejemplo, gravitones), así que permanece abierta la interpretación de K_{bcd}.

B. Formalismo de Newman-Penrose

Aquí indicaremos ecuaciones tipo NP con la misma información que (1) las cuales fueron obtenidas en [6,17], nos limitaremos a exponer los resultados ignorando los pasos intermedios.

Construyamos el tensor:

$$Q_{abc} = K_{abc} + i\,{}^*K_{abc}, \qquad (2.a)$$

que en virtud de (1.b) satisface:

$$Q_{abc} = -Q_{bac}, \quad Q_{a\ c}^{\ c} = 0, \qquad (2.b)$$

entonces la tétrada de NP conduce a la expresión:

$$\begin{aligned} Q_{abc} = 2[&\Omega_0 U_{ab}\ell_c + \Omega_1\left(M_{ab}\ell_c - U_{ab}m_c\right) + \Omega_2\left(V_{ab}\ell_c - M_{ab}m_c\right) \\ &-\Omega_3 V_{ab}m_c - \Omega_4 U_{ab}\bar{m}_c + \Omega_5\left(U_{ab}n_c - M_{ab}\bar{m}_c\right) \\ &+\Omega_6\left(M_{ab}n_c - V_{ab}\bar{m}_c\right) + \Omega_7 V_{ab}n_c], \qquad (2.c) \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= K_{(1)(4)(4)}, & \Omega_4 &= K_{(1)(4)(1)}, \\ \Omega_1 &= K_{(1)(4)(2)}, & \Omega_5 &= K_{(1)(4)(3)}, \qquad (2.d) \\ \Omega_2 &= K_{(3)(2)(4)}, & \Omega_6 &= K_{(3)(2)(1)}, \\ \Omega_3 &= K_{(3)(2)(2)}, & \Omega_7 &= K_{(3)(2)(3)}, \end{aligned}$$

así, determinar K_{ijr} equivale a calcular las 8 cantidades complejas Ω_b, en otras palabras, el espíntensor de Lanczos tiene 16 componentes reales independientes.

Al proyectar (1.c) sobre la tétrada nula obtenemos:

$$\begin{aligned} &\Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 - \bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 - 2\nu\Omega_1 + \left(3\mu + \bar{\mu} + \gamma - \bar{\gamma}\right)\Omega_2 \\ &+\left(\bar{\alpha} - 3\beta + \tau - \bar{\pi}\right)\Omega_3 + 2\lambda\Omega_5 + (-\alpha - \bar{\beta} + \bar{\tau} - 3\pi)\Omega_6 \\ &+(3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \rho - \bar{\rho})\Omega_7 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Delta\Omega_0 - \delta\Omega_1 - \bar{\delta}\Omega_4 + D\Omega_5 + \left(\mu + \bar{\mu} - 3\gamma - \bar{\gamma}\right)\Omega_0 \\ &+\left(3\tau - \bar{\pi} + \bar{\alpha} + \beta\right)\Omega_1 - 2\sigma\Omega_2 + (3\alpha - \bar{\beta} + \bar{\tau} - \pi)\Omega_4 \\ &+\left(\bar{\varepsilon} - \varepsilon - \bar{\rho} - 3\rho\right)\Omega_5 + 2\kappa\Omega_6 = 0, \qquad (2.e) \\ &-\Delta\Omega_1 + \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 - D\Omega_6 + \nu\Omega_0 + \left(\gamma + \bar{\gamma} - 2\mu - \bar{\mu}\right)\Omega_1 \\ &+\left(-\bar{\alpha} + \beta - 2\tau + \bar{\pi}\right)\Omega_2 + \sigma\Omega_3 - \lambda\Omega_4 \\ &+\left(-\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau} + 2\pi\right)\Omega_5 + \left(-\varepsilon - \bar{\varepsilon} + 2\rho + \bar{\rho}\right)\Omega_6 - \kappa\Omega_7 = 0, \end{aligned}$$

donde $\delta, \bar{\delta}, \Delta$ y D son operadores lineales que dependen de la tétrada nula y del sistema coordenado.

De manera análoga (1.a) es equivalente a:

$$\psi_0 = 2\left[-\delta\Omega_0 + D\Omega_4 + \left(\bar{\alpha} + 3\beta - \bar{\pi}\right)\Omega_0 - 3\sigma\Omega_1 + \left(-3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho}\right)\Omega_4 + 3\kappa\Omega_5\right],$$

$$\begin{aligned} 2\psi_1 = &-\Delta\Omega_0 - 3\delta\Omega_1 + \bar{\delta}\Omega_4 + 3D\Omega_5 + \left(3\gamma + \bar{\gamma} + 3\mu - \bar{\mu}\right)\Omega_0 \\ &+3\left(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi} - \tau\right)\Omega_1 - 6\sigma\Omega_2 + \left(-3\alpha + \bar{\beta} - 3\pi - \bar{\tau}\right)\Omega_4 \\ &+3\left(-\varepsilon + \bar{\varepsilon} + \rho - \bar{\rho}\right)\Omega_5 + 6\kappa\Omega_6, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2 = &-\Delta\Omega_1 - \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 + D\Omega_6 + \nu\Omega_0 + \left(2\mu - \bar{\mu} + \gamma + \bar{\gamma}\right)\Omega_1 \\ &+(\bar{\alpha} - \beta - \bar{\pi} - 2\tau)\Omega_2 - \sigma\Omega_3 - \lambda\Omega_4 + (-\alpha + \bar{\beta} - 2\pi - \bar{\tau})\Omega_5 \\ &+\left(\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho} + 2\rho\right)\Omega_6 + \kappa\Omega_7, \qquad (2.f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\psi_3 = &-3\Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 + 3\bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 + 3\left(-\bar{\mu} + \mu + \bar{\gamma} - \gamma\right)\Omega_2 + \\ &6\nu\Omega_1 + \left(\bar{\alpha} - 3\beta - 3\tau - \bar{\pi}\right)\Omega_3 - 6\lambda\Omega_5 + 3\left(\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau} - \pi\right)\Omega_6 \\ &+\left(3\varepsilon + \bar{\varepsilon} - \bar{\rho} + 3\rho\right)\Omega_7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_4 = 2[&-\Delta\Omega_3 + \bar{\delta}\Omega_7 + 3\nu\Omega_2 + \left(-\bar{\mu} - 3\gamma + \bar{\gamma}\right)\Omega_3 - 3\lambda\Omega_6 \\ &+\left(3\alpha + \bar{\beta} - \tau\right)\Omega_7], \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} &\psi_0 = C_{(4)(1)(4)(1)}, \quad \psi_1 = C_{(4)(3)(4)(1)}, \quad \psi_2 = C_{(2)(3)(4)(1)}, \\ &\psi_3 = C_{(3)(4)(3)(2)}, \quad \psi_4 = C_{(3)(2)(3)(2)}. \qquad (2.g) \end{aligned}$$

Por último, (1.d) conduce a las ecuaciones tipo NP:

$$\begin{aligned} K_{(1)(1)} = &\,\delta\left(\Omega_5 - \bar{\Omega}_2\right) - \Delta\Omega_4 + D\bar{\Omega}_3 + \bar{\nu}\Omega_0 + \bar{\lambda}\left(2\bar{\Omega}_1 - \Omega_1\right) + \\ &\left(-\bar{\alpha} + \beta - 3\bar{\pi}\right)\bar{\Omega}_2 + \left(-\bar{\rho} - \varepsilon + 3\bar{\varepsilon}\right)\bar{\Omega}_3 + \left(-\mu - \bar{\gamma} + 3\gamma\right)\Omega_4 \\ &+\left(\bar{\alpha} - \beta - 3\tau\right)\Omega_5 + 2\sigma\Omega_6 - \sigma\bar{\Omega}_6 + \kappa\bar{\Omega}_7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{(1)(2)} = &-\delta\bar{\Omega}_5 - \bar{\delta}\Omega_5 + D\left(\Omega_6 + \bar{\Omega}_6\right) + \bar{\mu}\Omega_1 + \mu\bar{\Omega}_1 \\ &-\bar{\pi}\Omega_2 - \pi\bar{\Omega}_2 + \lambda\Omega_4 + \bar{\lambda}\bar{\Omega}_4 + (\alpha - \bar{\beta} - 2\pi)\Omega_5 + \\ &\left(\bar{\alpha} - \beta - 2\bar{\pi}\right)\bar{\Omega}_5 + \left(\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\rho\right)\Omega_6 + \left(\varepsilon + \bar{\varepsilon} - 2\bar{\rho}\right)\bar{\Omega}_6 + \kappa\Omega_7 + \bar{\kappa}\bar{\Omega}_7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{(1)(3)} = &\,\delta\Omega_6 + \bar{\delta}\bar{\Omega}_3 - \Delta\left(\bar{\Omega}_2 + \Omega_5\right) + \bar{\nu}\left(\Omega_1 + 2\bar{\Omega}_1\right) - \bar{\lambda}\Omega_2 \\ &+\left(\gamma - \bar{\gamma} - 3\bar{\mu}\right)\bar{\Omega}_2 + \left(3\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau}\right)\bar{\Omega}_3 + \nu\Omega_4 + (\gamma - \bar{\gamma} - 2\mu)\Omega_5 \end{aligned}$$

$$+\left(\bar{\alpha}+\beta-2\tau\right)\Omega_6-\tau\bar{\Omega}_6+\sigma\Omega_7+\rho\bar{\Omega}_7, \qquad (2.h)$$

$$K_{(1)(4)}=-\delta\bar{\Omega}_1-\bar{\delta}\Omega_4+D\left(\bar{\Omega}_2+\Omega_5\right)+\bar{\mu}\Omega_0+\bar{\lambda}\bar{\Omega}_0-\bar{\pi}\Omega_1$$
$$+\left(\bar{\alpha}+\beta-2\bar{\pi}\right)\bar{\Omega}_1+\left(\bar{\varepsilon}-\varepsilon-\bar{\rho}\right)\bar{\Omega}_2+\bar{\kappa}\bar{\Omega}_3+\left(3\alpha-\bar{\beta}-\pi\right)\Omega_4$$
$$+\left(\bar{\varepsilon}-\varepsilon-3\rho\right)\Omega_5-\sigma\bar{\Omega}_5+\kappa\left(2\Omega_6+\bar{\Omega}_6\right),$$

$$K_{(3)(3)}=\delta\Omega_7+\bar{\delta}\bar{\Omega}_7-\Delta\left(\Omega_6+\bar{\Omega}_6\right)+\bar{\nu}\Omega_2+\nu\bar{\Omega}_2-\bar{\lambda}\Omega_3-\lambda\bar{\Omega}_3$$
$$+2\nu\Omega_5+2\bar{\nu}\bar{\Omega}_5-\left(\gamma+\bar{\gamma}+3\mu\right)\Omega_6-\left(\gamma+\bar{\gamma}+3\bar{\mu}\right)\bar{\Omega}_6$$
$$+\left(-\tau+\bar{\alpha}+3\beta\right)\Omega_7+\left(-\bar{\tau}+\alpha+3\bar{\beta}\right)\bar{\Omega}_7,$$

$$K_{(4)(4)}=-\delta\bar{\Omega}_0-\bar{\delta}\Omega_0+D\left(\Omega_1+\bar{\Omega}_1\right)+\left(3\alpha+\bar{\beta}-\pi\right)\Omega_0$$
$$+\left(3\bar{\alpha}+\beta-\bar{\pi}\right)\bar{\Omega}_0-\left(\varepsilon+\bar{\varepsilon}+3\rho\right)\Omega_1-\left(\varepsilon+\bar{\varepsilon}+3\rho\right)\bar{\Omega}_1$$
$$+2\kappa\Omega_2+2\bar{\kappa}\bar{\Omega}_2-\bar{\sigma}\Omega_4-\sigma\bar{\Omega}_4+\bar{\kappa}\Omega_5+\kappa\bar{\Omega}_5.$$

En la siguiente Sección utilizaremos (2.e, f, h) para obtener el espíntensor del espacio de Minkowski así como el superpotencial de Weert [3].

III. ESPÍNTENSORES DE MINKOWSKI Y DE WEERT

En la Parte A de esta Sección empleamos la versión NP de (1) para obtener un espíntensor de Lanczos para el espacio de Minkowski, y en la Parte B utilizamos (2) para deducir el superpotencial que genera a la parte acotada del tensor de Maxwell producido por una carga puntual en movimiento arbitrario.

A. Espacio-Tiempo Plano

En ausencia de gravitación el tensor de Riemann se anula, por lo tanto C_{ijrq} =0 y deseamos un K_{bcd} que cumpla con esta condición a través de (1). Para tal fin emplearemos las coordenadas de Robinson-Trautman [18, 19]:

$$\kappa=\sigma=\tau=\lambda=\varepsilon=\pi=\nu=\gamma=0,\ \mu=\frac{\rho}{2}=-\frac{1}{2r},$$
$$\alpha=\beta=\frac{i}{2\sqrt{2r}}\cdot ctg\theta,\ \psi_a=0,\quad a=0,.....4, \qquad (3.a)$$
$$D=\frac{\partial}{\partial r},\ \Delta=-\frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial u},\ \delta=\frac{1}{\sqrt{2r}}\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

que al sustituir en (2.e,f) implica el conjunto de ecuaciones acopladas:

$$-\delta\Omega_0+D\Omega_4+2\beta\Omega_0-\rho\Omega_4=0,$$
$$-\delta\Omega_1+D\Omega_5+\mu\Omega_0-\rho\Omega_5=0,$$
$$-\delta\Omega_2+D\Omega_6+2\mu\Omega_1-2\beta\Omega_2-\rho\Omega_6=0,$$
$$-\Delta\Omega_2+\bar{\delta}\Omega_6-\mu\Omega_2+\rho\Omega_7=0, \qquad (3.b)$$

$$-\Delta\Omega_3+\bar{\delta}\Omega_7-\mu\Omega_3+2\beta\Omega_7=0$$
$$\Delta\Omega_2-\delta\Omega_3-\bar{\delta}\Omega_6+D\Omega_7+4\mu\Omega_2-4\beta\Omega_3-2\rho\Omega_7=0,$$
$$\Delta\Omega_0-\delta\Omega_1-\bar{\delta}\Omega_4+D\Omega_5+2\mu\Omega_0+4\beta\Omega_4-4\rho\Omega_5=0,$$
$$-\Delta\Omega_1+\delta\Omega_2+\bar{\delta}\Omega_5-D\Omega_6-3\mu\Omega_1+2\beta\left(\Omega_2-\Omega_5\right)+3\rho\Omega_6=0,$$

cuya solución es inmediata:

$$\Omega_a=0,\quad a\neq 4,\quad \Omega_4=-\frac{1}{r}\csc^2\theta, \qquad (3.c)$$

y por (2.c):

$$K_{abc}=\frac{1}{r}\csc^2\theta\cdot\left(U_{ab}\bar{m}_c+\bar{U}_{ab}m_c\right), \qquad (3.d)$$

este espíntensor para relatividad especial es muy simple comparado con los resultados de [20, 21].

B. Campo de Liénard–Wiechert

En [5] se estudió el campo electromagnético producido por una carga puntual moviéndose arbitrariamente en el espacio de Minkowski, el correspondiente tensor de Maxwell tiene una parte $\underset{B}{T}_{ac}$ que llamamos acotada porque es la porción dominante cerca de la carga:

$$\underset{B}{T}_{bc}=q^2r^{-4}\left[r\left(n_bU_c+n_cU_b\right)+r^2\left(a^2-Q^2\right)n_bn_c+\frac{1}{2}g_{bc}\right],$$

q = carga, $\qquad U_b=Qe_{(4)b}+a_b,\ Q=r^{-1}(1-T),$

$$T=-rn^ca_c, \qquad (4.a)$$

a_c= aceleración de la partícula, además, puede checarse que (4.a) satisface

$$\underset{B}{T}_{ac}=\underset{B}{T}_{ca},\quad \underset{B}{T}{}^c{}_c=0,\underset{B}{T}{}_a{}^c{}_{;c}=0. \qquad (4.b)$$

Las propiedades (4.b) se cumplen si construimos $\underset{B}{K}_{abc}$ con las simetrías (1.b, c, d) tal que

$$\underset{B}{T}_{ab}=\underset{B}{K}{}_a{}^c{}_{b;c}\equiv\underset{B}{K}_{ab} \qquad (4.c)$$

entonces $\underset{B}{K}_{(a)(b)}$ = 0 excepto

$$\underset{B}{K}_{(1)(2)}=\frac{q^2}{2}r^{-4},\qquad \underset{B}{K}_{(1)(3)}=-q^2r^{-3}\bar{\nu}, \qquad (4.d)$$

aquí nos apoyamos en la congruencia nula:

$$\kappa=\sigma=\tau=\lambda=\varepsilon=\pi=0, \qquad \mu=\frac{\rho}{2}=-\frac{1}{2r},$$

$$\alpha=\beta=\frac{i}{2\sqrt{2r}}\cdot ctg\theta,$$

$$\nu=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[-Sen\phi a_{(1)}+Cos\phi a_{(2)}+i\begin{pmatrix}-Cos\theta Cos\phi a_{(1)}\\ -Cos\theta Sen\phi a_{(2)}+Sen\theta a_{(3)}\end{pmatrix}\right], \quad (4.e)$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\left[a^c p_c-ictg\theta\left(Cos\phi a_{(2)}-Sen\phi a_{(1)}\right)\right], \quad D=\frac{\partial}{\partial r}$$

$$\delta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{Sen\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right),$$

$$\Delta=\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\bar{\nu}-\nu\right)\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\bar{\nu}+\nu}{\sqrt{2}Sen\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}-\left[\frac{1}{2}+r\left(\gamma+\bar{\gamma}\right)\right]\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial u},$$

al colocar (4.d, e) en (2.e, h) se genera un sistema de ecuaciones (que no es necesario indicar) el cual admite la solución:

$$\underset{B}{\Omega}_a=0,\ a\neq 6,7,\ \underset{B}{\Omega}_6=-\frac{q^2}{4}r^{-3},\ \underset{B}{\Omega}=q^2r^{-2}\nu, \qquad (4.f)$$

que al sustituir en (2.c) nos conduce al superpotencial de Weert [3, 22] (este autor nunca mencionó cómo obtuvo su resultado):

$$\underset{B}{K}_{sbc}=-\frac{q^2}{4}r^{-3}\begin{bmatrix}\left(3-4T\right)\left(e_{(4)s}n_b-e_{(4)b}n_s\right)n_c\\ +4r\left(a_sn_b-a_bn_s\right)n_c+\left(g_{cs}n_b-g_{cb}n_s\right)\end{bmatrix}.(4g)$$

Si ahora seguimos la analogía con el trabajo de Lanczos [1] entonces podemos construir un "tensor de Weyl-electromagnético" [23, 24] mediante (1.a, 4.c):

$$\underset{B}{C}_{jrim}=\underset{B}{K}_{jri;m}-\underset{B}{K}_{jrm;i}+\underset{B}{K}_{imj;r}-\underset{B}{K}_{imr;j}+g_{jm}\underset{B}{T}_{ir}-g_{ij}\underset{B}{T}_{mr}+g_{ri}\underset{B}{T}_{mj}-g_{rm}\underset{B}{T}_{ij},(4.h)$$

que al proyectar sobre la tétrada nula origina (2.f) y que en unión de (4.e, f) implica:

$$\underset{B}{\psi}_c=0, \qquad c=0,1,4, \qquad \underset{B}{\psi}_2=q^2r^{-4},$$

$$\underset{B}{\psi}_3=-q^2r^{-3}\nu=-q^2r^{-3}a_C\bar{m}^c. \qquad (4.i)$$

con estas cantidades $\underset{B}{\psi}_c$ podemos realizar la clasificación de Petrov (CP) [4] del potencial de Liénard-Wiechert, obteniéndose que:

"Caso general $\left(a_c\neq 0\right)$: $\underset{B}{C}_{ijrm}$ es tipo II, (4.j)

Caso particular $\left(a_c=0\right)$: $\underset{B}{C}_{ijrm}$ es tipo D"

De (4.j) vemos que la aceleración de la carga decide si (4.h) es tipo II o D. Este resultado complementa las analogías encontradas por Newman [25] entre el campo de Liénard-Wiechert y las métricas de Robinson-Trautman [18].

En [26] se indica cómo construir los vectores de Debever-Penrose de un tensor con las simetrías algebraicas del tensor de Weyl, así encontramos que las direcciones principales de $\underset{B}{C}_{ijrm}$ son:

n^c(doble), λ^c(simple).

y $\ell^c+\frac{4}{9}r^2\nu\bar{\nu}n^c+\frac{2}{3}r\left(\nu m^c+\bar{\nu}\bar{m}^c\right)$ (simple) (4.k)

cuando a_j=0 entonces λ^rse vuelve 2-degenerado. Dejamos pendiente el investigar qué papel desempeña el tercer vector de (4.k) respecto al potencial de Liénard-Wiechert.

IV. CONCLUSIONES

Los resultados tensoriales de Lanczos [1] se han expresado en el formalismo de NP lo cual ha permitido deducir de manera simple los espíntensores de Minkowski y de Weert. También se estableció la clasificación Petrov del campo de Liénard-Wiechert.

Queda pendiente la obtención del superpotencial mostrado en [27], el cual genera a la parte radiativa del tensor de Maxwell producido por una carga puntual con movimiento arbitrario.

Debe ser interesante desarrollar una clasificación algebraica de K^{pqc} y encadenar ésta con la CP de C_{ijkr}, véase [28].

REFERENCIAS

[1] Lanczos, C., *The splitting of the Riemann tensor*, Rev. Mod. Phys. **34** 379 (1962).

[2] Newman, E. and Penrose, R., *An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients*, J. Math. Phys. **3** 566 (1962).

[3] van Weert, Ch. G., *Direct method for calculating the bound four-momentum of a classical charge*, Phys. Rev. **D9** 339 (1974).

[4] Carvajal-Gámez, B. E., López-Bonilla, J. and Robles-García, J., *Clasificación Petrov del tensor de Weyl*, Bol. Soc. Cub. Mat. Comp. **7**, 59 (2009).

[5] García, R., Linares, O. R., López-Bonilla, J. and Rangel, A., *Liénard-Wiechert electromagnetic field*, EJTP **5**, 1 (2008).

[6] Ares de Parga, G., Chavoya, O. and López-Bonilla, J., *Lanczos potential*, J. Math. Phys. **30**, 1294 (1989).

[7] Bampi, F., and Caviglia, G., *Third-order tensor potentials for the Riemann and Weyl tensors*, Gen. Rel. Grav. **15**, 375 (1983).

[8] Guerrero, I., López-Bonilla, J. and Rangel, A., *Lanczos spintensor for several spacetimes*, The Icfai Univ. J. Phys. **2**, 7 (2009).

[9] Kasner, E., *Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations*, Amer. J. Math. **43**, 217 (1921).

[10] Narlikar, V. V. and Karmarkar, K. R., *The scalar invariants of a general gravitational metric*, Proc. Indian Acad. Sci. **A29**, 91 (1949).

[11] Gödel, K., *An example of a new type of cosmological solution of Einstein's field equation of gravitation*, Rev. Mod. Phys. **21**, 447 (1949).

[12] Taub, A. H., *Empty space-times admitting a three parameter group of motions*, Ann. of Math. **53**, 472 (1951).

[13] Bertotti, B., *Uniform electromagnetic field in the theory of general relativity*, Phys. Rev. **116**, 1331(1959).

[14] Taub, A. H., The Riemann-Christoffel tensor and tetrad and self-dual formalisms, in *Perspectives in geometry and relativity*, Ed. B. Hoffman, (Indiana University Press, Bloomington, 1966), p. 360.

[15] Taub, A. H., *Lanczos splitting of the Riemann tensor*, Comp. Maths. Appls. **1**, 377 (1975).

[16] Maher, W. F. and Zund, J. D., *A spinor approach to the Lanczos spintensor*, Nuovo Cim. **A57**, 638 (1968).

[17] Zund, J. D., *The theory of the Lanczos spinor*, Ann. Mat. Pura Appl. **104**, 239 (1975).

[18] Robinson, I. and Trautman, A., *Some spherical gravitational waves in general relativity*, Proc. Roy. Soc. London **A265**, 463 (1962).

[19] López-Bonilla, J. and Rivera, J., *Robinson-Trautman spacetimes and Lanczos spintensor*, Indian J. Math. **40**, 159 (1998).

[20] Takeno, H., *On the spintensor of Lanczos*, Tensor N. S. **15**, 103 (1964).

[21] López-Bonilla, J., Morales, Ovando, G. and Peña, J. J., *Lanczos potential for the Minkowski space*, Indian J. Phys. **B74**, 393 (2000).

[22] López-Bonilla, J., Ovando, G. and Rivera, J., *On the physical meaning of the Weert potential*, Nuovo Cim. **B112**, 1433(1997).

[23] Aquino, N., López-Bonilla, J., Núñez, H. and Salas, A., *Conformal tensor and Petrov classification for the bounded part of the Liénard-Wiechert field*, J. Phys. A: Math. Gen. **28**, L375 (1995).

[24] Acevedo, M., López-Bonilla, J. and Sánchez, M., *Algebraic classification of Liénard-Wiechert field*, Galilean Electrodynamics **18**, 78 (2007).

[25] Newman, E., *Liénard-Wiechert field and general relativity*, J. Math. Phys. **15** 44 (1974).

[26] García, R., Hamdan, N. and López-Bonilla, J., *Debever-Penrose principal directions in terms of null canonical vectors*, EJTP **4**, 101 (2007).

[27] López-Bonilla, J. and Ovando, G., *A potential for the radiative part of the Liénard-Wiechert field*, Gen. Rel. Grav. **31**, 1931 (1999).

[28] Gaftoi, V., López-Bonilla, J. and Ovando, G., Singular value decomposition and Lanczos potential, in *Current topics in quantum field theory research*, Ed. O. Kovras, (Nova Sci. Pub., NY, 2007), Chap.10, p. 513-516.