

# Lógicas epistémica y doxástica con restricciones

Lógica epistêmica e doxástica com restrições

Epistemic and doxastic logic with restrictions

Manuel Sierra–A.<sup>1</sup>

*Recepción: 12-may-2010/Modificación: 06-nov-2010/Aceptación: 06-nov-2010*

*Se aceptan comentarios y/o discusiones al artículo*

---

## Resumen

Se presentan como extensiones del cálculo proposicional clásico las jerarquías de sistemas deductivos  $LER-n$  y  $LDR-n$ , con  $n \geq 1$ .  $LER-n$  es la *lógica epistémica con restricciones de profundidad-n*,  $LDR-n$  es la *lógica doxástica con restricciones de profundidad-n*. Los sistemas  $LER-1$  y  $LDR-1$  son el cálculo proposicional clásico. El sistema  $LER-(n+1)$  puede ser visto como el resultado de aplicar la regla: de  $X$  se infiere  $+X$ , una vez a los teoremas del sistema  $LER-n$ , además, se restringe la validez de los axiomas  $+(X \rightarrow Y) \rightarrow (+X \rightarrow +Y)$  y  $+X \rightarrow X$  en términos de la profundidad (complejidad respecto al operador  $+$ ) de  $X$  y de  $Y$ , y también se incluyen versiones generalizadas y con restricciones de los axiomas de introspección positiva y negativa. El sistema  $LER$  resulta de la reunión de los sistemas de la jerarquía, y puede ser visto como el sistema de *lógica modal S5* con diversos tipos de restricciones. Cambiando  $+X \rightarrow X$  por  $+X \rightarrow \sim + \sim X$  se construye la jerarquía  $LDR-n$  y el sistema  $LDR$ ; este último puede ser visto como el sistema de *lógica modal KD45* con diversos tipos de restricciones. Los sistemas son caracterizados con semánticas de mundos posibles encajados, con las cuales se le imponen, al problema de la omnisciencia lógica, ciertos límites.

**Palabras claves:** lógica modal, mundos posibles encajados, lógica doxástica, lógica epistémica, omnisciencia lógica.

---

<sup>1</sup> Magíster en Ciencias, msierra@eafit.edu.co, profesor, Universidad EAFIT, Medellín–Colombia.

## Resumo

São apresentadas como extensões do cálculo proposicional clássico as hierarquias dos sistemas dedutivos  $LDR-n$  e  $LER-n$ , com  $n \geq 1$ .  $LER-n$  é a lógica epistêmica com restrições,  $LDR-n$  é a lógica doxástica com restrições. Sistemas de  $LER-1$  e  $LDR-1$  são o cálculo proposicional clássico. A  $LER-(n+1)$  sistema pode ser visto como o resultado da aplicação da regra: se  $X$  é um teorema de  $LER-n$ , então  $+X$  é um teorema da  $LER-(n+1)$ . Também restringe a validade dos axiomas  $+(X \rightarrow Y) \rightarrow (+X \rightarrow +Y)$  e  $+X \rightarrow X$ , em termos de profundidade de  $X$  e  $Y$ , e também inclui limitada versões dos axiomas da introspecção positiva e negativa. O sistema  $LER$  é a união do sistemas da hierarquia, e pode ser visto como o sistema de lógica modal S5 com diferentes tipos de restrições. Alterar  $+X \rightarrow X$  por  $+X \rightarrow \sim + \sim X$  construímos a hierarquia  $LDR-n$  e do sistema  $LDR$ ; este último pode ser visto como o sistema de lógica modal KD45 com diferentes tipos de restrições. Os sistemas são caracterizados com a semântica de mundos possíveis aninhadas, com o qual são impostas, o problema da onisciência lógica, de certos limites.

**Palavras chaves:** lógica modal, mundos possíveis aninhadas, lógica doxástica, lógica epistêmica, onisciência lógica.

## Abstract

Are presented as extensions of classical propositional calculus hierarchies of deductive systems  $LDR-n$  and  $LER-n$  with  $n \geq 1$ .  $LER-n$  is the epistemic logic with restrictions,  $LDR-n$  is the doxastic logic with restrictions. The systems  $LER-1$  and  $LDR-1$  are the classical propositional calculus. System  $LER-(n+1)$  can be seen as the result of applying the rule: if  $X$  is theorem of  $LER-n$  then  $+X$  is theorem of  $LER-(n+1)$ . Systems also restricts the validity of the axioms  $+(X \rightarrow Y) \rightarrow (+X \rightarrow +Y)$  and  $+X \rightarrow X$ , in terms of depth (complexity with respect to the operator  $+$ ) of  $X$  and  $Y$ , and also includes restricted versions of the axioms of positive and negative introspection.  $LER$  system results from the union of  $LER-n$  systems, and can be seen as the S5 modal logic system with different types of restrictions. Changing  $+X \rightarrow X$  by  $+X \rightarrow \sim + \sim X$  are built  $LDR-n$  and the  $LDR$  systems.  $LDR$  can be seen as the KD45 modal logic system with different types of restrictions. The systems are characterized with a embedded worlds semantics, with which the ‘omniscience logical problem’ is limited.

**Key words:** multi-modal logic, possible worlds embedded, epistemic logic, doxastic logic, logical omniscience.

---

## 1 Presentación

Los sistemas deductivos, construidos como extensiones del sistema multi-modal  $K_m$  utilizando operadores de creencia y conocimiento, los cuales fue-

ron introducidos por Hintikka en *Knowledge and Belief* [1], son conocidos como *lógicas doxásticas* y *lógicas epistémicas*, y son de interés en inteligencia artificial en lo que respecta al modelamiento del razonamiento de agentes inteligentes. Desde el punto de vista semántico, las creencias y el conocimiento de los agentes se caracterizan siguiendo las técnicas desarrolladas por Kripke en *Semantical analysis of modal logic* [2], con base en un conjunto de *mundos posibles* y *relaciones de accesibilidad* entre ellos, donde la fórmula  $+X$  será cierta en un mundo posible específico, si  $X$  es cierta en cada mundo posible, accesible por el agente asociado al operador  $+$ , desde el mundo posible específico.

Como señala Hintikka en *Impossible possible worlds vindicated* [3], cualquier semántica para estos sistemas deductivos debe justificar como teorema:  $+(X \rightarrow Y) \rightarrow (+X \rightarrow +Y)$  y como regla de inferencia: de  $X$  se sigue  $+X$  (regla de certeza), ya que estas propiedades se encuentran presentes en todas las lógicas modales normales (extensiones de  $K_m$ ). Estas dos propiedades resultan ser las características más problemáticas de las lógicas modales normales cuando se utilizan como lógicas del conocimiento y la creencia, ya que obligan a concebir al razonador como una entidad capaz de conocer todas las consecuencias lógicas de su conocimiento, lo cual la hace inadecuada para modelar razonadores tales como seres humanos o sistemas computacionales, los cuales tienen limitaciones de espacio y tiempo. Lo anterior determina el llamado problema de la *omnisciencia lógica*, el cual tiene como consecuencia la modificación de la semántica de mundos posibles, si se quiere representar adecuadamente el conocimiento y las creencias de razonadores reales.

Sim, en *Epistemic logic and logical omniscience: a survey* [4], muestra cómo, a fin de enfrentar el problema de la *omnisciencia lógica*, se han construido formalismos alternativos para representar la creencia y el conocimiento. Siguiendo con el modelo de creencia de los mundos posibles, Cresswell en *Logic and languages* [5] trabaja con mundos no-clásicos, en los cuales se admiten las inconsistencias, Hintikka en *Impossible possible worlds vindicated* [3] los llama mundos imposibles, Rescher en *The logic of inconsistency* [6] los llama mundos no-estándar. Esta aproximación fue seguida por Levesque en *A logic of implicit and explicit belief* [7], donde un razonador tiene un conjunto relativamente pequeño de creencias explícitas y un conjunto infinito de creencias implícitas, este último incluye las consecuencias lógicas de las creencias explícitas; al operador de creencia implícita se le asocian los mundos estándar

y al de creencia explícita los no estándar, resultando una estrecha conexión con la lógica relevante de Anderson y Belnap presentada en *Entailment: the logic of relevance and necessity* [8]. Lakemeyer en *Tractable meta-reasoning in propositional logics of believes* [9], diferencia entre creencias objetivas y subjetivas. Fagin y Halpern en *Belief, awareness and limited reasoning* [10], extienden la lógica de Levesque al razonamiento de múltiples razonadores. La descripción formal del razonamiento parcial hecha por Levesque, es continuada por Schaerf y Cadoli en *Tractable reasoning via approximation* [11], y a partir de este trabajo, Finger y Wassermann en *Logics for approximate reasoning: Approximating classical logic "from above"* [12], construyen una familia de lógicas, las cuales son aproximaciones a la lógica clásica. Con base en lo anterior, Rabelloa y Finger, en *Approximations of Modal Logics: K and beyond* [13], presentan un método para construir aproximaciones a sistemas de lógicas modales, donde el grado de introspección de los razonadores se encuentra limitado por la aproximación a la lógica clásica que se utilice en la construcción. Por otro lado, Konolige en *A Deduction Model of belief* [14], presenta una alternativa al modelo de creencia de los mundos posibles al representar el razonamiento del agente mediante *estructuras de deducción*, las cuales constan de un conjunto de fórmulas y un conjunto limitado de reglas de inferencia; en este sistema un razonador cree una fórmula si ésta es una consecuencia del conjunto de fórmulas de la estructura utilizando únicamente reglas de inferencia de la estructura. Gabbay y Woods en *Handbook of the History of Logic Vol 7* [15], presentan un panorama muy completo sobre el estado del arte respecto al problema de la omnisciencia en la lógica epistémica.

Sierra, en *Sistemas multi-modales de profundidad restringida* [16], presenta como extensión del cálculo proposicional clásico, la jerarquía de sistemas deductivos  $SMM-n$ , con  $n \geq 1$ .  $SMM-n$  es el *sistema multi-modal de profundidad-n*. El sistema  $SMM-1$  es el cálculo proposicional clásico. El sistema  $SMM-(n+1)$  puede ser visto como el resultado de aplicar la regla de certeza, asociada a los razonadores con suficiente capacidad deductiva, sólo una vez a los teoremas del sistema  $SMM-n$ . El lenguaje del sistema  $SMM-(n+1)$  es una extensión propia del lenguaje de  $SMM-n$ , donde la jerarquía de los lenguajes se encuentra asociada a una jerarquía en la capacidad deductiva de los razonadores. El sistema  $SMM$ , *sistema multi-modal con restricciones*, resulta de la reunión de los sistemas de la jerarquía, y puede ser visto como el sistema de *lógica multi-modal*  $K_m$  con restricciones en el lenguaje y

en las reglas de certeza, es decir, con razonadores de diferente capacidad de razonamiento.

Continuando parcialmente, con las pautas establecidas en *Sistemas multi-modales de profundidad restringida* [16], se presentan en este trabajo las jerarquías de sistemas deductivos  $LER-n$  y  $LDR-n$ , con  $n \geq 1$ .  $LER-n$  es la *lógica epistémica con restricciones de profundidad-n*. En los sistemas  $LER-n$  donde  $n \geq 2$  se restringe la validez del axioma  $(X \rightarrow Y) \rightarrow (+X \rightarrow +Y)$ , así como la aplicación de la regla de certeza, y, por lo tanto, la capacidad deductiva del razonador asociado al operador de certeza  $+$  en términos de la profundidad (complejidad respecto al operador  $+$ ) de  $X$  y de  $Y$ . En  $LER-n$ , con  $n \geq 2$ , también se tienen versiones generalizadas y con restricciones del axioma de conocimiento:  $+X \rightarrow X$ , del axioma de introspección positiva:  $+_1X \rightarrow +_2+_1X$ , y del axioma de introspección negativa:  $\sim+_1X \rightarrow +_2\sim+_1X$ . Los sistemas  $LER-n$  son caracterizados con una semántica al estilo Kripke con diversos tipos de restricciones (semántica de mundos posibles encajados). Por ejemplo, la profundidad de un modelo establece la longitud máxima de las cadenas de mundos posibles que figuren en el modelo, resultando que los modelos de profundidad- $n$  se encuentran asociados al sistema deductivo  $LER-n$ . El sistema  $LER$  resulta de la reunión de los sistemas de la jerarquía, y puede ser visto como una extensión con diversos tipos de restricciones del sistema de *lógica modal S5*. Las pruebas de validez y completitud de los sistemas de la jerarquía son presentadas de forma detallada, así como las pruebas para la caracterización semántica del sistema  $LER$ . Cambiando  $+X \rightarrow X$  por  $+X \rightarrow \sim+_1X$  se construye la jerarquía  $LDR-n$  y el sistema  $LDR$ .  $LDR-n$  es la *lógica doxástica con restricciones de profundidad-n*, y  $LDR$  puede ser visto como el sistema de *lógica modal KD45* con diversos tipos de restricciones.

En los sistemas presentados, gracias a las restricciones en el lenguaje (al limitar la aplicabilidad de las reglas de certeza), y a las restricciones en el tipo de los razonadores (al limitar las consecuencias del conocimiento de algunos razonadores), se le imponen al problema de la omnisciencia lógica ciertos límites. Por ejemplo, en el sistema  $LER-4$ , un razonador de tipo-2 no siempre puede hacer inferencias cuando se involucran fórmulas de tipo-3, mientras que un razonador de tipo-3 o superior sí puede hacerlas, sin embargo, ningún razonador puede hacer inferencias sobre fórmulas de tipo-4.

## 2 Sistemas deductivos

El lenguaje de todos los sistemas de las jerarquías  $LER-n$  y  $LDR-n$ , con  $n \geq 1$ , consta de los conectivos binarios  $\rightarrow, \vee, \wedge, \leftrightarrow$ ; el conectivo unario  $\sim$ ; y un conjunto numerable de conectivos unarios u operadores de certeza<sup>1</sup>  $+_A, +_B, \dots$ , donde a cada uno de ellos se le asocia un tipo. Cada operador  $+_R$  de tipo- $r$  se encuentra asociado a un razonador  $R$ , y se dice que  $R$  es de tipo- $r$ .

El conjunto de fórmulas del cálculo proposicional clásico  $CP$  o *fórmulas de tipo-1* es generado recursivamente a partir de un conjunto de fórmulas atómicas utilizando los conectivos de la forma:

1. Si  $P$  es una fórmula atómica entonces  $P$  es una fórmula de tipo-1.
2. Si  $X$  es una fórmula de tipo-1 entonces  $\sim(X)$  es una fórmula de tipo-1.
3. Si  $X$  y  $Y$  son fórmulas de tipo-1 entonces  $(X) \rightarrow (Y), (X) \leftrightarrow (Y), (X) \wedge (Y)$  y  $(X) \vee (Y)$  son fórmulas de tipo-1.

En general, para  $n \geq 1$ : si  $X$  es una fórmula de tipo- $n$  y  $+$  es un operador de certeza, entonces  $+X$  es una fórmula de tipo- $(n+1)$ .

Si  $X$  es una fórmula de tipo- $k$ ,  $Y$  es una fórmula de tipo- $q$  y  $n = \max\{k, q\}$  entonces  $(X) \rightarrow (Y), (X) \leftrightarrow (Y), (X) \wedge (Y)$  y  $(X) \vee (Y)$  son fórmulas de tipo- $n$ .

Si  $X$  es una fórmula de tipo- $n$  entonces  $\sim(X)$  es una fórmula de tipo- $n$ .

**Definición 2.1** (Operadores de conocimiento). Si  $+$  es el operador de certeza asociado al razonador  $R$ , entonces  $+X$  denota que la fórmula  $X$  es una *certeza* para el razonador  $R$ . La fórmula  $X$  es *imposible* para el razonador  $R$ , denotado  $\neg X$ , si su negación es una certeza para el razonador  $R$ , es decir,  $\neg X \leftrightarrow +\sim X$ . La fórmula  $X$  es *refutable* para el razonador  $R$ , denotado  $-X$ , si no es una certeza para el razonador  $R$ , es decir,  $-X \leftrightarrow \sim +X$ . La fórmula  $X$  es *posible* para el razonador  $R$ , denotado  $\bullet X$ , si no es imposible para el razonador  $R$ ,

<sup>1</sup>En los sistemas  $LER-n$ ,  $+$  es un operador de certeza en el sentido de **saber**, mientras que en  $LDR-n$ ,  $+$  es un operador de certeza en el sentido de **creer**, donde saber es creencia cierta.

es decir,  $\bullet X \leftrightarrow \sim \neg X$ . Los operadores  $+$ ,  $\neg$ ,  $-$  y  $\bullet$  son llamados *operadores de conocimiento* para el razonador  $R^2$ .

Como consecuencia de la definición de los operadores de conocimiento, en la tabla 1 se tienen algunas caracterizaciones de los mismos.

**Tabla 1:** caracterizaciones de los operadores de conocimiento

$+X$		$\neg \sim X$	$\sim \bullet \sim X$	$\sim -X$
$\neg X$	$+\sim X$		$\sim \bullet X$	$\sim -\sim X$
$\bullet X$	$\sim +\sim X$	$\sim \neg X$		$-\sim X$
$-X$	$\sim +X$	$\sim \neg \sim X$	$\bullet \sim X$	

Todas las fórmulas de una misma fila son equivalentes

La unión de los conjuntos de fórmulas de tipo-1, tipo-2, ..., tipo- $n$  determinan el conjunto de *fórmulas de profundidad- $n$* , el cual es el *lenguaje de los sistemas LER- $n$  y LDR- $n$* .

Los sistemas LER- $n$ , *lógica epistémica con restricciones de profundidad- $n$* , se construyen de la forma:

- LER-1 es el *cálculo proposicional clásico CP*.
- Para  $n \geq 1$ , el sistema LER- $(n+1)$  se construye a partir del sistema LER- $n$  de la siguiente forma:
  - $A \times CP$ : los axiomas de *CP* sobre las fórmulas de profundidad- $(n+1)$  son axiomas de LER- $(n+1)$ .
  - $MP+<$ :  $+(A \rightarrow B) \rightarrow (+A \rightarrow +B)$  es un axioma de LER- $(n+1)$ , donde  $A$  es de tipo- $a$ ,  $B$  es de tipo- $b$  y  $1 \leq a < b \leq n$ .
  - $MP+=$ :  $+(A \rightarrow B) \rightarrow (+A \rightarrow +B)$  es un axioma de LER- $(n+1)$ , donde  $A$  es de tipo- $a$ ,  $B$  es de tipo- $b$  y  $1 \leq a = b \leq n$ .
  - $A \times R$ :  $A \rightarrow \bullet A$  es un axioma de LER- $(n+1)$ , donde  $A$  es de tipo- $a$ ,  $\bullet$  es de tipo- $r$ ,  $1 \leq a \leq n$  y  $a \leq r$ .
  - $A \times T$ :  $-\neg \neg X \rightarrow \bullet X$  es un axioma de LER- $(n+1)$ , donde  $+X$  es una fórmula de profundidad- $n$ .

---

<sup>2</sup>En lo que sigue se entiende que  $+$ ,  $\bullet$ ,  $-$  y  $\neg$  son los operadores de conocimiento de tipo- $r$  asociados al razonador  $R$  de tipo- $r$ .

- $A \times E$ :  $\neg_1 X \rightarrow \neg_2 +_1 X$  es un axioma de  $LER-(n+1)$ , donde  $+_1 X$  es una fórmula de profundidad  $-n$ .
- $A \times A \times$ :  $X$  es un axioma de  $LER-(n+1)$ , donde  $X$  es un axioma de  $LER-n$ .
- $A \times +$ :  $+X$  es un axioma de  $LER-(n+1)$ , donde  $X$  es un teorema de  $LER-n$ .

Los sistemas  $LDR-n$ , *lógica doxástica con restricciones de profundidad  $-n$* , se construyen de manera similar, cambiando  $A \times R$  por:

- $A \times S$ :  $+A \rightarrow \bullet A$  es un axioma de  $LDR-(n+1)$ , donde  $A$  es de tipo  $-a$ ,  $\bullet$  es de tipo  $-r$ ,  $1 \leq a \leq n$  y  $a \leq r$ .
- $MP$ : los sistemas  $LER-(n+1)$  y  $LDR-(n+1)$  tienen como única regla de inferencia el *modus ponens* de tipo  $-(n+1)$ , es decir, de  $X$  y  $X \rightarrow Y$  se infiere  $Y$ , donde  $X$  y  $Y$  son fórmulas de profundidad  $-(n+1)$ .

El lenguaje de  $LER$  es la unión de los lenguajes de los sistemas  $LER-n$ , con  $n \geq 1$ , por lo que en  $LER$  hay fórmulas de profundidad arbitraria. El sistema  $LER$ , *lógica epistémica con restricciones*, tiene como única regla de inferencia primitiva el *modus ponens* y es axiomatizado de la forma

$X$  es un axioma de  $LER$  si y sólo si  $X$  es axioma de  $LER-n$  para algún  $n \geq 1$ .

De manera análoga se construye el sistema  $LDR$ , *lógica doxástica con restricciones*.

Para cada uno de los sistemas presentados más arriba, se dice que una fórmula  $X$  es un *teorema del sistema* si y solamente si  $X$  es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas del sistema, tales que cada una de ellas es un axioma del sistema o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia  $MP$ . Si  $\Gamma$  es un conjunto de fórmulas del sistema, se dice que una fórmula  $X$  es un *teorema del sistema a partir de  $\Gamma$* , si y solamente si  $X$  es la última fórmula de una sucesión finita de fórmulas del sistema, tales que cada una de ellas es un axioma del sistema o un elemento de  $\Gamma$  o se infiere de dos fórmulas anteriores utilizando la regla de inferencia  $MP$ .

En lo que sigue se utilizarán diversos resultados de  $CP$ , se hará referencia a estos resultados simplemente como  $LCP$  o leyes lógicas de  $CP$  (para



detalles de las pruebas en  $CP$  ver [17]). Con la notación  $LR-n$  (ó  $LR$ ) se estará haciendo referencia, tanto al sistema  $LER-n$  (ó  $LER$ ), como al sistema  $LDR-n$  (ó  $LDR$ ).

**Proposición 2.1** (Conjunción de certezas).

1. Para  $n \geq 1$ ,  $X$  y  $Y$  fórmulas de tipo- $t$ , con  $t \leq n$ .  $+(X \wedge Y) \rightarrow (+X \wedge +Y)$  es un teorema de  $LR-(n+1)$  y de  $LR$ .
2. Para  $n \geq 1$ ,  $X$  y  $Y$  fórmulas de profundidad- $t$ , con  $t \leq n$ .  $+(X \wedge +Y) \rightarrow +(X \wedge Y)$  es un teorema de  $LR-(n+1)$  y de  $LR$ .
3. Para  $n \geq 1$ ,  $X$  y  $Y$  fórmulas de tipo- $t$ , con  $t \leq n$ .  $+(X \wedge Y) \leftrightarrow (+X \wedge +Y)$  es un teorema de  $LR-(n+1)$  y de  $LR$ .

**Prueba.** Para la parte 1, en  $LR-n$  se tienen  $(X \wedge Y) \rightarrow X$  y  $(X \wedge Y) \rightarrow Y$ , y por  $A \times +$  se afirma que  $+(X \wedge Y) \rightarrow X$  y  $+(X \wedge Y) \rightarrow Y$  son axiomas de  $LR-(n+1)$ , con  $n \geq 1$ . Utilizando el axioma  $MP+=$  y  $MP$  se infieren  $+(X \wedge Y) \rightarrow +X$  y  $+(X \wedge Y) \rightarrow +Y$ . Utilizando  $LCP$  se infiere  $+(X \wedge Y) \rightarrow (+X \wedge +Y)$ .

Para la parte 2, por  $LCP$  se tiene en  $LR-n$ , con  $n \geq 1$ ,  $X \rightarrow (Y \rightarrow (X \wedge Y))$ . Como esta fórmula es de profundidad- $t$ , con  $t \leq n$ , por  $A \times +$  se infiere en  $LR-(n+1)$ ,  $+(X \rightarrow (Y \rightarrow (X \wedge Y)))$ , y el tipo del antecedente es menor o igual que el del consecuente, utilizando uno de los axiomas  $MP+=$  ó  $MP+<$  y  $MP$  resulta  $+X \rightarrow +(Y \rightarrow (X \wedge Y))$ , como, además, por  $MP+=$  ó  $MP+<$ , se tiene  $+(Y \rightarrow (X \wedge Y)) \rightarrow (+Y \rightarrow +(X \wedge Y))$ , entonces por  $LCP$  se obtiene  $+X \rightarrow (+Y \rightarrow +(X \wedge Y))$ . Utilizando  $LCP$  se infiere  $(+X \wedge +Y) \rightarrow +(X \wedge Y)$ .

La parte 3 es consecuencia de las dos anteriores.  $\square$

**Proposición 2.2** (Sustitución por equivalencia).

1. Sean  $X$  y  $Y$  fórmulas de tipo- $t$ , con  $t \leq n$ . Si  $X \leftrightarrow Y$  es un teorema de  $LR-n$  entonces  $+X \leftrightarrow +Y$  es un teorema de  $LR-(n+1)$  y de  $LR$ .
2. Si  $F(Z)$  es una fórmula de profundidad- $n$  en la cual figura la fórmula  $Z$  de tipo- $t$ , con  $1 \leq t \leq n$ , y  $F(W)$  es el resultado de cambiar en  $F(Z)$  alguna ocurrencia de  $Z$  por  $W$ , donde  $W$  es una fórmula de tipo- $t$ , entonces, en  $LR-n$  y en  $LR$ , de  $Z \leftrightarrow W$  se infiere  $F(Z) \leftrightarrow F(W)$ .

**Prueba.** Para la parte 1, supóngase que en  $LR-n$ ,  $X \leftrightarrow Y$ , por  $LCP$  resulta  $(X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$ , la cual es de tipo- $t$ , y por  $A \times +$  se infiere en  $LR-(n+1)$ ,  $+((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X))$ , al ser  $X$  y  $Y$  de tipo- $t$ , por la proposición 2.1, numeral 1, se obtiene  $+(X \rightarrow Y) \wedge +(Y \rightarrow X)$ , utilizando  $LCP$  y el axioma  $MP+=$  se genera  $(+X \rightarrow +Y) \wedge (+Y \rightarrow +X)$ , finalmente, utilizando  $LCP$  se concluye  $+X \leftrightarrow +Y$  en  $LR-(n+1)$ , y como los axiomas de  $LR-(n+1)$  son axiomas de  $LR$ , entonces la prueba de  $+X \leftrightarrow +Y$  en  $LR-(n+1)$  también es una prueba de  $+X \leftrightarrow +Y$  en  $LR$  (utilizando las definiciones de los operadores de conocimiento, también se siguen  $\bullet X \leftrightarrow \bullet Y$ ,  $-X \leftrightarrow -Y$  y  $\neg X \leftrightarrow \neg Y$ ).

La parte 2 se sigue de la 1 teniendo en cuenta que la equivalencia se preserva con los demás conectivos, para detalles ver [17].  $\square$

### 3 Semántica

**Definición 3.1** ( $n$ -marco). La terna  $(S, M_a, RA)$  es un  $n$ -marco (marco de profundidad- $n$ ) si y solamente si  $M_a$  es un elemento del conjunto  $S$ ,  $RA$  es un conjunto de relaciones binarias sobre  $S$ , donde a cada operador de certeza  $+$  le corresponde una relación binaria  $R$ , la cual es de tipo- $r$  si y sólo si el operador  $+$  es de tipo- $r$ . Los elementos de  $RA$  son llamados *relaciones de accesibilidad*, los elementos de  $S$  son llamados *mundos posibles* y el mundo posible  $M_a$  es el *mundo actual*.

Cada mundo posible  $N_p$  tiene asociado el lenguaje de profundidad- $p$  del sistema  $LR-p$ , y se dice que  $N_p$  es de profundidad- $p$ . En un  $n$ -marco  $(S, M_a, RA)$ , la profundidad de los mundos satisface las siguientes restricciones, para las cuales se tiene que  $R$  es la relación de accesibilidad asociada al operador  $+$  de tipo- $r$ ,  $1 \leq q < a$ ,  $1 \leq p \leq a - 2$ , y, además,  $K, N, D, F$  (con subíndices) son mundos posibles:

1.  $RM_a$  (*Restricción del mundo actual*). Si  $M_a$  es el mundo actual entonces  $1 \leq a \leq n$ .
2.  $RE <$  (*Restricción de encaje interno*). Si  $D_{q+1}$  es un mundo posible entonces  $D_q$  es un mundo posible. Se dice que  $D_q$  está encajado en  $D_{q+1}$ .
3.  $RA$  (*Restricción de accesibilidad*). Las relaciones de accesibilidad son de la forma  $N_{q+1}RD_q$ .

4.  $RAE<$  (*Restricción de accesibilidad encajada interna*). Si  $N_{p+2}RD_{p+1}$ ,  $N_{p+1}$  existe y  $D_p$  existe entonces  $N_{p+1}RD_p$ .
5. (a)  $RR$  (*Restricción de reflexividad*). Para cada  $N_{q+1}$ , si  $R$  es de tipo- $r$  y  $1 \leq q \leq r$  entonces  $N_{q+1}RN_q$ .
6.  $RE$  (*Restricción de euclidianidad*). Si  $K_{p+2}R_2N_{p+1}$  y  $K_{p+1}R_1F_p$  entonces  $N_{p+1}R_1F_p$ .
7.  $RT$  (*Restricción de transitividad*). Si  $K_{p+2}R_2N_{p+1}$ ,  $N_{p+1}R_1F_p$  y  $K_{p+1}$  existe entonces  $K_{p+1}R_1F_p$ .

Las anteriores restricciones corresponden a los  $n$ -marcos de los sistemas  $LER-n$ . Para el caso de los  $n$ -marcos de los sistemas  $LDR-n$ , basta cambiar la restricción 5(a)  $RR$ , por la restricción

5. (b)  $RS$  (*Restricción de serialidad*). Para cada  $N_{q+1}$ , si  $R$  es de tipo- $r$  y  $1 \leq q \leq r$  entonces existe  $D_q$  tal que  $N_{q+1}RD_q$ .

Como consecuencia se tiene que ningún mundo accede al mundo actual, los mundos de profundidad-1 no acceden a ningún mundo, y ningún mundo posible accede a sí mismo. Observar que un marco de profundidad- $n$  también es un marco de profundidad- $(n + 1)$ .

**Definición 3.2** (Cadena). Dado un  $n$ -marco  $(S, M_a, RA)$ , donde  $M_a, N_{a-1}, \dots, E_{t+2}, D_{t+1}, G_t$  son mundos posibles *diferentes* en  $S$ , y  $M_a$  es el mundo actual, se dice que  $C = M_a N_{a-1} \dots E_{t+2} D_{t+1} G_t$  es una *cadena de profundidad-* $(a - t + 1)$  cuando se tienen  $M_a R_a N_{a-1}, \dots, E_{t+2} R_{t+2} D_{t+1}$  y  $D_{t+1} R_{t+1} G_t$ , donde  $R_a, \dots, R_{t+2}$  y  $R_{t+1}$  son elementos de  $RA$ .

Observar que una cadena tiene profundidad- $t$  significa que la cadena está formada por  $t$  mundos posibles diferentes. En un  $n$ -marco la profundidad de las cadenas no puede superar la profundidad del mundo actual, la cual es a lo sumo  $n$ .

**Definición 3.3** ( $n$ -modelo). Sea  $(S, M_a, RA)$  un  $n$ -marco y  $F_a$  el conjunto de las fórmulas de profundidad- $a$ ,  $(S, M_a, RA, V)$  es un  $n$ -modelo si y solamente si  $V$  es una relación funcional<sup>3</sup> (valuación) de  $S \times F_a$  en  $\{0, 1\}$  la cual satisface

<sup>3</sup>Sea  $T$  una fórmula de tipo- $t$  y  $N_p$  un mundo de profundidad- $p$ .  $V(N_p, T)$  no se encuentra definida cuando  $t > p$ , es decir,  $V(N_p, T)$  sólo se encuentra definida si la fórmula  $T$  es de profundidad- $p$ . Es en este sentido que cada mundo tiene asociado un lenguaje.

las siguientes reglas o condiciones: sean  $P$  una fórmula atómica,  $D_k$  un mundo posible,  $X$  y  $Y$  fórmulas de profundidad- $t$ , con  $1 \leq t \leq k \leq a \leq n$ :

$$Vat. \quad V(D_k, P) = 1 \text{ o } V(D_k, P) = 0.$$

$$V\sim. \quad V(D_k, \sim X) = 1 \Leftrightarrow V(D_k, X) = 0.$$

$$V\wedge. \quad V(D_k, X \wedge Y) = 1 \Leftrightarrow V(D_k, X) = 1 = V(D_k, Y).$$

$$V\vee. \quad V(D_k, X \vee Y) = 0 \Leftrightarrow V(D_k, X) = 0 = V(D_k, Y).$$

$$V\rightarrow. \quad V(D_k, X \rightarrow Y) = 0 \Leftrightarrow V(D_k, X) = 1 \text{ y } V(D_k, Y) = 0.$$

$$V\leftrightarrow. \quad V(D_k, X \leftrightarrow Y) = 1 \Leftrightarrow V(D_k, X) = V(D_k, Y).$$

$$V+. \quad V(D_{p+1}, +Z) = 1 \Leftrightarrow (\forall N_p \in S)(D_{p+1}RN_p \Rightarrow V(N_p, Z) = 1),$$

donde  $1 \leq p < a$ , y  $Z$  es una fórmula de tipo- $p$ .

$$VP. \quad \text{Si } X \text{ es una fórmula de tipo-}p, \text{ con } 1 \leq p \leq a, \text{ entonces para cada } t, \text{ con } p \leq t \leq a, \text{ si } D_t \text{ existe entonces } V(D_t, X) = V(D_p, X).$$

Finalmente, los *modelos (de profundidad arbitraria)* se definen de la misma forma que se definen los  $n$ -modelos, eliminando la restricción acerca de la profundidad del marco.

**Proposición 3.1** (Caracterización semántica de los operadores de conocimiento). *En un  $n$ -modelo  $(S, M_a, RA, V)$ , para  $1 \leq p < a$  y  $Z$  una fórmula de tipo- $p$ .*

$$V\neg. \quad V(M_{p+1}, \neg Z) = 1 \Leftrightarrow (\forall N_p \in S)(M_{p+1}RN_p \Rightarrow V(N_p, Z) = 0).$$

$$V\bullet. \quad V(M_{p+1}, \bullet Z) = 1 \Leftrightarrow (\exists N_p \in S)(M_{p+1}RN_p \text{ y } V(N_p, Z) = 1).$$

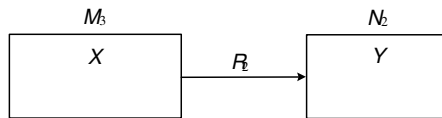
$$V-. \quad V(M_{p+1}, -Z) = 1 \Leftrightarrow (\exists N_p \in S)(M_{p+1}RN_p \text{ y } V(N_p, Z) = 0).$$

**Prueba.** Consecuencia inmediata de las definiciones de los operadores de conocimiento. □

## 4 Interpretación canónica

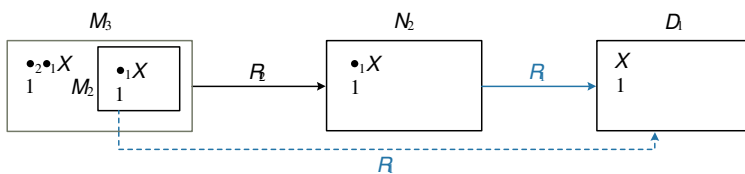
Las intuiciones que motivaron la construcción de los sistemas  $LR$ - $n$  corresponden a la siguiente interpretación (ver figura 1): cada mundo posible corresponde a una situación específica y a un razonador, así, el mundo posible  $M_3$  de profundidad-3 se interpreta como una *situación específica* asociada a un razonador-3 de tipo-3. El mundo posible  $N_2$  de profundidad-2 se interpreta

como una *situación específica* asociada a un razonador-2 de tipo-2.  $V(M_3, X)$  se interpreta como *información-X* (información sobre la veracidad o falsedad de la fórmula  $X$  de tipo-3) que el razonador-3 *posee* en la situación específica  $M_3$ .  $M_3R_2N_2$  significa que, desde la situación específica  $M_3$ , el razonador-3 *encuentra disponible* (*puede acceder a*) la información- $Y$ , que el razonador-2 *posee* en la situación específica  $N_2$ .



**Figura 1:** mundos posibles y situaciones específicas

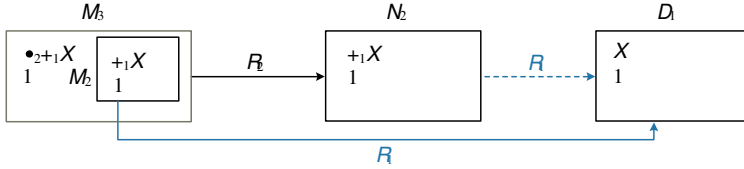
$V(M_3, \bullet_2 \bullet_1 X \rightarrow \bullet_1 X) = 1$  se interpreta como (ver figura 2): si desde la situación específica  $M_3$ , el razonador-3 *encuentra disponible* la información que el razonador-2 *posee* en la situación específica  $N_2$ , y si desde la situación específica  $N_2$  el razonador-2 *encuentra disponible* la información que el razonador-1 *posee* en la situación específica  $D_1$ , entonces el razonador-3 *encuentra disponible* desde  $M_2$ , la información que el razonador-1 *posee* en la situación específica  $D_1$ . Lo anterior significa que *el razonador-2 transmite al razonador-3 la información que tiene disponible acerca del razonador-1*. Por lo que  $A \times T$  significa *transmisión de la información desde abajo*.



**Figura 2:** transmisión de la información desde abajo

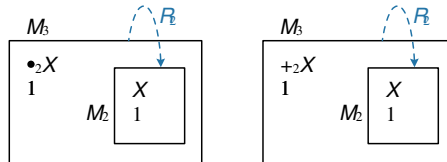
$V(M_3, \bullet_2 +_1 X \rightarrow +_1 X) = 1$  se interpreta como (ver figura 3): si desde la situación específica  $M_3$ , el razonador-3 *encuentra disponible* la información que el razonador-2 *posee* en una situación específica  $N_2$ , entonces desde la situación específica  $N_2$  el razonador-2 *encuentra disponible* la información que el razonador-1 *posee* en *cualquier situación* específica  $D_1$ , la cual se *encuentra disponible* para el razonador-3 desde la situación específica  $M_2$ . Lo anterior

significa que *el razonador-3 transmite al razonador-2 la información que tiene disponible acerca del razonador-1*. Por lo que  $A \times E$  significa *transmisión de la información desde arriba*.



**Figura 3:** transmisión de la información desde arriba

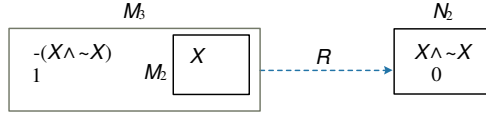
$V(M_3, +_2X \rightarrow X) = V(M_3, X \rightarrow \bullet_2X) = 1$  se interpreta como (ver figura 4): el razonador-3, en la situación específica  $M_3$ , *encuentra disponible la información*- $X$ , de tipo- $x$ , que el razonador-2, de tipo- $r$ , con  $x \leq r$ , posee en la situación específica  $M_2$ . Lo anterior significa que *el razonador-3 encuentra disponible la información que posee como información que el razonador-2 posee*. Por lo que  $A \times R$  significa disponibilidad de la información que se posee si hay un razonador capaz de acceder a ella. Cuando el razonador-2 es el mismo razonador-3, se tiene la llamada *autoreflexión del conocimiento*.



**Figura 4:** disponibilidad de la información que se posee

Observar que en  $LER-3$ , la fórmula  $+_1 \bullet_2 P \rightarrow \bullet_2 P$ , donde  $P$  es atómica,  $+_1$  es de tipo-1 y  $\bullet_2$  es de tipo-2, es refutada por el modelo que consta de los mundos  $M_1, M_2$  y  $M_3$ , tales que  $M_3 R_2 M_2, M_2 R_2 M_1$  y  $M_2 R_1 M_1$ , donde  $V(M_1, P) = 0$ , puesto que  $V(M_3, +_1 \bullet_2 P) = 1$  y  $V(M_2, \bullet_2 P) = 0$ .

$V(M_3, +X \rightarrow \bullet X) = V(M_3, -(X \wedge \sim X)) = 1$  se interpreta como (ver figura 5): el razonador-3, desde la situación específica  $M_3$ , puede garantizar que los razonadores de cierto tipo refutan la información inconsistente del mismo tipo o inferior. Por lo que  $A \times S$  significa consistencia de la información que poseen los razonadores cuando tienen la capacidad de acceder a ella.



**Figura 5:** consistencia de la información

Observar que en  $DDR-3$ , la fórmula  $-_1(\bullet_2 P \wedge \sim \bullet_2 P)$ , donde  $P$  es atómica,  $+_1$  es de tipo-1 y  $\bullet_2$  es de tipo-1, es refutada por el modelo que consta de los mundos  $N_1, M_1, M_2$  y  $M_3$ , tales que  $M_2 R_1 N_1, M_2 R_2 N_1, M_2 R_2 M_1$  y  $M_2 R_1 M_1$ , donde  $V(M_1, P) = 1$  y  $V(N_1, P) = 0$ .

Observar que la relación entre las profundidades de los mundos, exigida por las reglas y las restricciones, garantizan que la estructura formada por los mundos posibles  $M_3, M_2, M_1, N_2$ , y  $N_1$ , tales que únicamente  $M_3 R_2 M_2, M_2 R_2 M_1, M_2 R_1 M_1, M_3 R_1 N_2, N_2 R_1 N_1, N_2 R_2 N_1, N_2 R_1 M_1$  y  $N_2 R_2 M_1$ , donde  $V(M_1, P) = 1$ , y  $V(N_1, P) = V(N_1, Q) = V(M_1, Q) = 0$ , no es un 3-modelo, el cual refutaría en  $LR-3$  la fórmula  $+_1(P \rightarrow \bullet_2 Q) \rightarrow (+_1 P \rightarrow +_1 \bullet_2 Q)$  con  $P$  y  $Q$  atómicas, y  $+_1$  de tipo-1, es decir, refutaría el axioma  $MP+<$  (para que sea un 3-modelo las restricciones  $RE <$  y  $RAE <$  implican que  $M_2 R_1 N_1$ , por lo que  $V(N_1, P) = 1$ , lo cual no es en caso). Observar que en el axioma  $MP+<$ :  $+(X \rightarrow Y) \rightarrow (+X \rightarrow +Y)$  se pide que la profundidad de  $Y$  sea mayor que la profundidad de  $X$ , por lo que, para validar este axioma, se requiere la restricción  $RAE <$ .

Observar también que la estructura formada por los mundos posibles  $M_3, M_2, M_1$  y  $N_1$ , tales que únicamente  $M_3 R_1 M_2, M_2 R_1 M_1, M_3 R_2 M_2, M_2 R_2 M_1$  y  $M_2 R_1 N_1$ , donde  $V(M_1, P) = V(N_1, P) = V(M_1, Q) = 1$  y  $V(N_1, Q) = 0$ , es un 3-modelo, el cual refuta en  $LR-3$  la fórmula  $+_1(\bullet_2 P \rightarrow Q) \rightarrow (+_1 \bullet_2 P \rightarrow +_1 Q)$  con  $P$  y  $Q$  atómicas, es decir, refuta la fórmula:  $+(X \rightarrow Y) \rightarrow (+X \rightarrow +Y)$  cuando la tipo de  $X$  sea mayor que el tipo de  $Y$ . La profundidad de los mundos indica el nivel de complejidad de la información, es decir, el tipo de las fórmulas que el razonador posee en una situación específica. Las restricciones  $RE <$  y  $RAE <$ , las cuales corresponden al axioma  $MP+<$ , garantizan que si se accede a información de cierta complejidad, entonces se puede acceder a información de menor complejidad y no necesariamente a información de mayor complejidad.

## 5 Validez

**Definición 5.1** (Validez). Sea  $X$  una fórmula de tipo- $t$ .  $X$  es verdadera en el  $n$ -modelo  $(S, M_a, RA, V)$ , con  $t \leq a \leq n$ , si y sólo si  $V(M_a, X) = 1$ .  $X$  es  $n$ -válida si y sólo si  $X$  es verdadera en todo  $n$ -modelo  $(S, M_a, RA, V)$ , con  $t \leq a \leq n$ .  $X$  es verdadera en un modelo  $(S, M_a, RA, V)$  si y solamente si  $V(M_a, X) = 1$ , con  $t \leq a$ .  $X$  es válida si y solamente si  $X$  es verdadera en todo modelo  $(S, M_a, RA, V)$ , con  $t \leq a$ .

Tener presente que al hablar de validez, puede ser validez en  $LER$ - $n$  o en  $LDR$ - $n$ , dependiendo de si son modelos de  $LER$ - $n$  o de  $LDR$ - $n$ . Esta diferencia será clara en el contexto.

Observar que cuando se habla de 1-validez, se hace referencia a los 1-modelos, pero en estos modelos no aplica la regla  $V+$ , es decir, los 1-modelos son los modelos del cálculo proposicional clásico  $CP$ , por lo que 1-validez coincide con validez en  $CP$ .

Resulta entonces que una fórmula  $X$  de profundidad- $t$ , con  $t \leq n$ , no es  $n$ -válida si y solamente si existe un  $n$ -modelo  $M = (S, M_a, RA, V)$ , con  $t \leq a \leq n$ , en el cual  $X$  no es verdadera, es decir,  $V(M_a, X) = 0$ . Por lo que si la fórmula  $X$  no es  $n$ -válida, utilizando las reglas de las valuaciones, a partir de  $V(M_a, X) = 0$ , se construye un  $n$ -modelo  $M = (S, M_a, RA, V)$  que refute la validez de la fórmula  $X$ ; este modelo es llamado  $n$ -modelo refutador. Pero si la fórmula  $X$  es  $n$ -válida, entonces la construcción del  $n$ -modelo refutador fracasará, puesto que, en alguno de los mundos posibles (bien sea  $M_a$  o un mundo generado por la aplicación de las reglas) del modelo en construcción, se presentará una inconsistencia. Cuando fracasa la construcción del modelo refutador, entonces se genera una cadena de mundos posibles  $C = M_a \dots N_{k+1} D_k$  tal que  $D_k$  es inconsistente, es decir, para alguna fórmula  $Z$ ,  $V(D_k, Z) = 1$  y  $V(D_k, Z) = 0$ . En este caso se dice que la cadena  $C$  es inconsistente.

En resumen, para probar la  $n$ -validez de una fórmula  $X$  de profundidad- $t$ , con  $t \leq n$ , se supone que la fórmula  $X$  no es  $n$ -válida, es decir, es falsa en el mundo actual  $M_a$  de un  $n$ -modelo, y a partir de esta información se construye el  $n$ -modelo refutador. Si tal  $n$ -modelo no existe entonces se concluye que la fórmula  $X$  es  $n$ -válida.

**Proposición 5.1** (Preservación de la validez).

1. Sea  $X$  de tipo- $a$ , con  $a \leq n$ . Si  $X$  es  $n$ -válida entonces  $X$  y  $+X$  son



$(n + 1)$ -válidas.

2. Sea  $X$  de tipo- $a$ , con  $a \leq n$ . Si  $X$  es válida entonces  $+X$  es válida.
3. Para  $A$  y  $B$  fórmulas de profundidad- $t$ , con  $1 \leq t \leq n$ . Si  $A$  y  $A \rightarrow B$  son  $n$ -válidas entonces  $B$  también es  $n$ -válida.

**Prueba.** Para la parte 1, supóngase que  $X$  de tipo- $a$  es  $n$ -válida, por lo que, en la búsqueda constructiva de un  $n$ -modelo refutador de la fórmula  $X$ , resulta una cadena inconsistente  $C = M_a \dots N_{k+1} D_k$  para algún  $k$  tal que  $1 \leq k \leq a \leq n$ . Por lo tanto, en la búsqueda constructiva de un  $(n + 1)$ -modelo refutador de la fórmula  $X$ , resulta la misma cadena inconsistente  $C = M_a \dots N_{k+1} D_k$  para algún  $k$ ,  $1 \leq k \leq a \leq n + 1$ . Se concluye entonces que  $X$  es  $(n + 1)$ -válida.

Supóngase que  $+X$  no es  $(n+1)$ -válida, por lo que existe un  $(n+1)$ -modelo refutador de  $+X$ ,  $MO = (S, M_{a+1}, RA, V)$ , con  $1 \leq a \leq n$ , tal que  $+X$  no es verdadera en  $MO$ , es decir,  $V(M_{a+1}, +X) = 0$ . Por la regla  $V+$  resulta que existe un mundo posible  $N_a$  tal que  $M_{a+1}RN_a$ , donde  $R$  es la relación asociada a  $+$ , y  $V(N_a, X) = 0$ . El  $(n+1)$ -modelo  $MO$  se encuentra formado por cadenas consistentes de la forma  $M_{a+1}N_a \dots S_k$ , las cuales tienen profundidad a lo sumo  $a + 1$ , y, además, en el mundo  $M_{a+1}$  la fórmula  $+X$  toma el valor 0, y en el mundo  $N_a$  la fórmula  $X$  toma el valor 0. A partir del  $(n + 1)$ -modelo refutador  $MO$  de  $+X$  se construye un  $n$ -modelo refutador  $MO'$  de la fórmula  $X$  de la siguiente manera: se elimina el mundo actual  $M_{a+1}$  del conjunto  $S$  obteniéndose el conjunto  $S'$ , y se toma como mundo actual del modelo  $MO'$  el mundo  $N_a$ ; en la relación de accesibilidad del modelo  $MO$  se eliminan las relaciones de accesibilidad existentes entre el mundo actual  $M_{a+1}$  y cualquier otro mundo obteniéndose el conjunto de relaciones  $RA'$ , y del dominio de  $V$  se excluye el mundo actual  $M_{a+1}$  obteniéndose  $V'$ . Como resultado se obtiene el modelo  $MO' = (S', N_a, RA', V')$ , el cual por construcción se encuentra formado por cadenas consistentes  $N_a \dots S_k$  de profundidad a lo sumo  $a$ , con  $a \leq n$ , lo que significa que  $MO'$  es un  $n$ -modelo, y, además, en el mundo actual  $N_a$  la fórmula  $X$  toma el valor 0, por lo tanto,  $MO'$  es un  $n$ -modelo refutador de la fórmula  $X$ , es decir,  $X$  no es verdadera en el  $n$ -modelo  $MO'$ , por lo que  $X$  no es  $n$ -válida. De lo anterior se concluye que si  $+X$  no es  $(n + 1)$ -válida, entonces  $X$  no es  $n$ -válida, es decir, si  $X$  es  $n$ -válida entonces  $+X$  es  $(n + 1)$ -válida.

La parte 2 se prueba como la parte 1.

Para la parte 3, sean  $A$  de tipo- $a$  y  $B$  de tipo- $b$ . **Caso 1:**  $a \leq b$ , si  $B$  no es  $n$ -válida entonces existe un  $n$ -modelo con mundo actual  $M_b$  tal que  $V(M_b, B) = 0$ , pero como  $A \rightarrow B$  es  $n$ -válida, resulta que  $V(M_b, A \rightarrow B) = 1$ , por la regla  $V \rightarrow$  se infiere que  $V(M_b, A) = 0$ , contradiciendo la  $n$ -validez de  $A$ . **Caso 2:**  $a > b$ , si  $B$  no es  $n$ -válida entonces  $A \wedge B$  tampoco es  $n$ -válida, por lo que existe un  $n$ -modelo con mundo actual  $M_a$  tal que  $V(M_a, A \wedge B) = 0$ , es decir,  $V(M_a, A) = 0$  ó  $V(M_b, B) = 0$ , pero como  $A$  es  $n$ -válida, entonces  $V(M_b, B) = 0$ , como  $A \rightarrow B$  es  $n$ -válida, resulta que  $V(M_a, A \rightarrow B) = 1$ , y por la regla  $V \rightarrow$  se infiere que  $V(M_a, A) = 0$ , contradiciendo la  $n$ -validez de  $A$ .  $\square$

**Proposición 5.2** ( $n$ -validez de los axiomas). *Sea  $X$  de profundidad- $t$ , con  $t \leq n$ . Si  $X$  es un axioma de  $LR$ - $n$  entonces  $X$  es  $n$ -válida.*

**Prueba.** Supóngase que  $X$  es un axioma de  $LR$ - $n$ , se probará que  $X$  es  $n$ -válida haciendo inducción sobre  $n$ .

Paso base 1 ( $n = 1$ ). Se debe probar: si  $X$  es un axioma de  $LR$ -1 entonces  $X$  es 1-válida, lo cual es cierto ya que el sistema  $LR$ -1 es el cálculo proposicional clásico  $CP$ , 1-validez es validez en  $CP$  y utilizando el teorema de validez de  $CP$ , presentado en [17], se obtiene que si  $X$  es un teorema de  $CP$  entonces  $X$  es  $CP$ -válida.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva 1 se tiene, para cada fórmula  $Y$  que, si  $Y$  es un axioma de  $LR$ - $n$  entonces  $Y$  es  $n$ -válida. Supóngase que  $X$  es un axioma de  $LR$ -( $n + 1$ ), se debe probar que  $X$  es ( $n + 1$ )-válida. Al ser  $X$  un axioma se deben considerar nueve casos: en el primer caso  $X$  es un axioma de  $LR$ - $n$ , en el segundo  $X$  es de la forma  $+Y$ , donde  $Y$  es un teorema de  $LR$ - $n$ , en el tercer y cuarto caso  $X$  es de la forma  $+(Y \rightarrow Z) \rightarrow (+Y \rightarrow +Z)$ , en el quinto caso  $X$  es de la forma  $Z \rightarrow \bullet Z$ , donde el tipo de  $\bullet$  es mayor o igual que el tipo de  $Z$ , en el sexto caso  $X$  es uno de los axiomas de  $CP$ , en el séptimo caso  $X$  es de la forma  $\neg_2 \neg_1 Z \rightarrow \bullet_1 Z$ , en el octavo caso  $X$  es de la forma  $\neg_1 Z \rightarrow \neg_2 +_1 Z$ , y en el noveno caso  $X$  es de la forma  $+Z \rightarrow \bullet Z$ , donde el tipo de  $+$  es mayor o igual que el tipo de  $Z$ .

En el primer caso,  $X$  es un axioma de  $LR$ - $n$ ; utilizando la hipótesis inductiva resulta que  $X$  es  $n$ -válida y, por la proposición 5.1, numeral 1, se infiere que  $X$  es ( $n + 1$ )-válida.

En el segundo caso,  $X$  es de la forma  $+Y$ , donde  $Y$  es un teorema de  $LR-n$ . Se probará que  $Y$  es  $n$ -válida por inducción sobre la longitud  $L$  de la demostración de  $Y$  en  $LR-n$ .

Paso base 2 ( $L = 1$ ). Si la longitud de la demostración de  $Y$  en  $LR-n$  es 1, entonces  $Y$  es un axioma de  $LR-n$ , lo cual, por la hipótesis inductiva 1, significa que  $Y$  es  $n$ -válida.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva 2 se tiene que para cada fórmula  $Z$ , si  $Z$  es un teorema de  $LR-n$  y la longitud de la demostración de  $Z$  tiene longitud menor que  $L$  (donde  $L > 1$ ) entonces  $Z$  es  $n$ -válida. Si  $Y$  es un teorema de  $LR-n$  y la longitud de la demostración de  $Y$  es  $L$ , entonces  $Y$  es un axioma de  $LR-n$  ó  $Y$  es consecuencia de aplicar modus ponens en pasos anteriores de la demostración. En el primer caso se procede como en el caso base. En el segundo caso se tienen en  $LR-n$ , para alguna fórmula  $W$ , demostraciones de  $W$  y de  $W \rightarrow Y$ , donde la longitud de ambas demostraciones es menor que  $L$ ; utilizando la hipótesis inductiva 2 se infiere que  $W$  y  $W \rightarrow Y$  son  $n$ -válidas, y por la proposición 5.1, numeral 3, resulta que  $Y$  es  $n$ -válida.

Con la segunda inducción se ha probado que, si  $Y$  es un teorema de  $LR-n$  entonces  $Y$  es  $n$ -válida, y por la proposición 5.1, numeral 1, resulta que  $+Y$  es  $(n + 1)$ -válida, por lo que  $X$  es  $(n + 1)$ -válida.

En el tercer caso ( $MP+=$ ),  $X$  es de la forma  $+(A \rightarrow B) \rightarrow (+A \rightarrow +B)$ , donde  $A$  y  $B$  son fórmulas de tipo- $a$ . Si esta fórmula no fuese  $(n + 1)$ -válida, entonces existiría un  $(n + 1)$ -modelo tal que en el mundo actual  $M_{a+1}$ ,  $V(M_{a+1}, +(A \rightarrow B) \rightarrow (+A \rightarrow +B)) = 0$ , lo cual, según la regla  $V\rightarrow$ , significa  $V(M_{a+1}, +(A \rightarrow B)) = 1$  y  $V(M_{a+1}, +A \rightarrow +B) = 0$ , y de nuevo, por la misma regla, se obtienen  $V(M_{a+1}, +A) = 1$  y  $V(M_{a+1}, +B) = 0$ ; de esta última, por la regla  $V+$ , se infiere la existencia de un mundo  $N_a$  tal que  $M_{a+1}RN_a$  y  $V(N_a, B) = 0$ , y como  $V(M_{a+1}, +(A \rightarrow B)) = 1$  por  $V+$  se infiere  $V(N_a, A \rightarrow B) = 1$ , y como  $V(M_{a+1}, +A) = 1$ , por  $V+$  se obtiene  $V(N_a, A) = 1$ , y como ya se tiene  $V(N_a, A \rightarrow B) = 1$ , por  $V\rightarrow$  se genera  $V(N_a, B) = 1$ , pero esto es imposible, ya que  $V(N_a, B) = 0$ . Por lo tanto,  $+(A \rightarrow B) \rightarrow (+A \rightarrow +B)$  es  $(n + 1)$ -válida.

En el cuarto caso ( $MP+<$ ),  $X$  es de la forma  $+(A \rightarrow B) \rightarrow (+A \rightarrow +B)$ , donde  $A$  es de tipo- $a$ ,  $B$  es de tipo- $b$  y  $a < b$ . Si esta fórmula no fuese  $(n + 1)$ -válida, entonces existiría un  $(n + 1)$ -modelo tal que en el

mundo actual  $M_{b+1}$ ,  $V(M_{b+1}, +(A \rightarrow B) \rightarrow (+A \rightarrow +B)) = 0$ , lo cual, según la regla  $V\rightarrow$ , significa  $V(M_{b+1}, +(A \rightarrow B)) = 1$  y  $V(M_{b+1}, +A \rightarrow +B) = 0$ , por la restricción  $RE<$  existe la secuencia de mundos encajados  $M_{b+1}, M_b, \dots, M_{a+1}, M_a, \dots, M_2, M_1$ , y de nuevo por la regla  $V\rightarrow$  se obtienen  $V(M_{a+1}, +A) = 1$  y  $V(M_{b+1}, +B) = 0$ ; de esta última, por la regla  $V+$ , se infiere la existencia de un mundo  $N_b$  tal que  $M_{b+1}RN_b$  y  $V(N_b, B) = 0$ , y como  $V(M_{b+1}, +(A \rightarrow B)) = 1$ , también se infiere  $V(N_b, A \rightarrow B) = 1$ . Como  $M_{b+1}RN_b$ , entonces, por la restricción  $RAE<$ , resulta que  $M_bRN_{b-1}, \dots, M_{a+1}RN_a$ , y como  $V(M_{a+1}, +A) = 1$ , por  $V+$  se obtiene  $V(N_a, A) = 1$ , pero, como ya se tiene  $V(N_b, A \rightarrow B) = 1$ , por  $V\rightarrow$  se genera  $V(N_b, B) = 1$ , pero esto es imposible, ya que  $V(N_b, B) = 0$ . Por lo tanto,  $+(A \rightarrow B) \rightarrow (+A \rightarrow +B)$  es  $(n+1)$ -válida.

En el quinto caso  $X$  es de la forma  $Z \rightarrow \bullet Z$  (axioma específico de  $LER-n$ ), donde el tipo de  $\bullet$  es mayor o igual que el tipo de  $Z$ . Supóngase que  $Z$  es de tipo- $a$  y  $\bullet$  es de tipo- $r$ , con  $1 \leq a \leq n$  y  $a \leq r$ , si esta fórmula no fuese  $(n+1)$ -válida, entonces existiría un  $(n+1)$ -modelo tal que en el mundo actual  $M_{a+1}$ ,  $V(M_{a+1}, Z \rightarrow \bullet Z) = 0$ , lo cual, según la regla  $V\rightarrow$ , significa  $V(M_a, Z) = 1$  y  $V(M_{a+1}, \bullet Z) = 0$ , es decir,  $V(M_{a+1}, \sim + \sim Z) = 0$ , resultando que  $V(M_{a+1}, + \sim Z) = 1$ , utilizando la restricción  $RR$  (restricción específica de  $LER-n$ ) se tiene  $M_{a+1}RM_a$ , resultando que  $V(M_a, \sim Z) = 1$ , es decir,  $V(M_a, Z) = 0$ , lo cual no es el caso. Por lo tanto,  $Z \rightarrow \bullet Z$  es  $(n+1)$ -válida cuando el tipo de  $\bullet$  es mayor o igual que el tipo de  $Z$ .

En el sexto caso  $X$  es uno de los axiomas de  $CP$ , por lo que, utilizando las reglas  $Vat$ ,  $V\sim$ ,  $V\wedge$ ,  $V\vee$ ,  $V\rightarrow$  y  $V\leftrightarrow$ , y procediendo como es habitual para la validez del cálculo proposicional clásico (para detalles del caso clásico ver [17]), se concluye que  $X$  es  $(n+1)$ -válida.

En el séptimo caso  $X$  es de la forma  $-_2\neg_1 Z \rightarrow \bullet_1 Z$ . Supóngase que  $Z$  es de tipo- $a$ , con  $1 \leq a < n$ , si esta fórmula no fuese  $(n+1)$ -válida, entonces existiría un  $(n+1)$ -modelo tal que en el mundo actual  $M_{a+2}$ ,  $V(M_{a+2}, -_2\neg_1 Z \rightarrow \bullet_1 Z) = 0$ , lo cual, según la regla  $V\rightarrow$ , significa  $V(M_{a+2}, -_2\neg_1 Z) = 1$  y  $V(M_{a+1}, \bullet_1 Z) = 0$ , es decir,  $V(M_{a+1}, \sim +_1 \sim Z) = 0$  y entonces  $V(M_{a+1}, +_1 \sim Z) = 1$ , utilizando la regla  $V-$  de la proposición 3.1 resulta que existe un mundo  $N_{a+1}$  tal que  $M_{a+2}R_2N_{a+1}$ , y en el cual  $V(N_{a+1}, \neg_1 Z) = 0$ , por la regla  $V\neg$  de la proposición 3.1 resulta que existe un mundo  $S_a$  tal que  $N_{a+1}R_1S_a$ , y en el cual  $V(S_a, Z) = 1$ , pero por la restricción  $RT$  se obtiene  $M_{a+1}R_1S_a$ ,

por lo que se infiere  $V(S_a, \sim Z) = 1$ , es decir,  $V(S_a, Z) = 0$ , lo cual es imposible, por lo tanto,  $\neg_2 \neg_1 Z \rightarrow \bullet_1 Z$  es  $(n + 1)$ -válida.

En el octavo caso  $X$  es de la forma  $\neg_1 Z \rightarrow \neg_2 +_1 Z$ . Supóngase que  $Z$  es de tipo  $-a$ , con  $1 \leq a < n$ , si esta fórmula no fuese  $(n + 1)$ -válida, entonces existiría un  $(n + 1)$ -modelo tal que en el mundo actual  $M_{a+2}$ ,  $V(M_{a+2}, \neg_1 Z \rightarrow \neg_2 +_1 Z) = 0$ , lo cual, según la regla  $V \rightarrow$ , significa  $V(M_{a+1}, \neg_1 Z) = 1$  y  $V(M_{a+2}, \neg_2 +_1 Z) = 0$ , utilizando la regla  $V -$  se infiere la existencia de un mundo  $N_a$  tal que  $M_{a+1} R_1 N_a$  y  $V(N_a, Z) = 0$ , además, por la regla  $V \neg$ , resulta que existe un mundo  $S_{a+1}$  tal que  $M_{a+2} R_2 S_{a+1}$  y  $V(S_{a+1}, +_1 Z) = 1$ ; utilizando la restricción  $RE$  se obtiene  $S_{a+1} R_1 N_a$  resultando que  $V(N_a, Z) = 1$ , lo cual es imposible, por lo tanto,  $\neg_1 Z \rightarrow \neg_2 +_1 Z$  es  $(n + 1)$ -válida.

En el noveno caso  $X$  es de la forma  $+Z \rightarrow \bullet Z$  (axioma específico de  $LDR-n$ ), donde el tipo de  $+$  es mayor o igual que el tipo de  $Z$ . Supóngase que  $Z$  es de tipo  $-a$  y  $+$  es de tipo  $-r$ , con  $1 \leq a \leq n$  y  $a \leq r$ , si esta fórmula no fuese  $(n + 1)$ -válida, entonces existiría un  $(n + 1)$ -modelo tal que en el mundo actual  $M_{a+1}$ ,  $V(M_{a+1}, +Z \rightarrow \bullet Z) = 0$ , lo cual, según la regla  $V \rightarrow$ , significa  $V(M_{a+1}, +Z) = 1$  y  $V(M_{a+1}, \bullet Z) = 0$ , utilizando la restricción  $RS$  (restricción específica de  $LDR-n$ ) se tiene la existencia de  $N_a$  tal que  $M_{a+1} R N_a$ , lo cual, de acuerdo a las reglas  $V +$  y  $V \bullet$ , implica que  $V(N_a, Z) = 1$  y  $V(N_a, Z) = 0$ , lo cual es imposible. Por lo tanto,  $+Z \rightarrow \bullet Z$  es  $(n + 1)$ -válida cuando el tipo de  $\bullet$  es mayor o igual que el tipo de  $Z$ .  $\square$

**Proposición 5.3** (Validez de  $LER-n$  y  $LDR-n$ ). *Para  $n \geq 1$  y  $X$  una fórmula de profundidad  $-n$ . Si  $X$  es un teorema de  $LR-n$  entonces  $X$  es  $n$ -válida.*

**Prueba.** Supóngase que  $X$  es un teorema de  $LR-n$ , se prueba que  $X$  es  $n$ -válida por inducción sobre la longitud  $L$  de la demostración de  $X$  es  $LR-n$ .

Paso base ( $L = 1$ ). Si la longitud de la demostración de  $X$  en  $LR-n$  es uno, entonces  $X$  es un axioma de  $LR-n$ , lo cual, por la proposición 5.2, significa que  $X$  es  $n$ -válida.

Paso de inducción. Como hipótesis inductiva se tiene que para cada fórmula  $Y$ , si  $Y$  es un teorema de  $LR-n$  y la longitud de la demostración de  $Y$  tiene longitud menor que  $L$  (donde  $L > 1$ ), entonces  $Y$  es  $n$ -válida. Si  $X$  es un teorema de  $LR-n$  y la longitud de la demostración de  $X$  es  $L$ , entonces  $X$  es un axioma de  $LR-n$  ó  $X$  es consecuencia de aplicar modus ponens en pasos

anteriores de la demostración. En el primer caso se procede como en el caso base. En el segundo caso se tienen en  $LR-n$ , para alguna fórmula  $Y$ , demostraciones de  $Y$  y de  $Y \rightarrow X$ , donde la longitud de ambas demostraciones es menor que  $L$ ; utilizando la hipótesis inductiva se infiere que  $Y$  y  $Y \rightarrow X$  son  $n$ -válidas, y por la proposición 5.1, numeral 3, resulta que  $X$  es  $n$ -válida.  $\square$

**Proposición 5.4** (Teoremas de  $LR$  en  $LR-n$ ). *Para cada fórmula  $X$ .  $X$  es un teorema de  $LR$  si y sólo si existe  $t \geq 1$  tal que para cada  $n \geq t$ ,  $X$  es un teorema de  $LR-n$ .*

**Prueba.** Supóngase que  $X$  es un teorema de  $LR$ , por lo que  $X$  es consecuencia de un número finito de axiomas de  $LR$ , pero los axiomas de  $LR$  son los axiomas de los sistemas  $LR-n$ , por lo que debe existir un  $t$  tal que todos los axiomas utilizados en la prueba de  $X$  sean axiomas de  $LR-t$ , resultando que  $X$  es un teorema de  $LR-t$ . Se ha probado que, si  $X$  es un teorema de  $LR$  entonces  $X$  es un teorema de  $LR-t$ , y como los axiomas de  $LR-t$  son axiomas de  $LR-n$  para  $n > t$ , se obtiene que, si  $X$  es un teorema de  $LR$  entonces para cada  $n \geq t$ ,  $X$  es un teorema de  $LR-n$ . Para probar la recíproca, supóngase que  $X$  es un teorema de  $LR-t$ , lo cual significa que existe una demostración de  $X$  a partir de los axiomas de  $LR-t$ , y como los axiomas de  $LR-t$  son axiomas de  $LR$ , entonces la demostración de  $X$  en  $LR-t$  también es una demostración de  $X$  en  $LR$ , por lo tanto,  $X$  es un teorema de  $LR$ .  $\square$

**Proposición 5.5** (Validez de  $LER$  y  $LDR$ ). *Para cada fórmula  $X$ . Si  $X$  es un teorema de  $LR$  entonces  $X$  es válida.*

**Prueba.** Supóngase que  $X$  es un teorema de  $LR$  y que  $X$  es una fórmula de profundidad- $p$  arbitraria. Por la proposición 5.4 resulta que existe  $t \geq 1$  tal que para cada  $n \geq t$ ,  $X$  es un teorema de  $LR-n$ , lo cual, según la proposición 5.3, significa que para cada  $n \geq t$ ,  $X$  es  $n$ -válida.

Si  $X$  no es válida, entonces existe un modelo  $M$  en el cual  $X$  es falsa, es decir,  $V(M_a, X) = 0$  donde  $M_a$  es el mundo actual, el cual es de profundidad- $a$ , con  $a \geq p$ , por lo que el modelo  $M$  es de profundidad- $a$ , resultando que  $X$  no es  $a$ -válida, y como para cada  $n \geq t$ ,  $X$  es  $n$ -válida, entonces  $a < t$ . Pero si  $a < t$  entonces todo  $a$ -modelo es un  $t$ -modelo, resultando que  $X$  no es  $t$ -válida, lo cual es imposible. Por lo tanto,  $X$  es válida.  $\square$

## 6 Completitud

**Definición 6.1** (Extensión consistente y completa). Una *extensión* de un sistema deductivo se obtiene alterando el conjunto de axiomas de tal manera que todos los teoremas del sistema sigan siendo teoremas y que el lenguaje de la extensión coincida con el lenguaje del sistema deductivo. Una extensión es *consistente* si no existe ninguna fórmula  $X$  tal que tanto  $X$  como  $\sim X$  sean teoremas de la extensión. Un conjunto de fórmulas es *inconsistente* si de ellas se derivan  $Z$  y  $\sim Z$  para alguna fórmula  $Z$ . Una extensión es *completa* si para toda fórmula  $X$ , del lenguaje de la extensión, o bien  $X$  o bien  $\sim X$  es teorema de la extensión.

**Proposición 6.1** (Extensión consistente de  $LER-n$  y de  $LDR-n$ ).

1. Para cada  $n \geq 1$ ,  $LR-n$  es consistente.
2.  $LR$  es consistente.
3. Si  $E$  una extensión de  $LR-n$ ,  $X$  es una fórmula de profundidad- $n$  que no es teorema de  $E$ , y  $E_x$  es la extensión de  $LR-n$  obtenida añadiendo  $\sim X$  como nuevo axioma a  $E$ , entonces  $E_x$  es consistente.

**Prueba.** Supóngase que  $LR-n$  no fuese consistente, por lo que debe existir una fórmula  $X$  de profundidad- $n$  tal que tanto  $X$  como  $\sim X$  sean teoremas. Entonces, por la proposición 5.3, tanto  $X$  como  $\sim X$  son fórmulas  $n$ -válidas, pero esto es imposible, ya que si  $\sim X$  es una fórmula  $n$ -válida, entonces para todo  $n$ -modelo  $(S, M_a, RA, V)$  se tienen  $V(M_a, \sim X) = 1$ , es decir, según  $V \sim, V(M_a, X) = 0$ , por lo que  $X$  no puede ser  $n$ -válida, lo cual no es el caso. Por lo tanto,  $LR-n$  es consistente.

Para la parte 2, si  $LR$  no es consistente, entonces existe una fórmula  $X$  tal que tanto  $X$  como  $\sim X$  son teoremas de  $LR$ . Pero las demostraciones de  $X$  y  $\sim X$  en  $LR$  son sucesiones finitas de fórmulas, por lo que cada demostración contiene casos particulares de un número finito de axiomas de  $LR$ . Por lo que debe existir un  $n$  suficientemente grande para que todos estos axiomas utilizados sean axiomas de  $LR-n$ , resultando que  $LR-n$  es inconsistente, lo cual, según la parte 1, no es el caso. Por lo tanto,  $LR$  es consistente.

La parte 3 es un resultado bastante conocido, para detalles ver [16, 17].  $\square$

**Proposición 6.2** (Extensión consistente y completa).<sup>4</sup> Si  $E$  es una extensión consistente de  $LR-n$  (o de  $LR$ ), entonces existe una extensión consistente y completa de  $E$ .

**Prueba.** Es una construcción estándar conocida como el lema de Lindenbaum, para detalles ver [16, 17].  $\square$

**Proposición 6.3** (Consistencia  $+-$ subordinada). Sean  $Y$  una fórmula de tipo- $t$ , con  $t \leq n$ , y  $Z_1, \dots, Z_k$  fórmulas de profundidad- $a$ , con  $a \leq t$ . Si  $\{+Z_1, \dots, +Z_k, \bullet Y\}$  es consistente en  $LR-(n+1)$ , entonces  $\{Z_1, \dots, Z_k, Y\}$  es consistente en  $LR-n$ .

**Prueba.** Supóngase que  $\{Z_1, \dots, Z_k, Y\}$  es inconsistente en  $LR-n$ , por lo que existe una fórmula  $W$  tal que, a partir de  $\{Z_1, \dots, Z_k, Y\}$  se infieren  $W$  y  $\sim W$  en  $LR-n$ ; utilizando  $LCP$  resulta que  $(Z_1 \wedge \dots \wedge Z_k \wedge Y) \rightarrow (W \wedge \sim W)$  es un teorema de  $LR-n$ , y, por  $LCP$ , en  $LR-n$  resulta  $\sim(Z_1 \wedge \dots \wedge Z_k \wedge Y)$ , lo cual, por  $LCP$ , significa  $(Z_1 \wedge \dots \wedge Z_k) \rightarrow \sim Y$ . Como esta fórmula es de tipo- $t$ , utilizando  $A \times +$  resulta que  $+((Z_1 \wedge \dots \wedge Z_k) \rightarrow \sim Y)$  es derivable en  $LR-(n+1)$  como  $a \leq t$ , por  $MP+<$  y  $MP+=$  se infiere  $+(Z_1 \wedge \dots \wedge Z_k) \rightarrow +\sim Y$ . Como  $Z_1, \dots, Z_k$  son de profundidad- $a$ , con  $a \leq n$ , entonces, por la proposición 2.1, numeral 2, resulta que  $(+Z_1 \wedge \dots \wedge +Z_k) \rightarrow +(Z_1 \wedge \dots \wedge Z_k)$  es un teorema de  $LR-(a+1)$  y de  $LR-(n+1)$ , por lo que, utilizando  $LCP$ , se infiere  $(+Z_1 \wedge \dots \wedge +Z_k) \rightarrow +\sim Y$  en  $LR-(n+1)$ , lo cual, por  $LCP$  y la definición de posibilidad, equivale a  $\sim(+Z_1 \wedge \dots \wedge +Z_k \wedge \bullet Y)$ , por lo que  $\{+Z_1, \dots, +Z_k, \bullet Y\}$  es inconsistente en  $LR-(n+1)$ .  $\square$

**Definición 6.2** ( $+-$ subordinado). Para  $1 \leq p \leq n$ , si  $E$  es una extensión consistente y completa de  $LR-n$ , entonces  $E_p = \{X \in E : X \text{ es de profundidad-}p\}$  es un *encajado* de  $E$ , y se dice que  $E_p$  es de profundidad- $p$ . Cuando  $p < n$ , se dice que  $E_p$  es encajado de  $E_{p+1}$ .  $E_n$  se identifica con  $E$ .

Sean  $E$  y  $F$  extensiones consistentes y completas de  $LR-n$ , con  $1 \leq p < n$ . Se dice que  $F_p$  es  $+-$ subordinado de  $E_{p+1}$  si y solamente si existe una fórmula  $Y$  de tipo- $p$  tal que  $\bullet Y$  está en  $E_{p+1}$ , y, además, para cada fórmula  $Z$  de

---

<sup>4</sup>Para llegar a las pruebas de completitud en las proposiciones 6.7 y 6.8 se siguen las directrices dadas por Henkin en *The completeness of the first order functional calculus* [18] y Kaplan en *Review of Kripke* [19] para probar la completitud de la lógica de primer orden y del sistema modal  $T$ .



tipo- $p$ , tal que  $+Z$  está en  $E_{p+1}$ , se tiene que  $Y$  y  $Z$  están en  $F_p$ . Se dice que  $F$  es  $+subordinado$  de  $E$  cuando  $F_{n-1}$  es  $+subordinado$  de  $E_n$ .

**Proposición 6.4** (Extensión  $+subordinada$  consistente y completa).

1. Para  $1 \leq p \leq n$ , si  $E$  es una extensión consistente y completa de  $LR-n$ , entonces  $E_p$  es una extensión consistente y completa de  $LR-p$ .
2. Para  $1 \leq p < n$ ,  $E$  una extensión consistente y completa de  $LR-n$  y  $X$  una fórmula de tipo- $p$ , si  $\bullet X$  está en  $E_{p+1}$ , entonces existe una extensión consistente y completa  $F$  de  $LR-n$  tal que  $X \in F_p$  y  $F_p+$ -subordinada de  $E_{p+1}$ .
3. Si  $1 \leq p < n$  y  $E$  una extensión consistente y completa de  $LR-n$ , entonces existe una extensión consistente y completa  $F$  de  $LR-n$  tal que  $F_p+$ -subordinada de  $E_{p+1}$  cuando  $+$  es de tipo- $r$  y  $p \leq r$ .
4. Si  $1 < n$  y  $E$  una extensión consistente y completa de  $LR$ , entonces existe una extensión consistente y completa  $F$  de  $LR$  tal que  $F_{n-1}+$ -subordinada de  $E_n$  cuando  $+$  es de tipo- $r$  y  $n-1 \leq r$ .

**Prueba.** Para la parte 1, sea  $E$  una extensión consistente y completa de  $LR-n$ , y sea  $E_p$  un *encajado* de  $E_{p+1}$ . Si  $E_p$  es inconsistente entonces existe una fórmula  $Z$  tal que tanto  $Z$  como  $\sim Z$  son derivables en  $E_p$ , y como  $E_p$  está incluido en  $E$ , resulta que tanto  $Z$  como  $\sim Z$  son derivables en  $E$ , es decir,  $E$  es inconsistente, lo cual no es el caso. Por lo tanto,  $E_p$  es consistente. Sea  $X$  una fórmula de profundidad- $t$ , con  $1 \leq t \leq p$ , como  $E$  es completa entonces  $X \in E$  ó  $\sim X \in E$ , al ser  $X$  y  $\sim X$  de profundidad- $t$  y  $E_p$  un *encajado* de  $E_{p+1}$ , por definición, se infiere que  $X \in E_p$  ó  $\sim X \in E_p$ , es decir,  $E_p$  es completa.

Para la parte 2, sea  $X$  una fórmula de tipo- $p$  tal que la fórmula  $\bullet X$  esté en  $E_{p+1}$ . Sea  $E_X = \{X\} \cup \{Z : +Z \text{ está en } E_{p+1}\}$ , como por la parte 1,  $E_{p+1}$  es consistente en  $LR-(p+1)$ , entonces, por la proposición 6.3,  $E_X$  también es consistente en  $LR-p$ , es decir, la unión de  $LR-p$  con  $E_X$  es una extensión consistente de  $LR-p$ . Utilizando la proposición 6.2, se construye una extensión consistente y completa  $F$  de  $LR-p$  la cual incluye a  $E_X$ . Como  $X$  está en  $E_X$ , también está en  $F$ , y como  $X$  es de tipo- $p$ , resulta que  $X$  está en  $F_p$ . Si  $W$  es de tipo- $p$  y  $+W$  está en  $E_{p+1}$ , por definición,  $W$  está en  $E_X$ , por lo que

$W$  está en  $F$ , y al ser  $W$  de tipo- $p$ , también está en  $F_p$ . Por lo tanto,  $F_p$  es  $+$ -subordinado de  $E_{p+1}$ .

La parte 3, en el sistema  $LER-n$ , es consecuencia de la parte 2, al tener en cuenta que  $+$  es de tipo- $r$  y  $p \leq r$ , por  $A \times R$ , en  $LER-2$  se tiene  $\bullet(Q \rightarrow Q)$ , donde  $Q$  es una fórmula atómica, y por  $A \times R$  resulta  $\bullet\bullet(Q \rightarrow Q)$  en  $LER-3$ , y continuando de esta manera se construye una fórmula  $Z$  de tipo- $p$  tal que  $\bullet Z$  está en  $LER-(p+1)$ .

La parte 3, en el sistema  $LDR-n$ , es consecuencia de la parte 2, al tener en cuenta que, por  $A \times +$ , en  $LDR-2$  se tiene  $+(Q \rightarrow Q)$ , donde  $Q$  es una fórmula atómica, y como  $+$  es de tipo- $r$  y  $p \leq r$ , por  $A \times S$ , resultaría  $\bullet(Q \rightarrow Q)$ , de igual manera resulta  $\bullet\bullet(Q \rightarrow Q)$  en  $LDR-3$ , y continuando de esta manera se construye una fórmula  $Z$  de tipo- $p$  tal que  $\bullet Z$  está en  $LDR-(p+1)$ .

La parte 4 se prueba de igual forma que la parte 3. □

**Proposición 6.5** (Propiedades de la  $+$ -subordinación). *Para  $1 \leq p < n-1$  y  $1 \leq q \leq n-1$ , sean  $E, F$  y  $G$  extensiones consistentes y completas de  $LR-n$ .*

1. Si  $F_{p+1}$  es  $+$ -subordinado de  $E_{p+2}$  y  $G_p$  es  $+$ -subordinado de  $F_{p+1}$ , entonces  $G_p$  es  $+$ -subordinado de  $E_{p+1}$ .
2. Si  $F_{p+1}$  es  $+$ -subordinado de  $E_{p+2}$  y  $G_p$  es  $+$ -subordinado de  $E_{p+1}$ , entonces  $G_p$  es  $+$ -subordinado de  $F_{p+1}$ .
3.  $F_p$  es  $+$ -subordinado de  $F_{p+1}$  cuando  $+$  es de tipo- $r$  y  $p \leq r$ , y  $F$  es una extensión consistente y completa de  $LER-n$ .
4. Si  $G_{n-1}$  es  $+$ -subordinado de  $F_n$ , entonces, para cada  $q$ , se tiene que  $G_q$  es  $+$ -subordinado de  $F_{q+1}$  cuando  $+$  es de tipo- $r$  y  $1 \leq q \leq r$ .
5. Para cada  $E$ , existe  $F$  tal que  $F_q$  es  $+$ -subordinada de  $E_{q+1}$  cuando  $+$  es de tipo- $r$  y  $q \leq r$ .

**Prueba.** Para la parte 1 supóngase que  $G_p$  es  $+$ -subordinado de  $F_{p+1}$  y  $F_{p+1}$  es  $+$ -subordinado de  $E_{p+2}$ . Como  $G_p$  es  $+$ -subordinado de  $F_{p+1}$ , entonces existe en  $F_{p+1}$  una fórmula  $\bullet_1 Z$  tal que  $Z$  está en  $G_p$  y  $Z$  es de tipo- $p$ . Si  $\bullet_1 Z$  no está en  $E_{p+2}$ , entonces al ser una extensión completa,  $\sim\bullet_1 Z$  si debe estarlo, además, por  $A \times T$ , se tiene que  $-_2\neg_1 Z \rightarrow \bullet_1 Z$  está en  $E_{p+2}$ , por lo que  $\sim-_2\neg_1 Z$ , es decir,  $+_2+_1\sim Z$  de tipo- $(p+2)$  también está en  $E_{p+2}$ ,

y al ser  $F_{p+1}$   $+_2$ -subordinado de  $E_{p+2}$  resulta que  $+_1 \sim Z$  está en  $F_{p+1}$ , lo cual significa que  $\sim \bullet_1 Z$  está en  $F_{p+1}$ , pero esto es imposible ya que  $F_{p+1}$  es consistente. Por lo que  $\bullet_1 Z$  está en  $E_{p+2}$ , y como  $\bullet Z$  es de tipo  $-(p+1)$ , entonces también está en  $E_{p+1}$ .

Sea  $W$  una fórmula de tipo  $-p$  tal que  $+_1 W$  está en  $E_{p+1}$ , es decir,  $\sim \bullet_1 \sim W$  está en  $E_{p+1}$  y también en  $E_{p+2}$ ; utilizando  $A \times T_{-2} \neg_1 \sim W \rightarrow \bullet_1 \sim W$  resulta que  $\sim_{-2} \neg_1 \sim W$  está en  $E_{p+2}$ , por lo que  $+_2 +_1 W$  está en  $E_{p+2}$ , y como  $F_{p+1}$  es  $+_2$ -subordinado de  $E_{p+2}$ , se infiere que  $+_1 W$  está en  $F_{p+1}$ , como, además,  $G_p$  es  $+_1$ -subordinado de  $F_{p+1}$ , entonces  $W$  está en  $G_p$ . En resumen, existe una fórmula  $\bullet_1 Z$  en  $E_{p+1}$  tal que para cada fórmula  $+_1 W$  en  $E_{p+1}$  se tiene que  $Z$  y  $W$  están en  $G_p$ , y, por lo tanto,  $G_p$  es  $+_1$ -subordinado de  $E_{p+1}$ .

Para la parte 2 supóngase que  $F_{p+1}$  es  $+_2$ -subordinado de  $E_{p+2}$  y  $G_p$  es  $+_1$ -subordinado de  $E_{p+1}$ . Como  $G_p$  es  $+_1$ -subordinado de  $E_{p+1}$ , entonces existe en  $E_{p+1}$  una fórmula  $\bullet_1 Z$  tal que  $Z$  está en  $G_p$  y  $Z$  es de tipo  $-p$ . Como  $\bullet_1 Z$  está en  $E_{p+1}$ , es decir,  $-_1 \sim Z$  está en  $E_{p+1}$  y también en  $E_{p+2}$ , utilizando  $A \times E_{-1} \sim Z \rightarrow \neg_2 +_1 \sim Z$  resulta que  $\neg_2 +_1 \sim Z$  está en  $E_{p+2}$ , lo cual significa que  $+_2 \bullet_1 Z$  está en  $E_{p+2}$ , y como  $F_{p+1}$  es un  $+_2$ -subordinado de  $E_{p+2}$ , entonces  $\bullet_1 Z$  está en  $F_{p+1}$ .

Supóngase que  $+_1 W$  está en  $F_{p+1}$  con  $W$  de tipo  $-p$ . Si  $+_1 W$  no está en  $E_{p+1}$ , entonces  $\sim +_1 W$  está en  $E_{p+1}$ , es decir,  $-_1 W$  está en  $E_{p+1}$ , y también en  $E_{p+2}$ ; utilizando  $A \times E_{-1} W \rightarrow \neg_2 +_1 W$ , se infiere que  $\neg_2 +_1 W$  está en  $E_{p+2}$ , o sea que  $+_2 \sim +_1 W$  está en  $E_{p+2}$ , pero al ser  $F_{p+1}$   $+_2$ -subordinado de  $E_{p+2}$  se tiene que  $\sim +_1 W$  está en  $F_{p+1}$ , lo cual es imposible ya que  $F_{p+1}$  es consistente, y, por lo tanto,  $+_1 W$  está en  $E_{p+1}$ , y como  $G_p$  es  $+_1$ -subordinado de  $E_{p+1}$ , entonces  $W$  está en  $G_p$ . Se concluye que, para cada  $+_1 W$  en  $F_{p+1}$  resulta que  $W$  está en  $G_p$ . En resumen, existe una fórmula  $\bullet_1 Z$  en  $F_{p+1}$  tal que para cada fórmula  $+_1 W$  en  $F_{p+1}$  se tiene que  $Z$  y  $W$  están en  $G_p$ , y, por lo tanto,  $G_p$  es  $+_1$ -subordinado de  $F_{p+1}$ .

Para la parte 3, en el sistema  $LER-n$  sea  $F$  una extensión consistente y completa de  $LER-n$ , y sea  $X$  de tipo  $-p$ , con  $p < n-1$ , un axioma de  $CP$ , por lo que en  $LER-p$  se tiene  $X$ , y por  $A \times A \times$  en  $LER-(p+1)$  también se tiene  $X$ , y como  $+$  es de tipo  $-r$  y  $p \leq r$ , por  $A \times R$ , se tiene  $X \rightarrow \bullet X$ , derivándose  $\bullet X$ , por lo que  $X$  y  $\bullet X$  están en  $F$ , resultando que  $\bullet X$  está en  $F_{p+1}$  y  $X$  está en  $F_p$ . Supóngase que  $+W$  está en  $F_{p+1}$ , con  $W$  de tipo  $-p$ , por  $A \times R$  en  $F_{p+1}$  se tiene  $\sim W \rightarrow \bullet \sim W$ , es decir,  $+W \rightarrow W$ , resultando que  $W$  también

está en  $F_{p+1}$ , y como  $W$  es de tipo- $p$ , entonces  $W$  está en  $F_p$ . Por lo tanto,  $F_p$  es +-subordinada de  $F_{p+1}$ .

Para la parte 4, supóngase que  $G_{n-1}$  es +-subordinado de  $F_n$  donde  $1 < n$ , + es de tipo- $r$  y  $n - 1 \leq r$ . Si la conclusión fuese falsa, debe existir un  $q$  máximo tal que,  $q < n - 1 \leq r$  y  $G_q$  no es +-subordinado de  $F_{q+1}$ .

En el caso del sistema  $LER-n$  se sabe que  $Q \rightarrow Q$ , donde  $Q$  es una fórmula atómica, está en  $LER-1$ , por  $A \times R$ ,  $\bullet(Q \rightarrow Q)$  está en  $LER-2$ , resultando que  $\bullet(Q \rightarrow Q)$  está en  $F_2$  y  $Q \rightarrow Q$  está en  $G_1$ , de nuevo por  $A \times R$ ,  $\bullet\bullet(Q \rightarrow Q)$  está en  $F_3$  y  $\bullet(Q \rightarrow Q)$  está en  $G_2$ , y continuando de esta manera se construye una fórmula  $Z$  de tipo- $q$  tal que  $\bullet Z$  está en  $F_{q+1}$  y  $Z$  está en  $G_q$ .

En el caso del sistema  $LDR-n$  se sabe que  $Q \rightarrow Q$  donde  $Q$  es una fórmula atómica está en  $LDR-1$ , por  $A \times +$ ,  $+(Q \rightarrow Q)$  está en  $LDR-2$ , y por  $A \times S$ ,  $\bullet(Q \rightarrow Q)$  está en  $LDR-2$ , y de nuevo por  $A \times +$  y  $A \times S$ ,  $\bullet\bullet(Q \rightarrow Q)$  está en  $LDR-3$  y  $\bullet(Q \rightarrow Q)$  está en  $LDR-2$ , y continuando de esta manera se construye una fórmula  $Z$  de tipo- $q$  tal que  $\bullet Z$  está en  $LDR-(q + 1)$  y  $Z$  está en  $LDR-q$ , concluyéndose que existe una fórmula  $Z$  de tipo- $q$  tal que  $\bullet Z$  está en  $F_{q+1}$  y  $Z$  está en  $G_q$ .

Se tiene entonces que en  $LR-n$  existe una fórmula  $Z$  de tipo- $q$  tal que  $\bullet Z$  está en  $F_{q+1}$  y  $Z$  está en  $G_q$ , y como  $G_q$  no es +-subordinado de  $F_{q+1}$ , entonces debe existir una fórmula  $W$  de tipo- $q$  tal que  $+W$  está en  $F_{q+1}$  y  $W$  no esté en  $G_q$ . Si  $+W$  está en  $F_{q+1}$ , al ser de tipo- $(q + 1)$   $+W$  está en  $F_{q+2}$ , y también por  $A \times T - \neg \sim W \rightarrow \bullet \sim W$  está en  $F_{q+2}$ , es decir,  $+W \rightarrow ++W$  está en  $F_{q+2}$ , resultando que  $++W$  está en  $F_{q+2}$ ; como  $q$  es máximo tal que  $G_q$  no es +-subordinado de  $F_{q+1}$ , resulta que  $G_{q+1}$  es +-subordinado de  $F_{q+2}$ , y entonces  $+W$  está en  $G_{q+1}$ , y se sabe por la parte 3 que  $G_q$  es +-subordinado de  $G_{q+1}$ , por lo que  $W$  está en  $G_q$ , lo cual no es el caso. Por lo tanto, para cada  $q$ , con  $1 \leq q < n$ , se tiene  $G_q$  es +-subordinado de  $F_{q+1}$ , donde  $1 < n$ .

Para la parte 5, en los sistemas  $LER-n$  y  $LDR-n$ , como se muestra en la parte 4, existe  $X$  de tipo- $q$  tal que  $\bullet X$  está en  $E_{q+1}$  cuando + es de tipo- $r$  y  $q \leq r$ ; por la proposición 6.4, numeral 2, se infiere la existencia de una extensión consistente y completa  $F$  tal que  $F_q$  es +-subordinada de  $E_{q+1}$ .  $\square$

**Proposición 6.6** (Construcción de un  $n$ -modelo). *Si  $E'$  es una extensión consistente de  $LR-n$ , entonces existe un  $n$ -modelo en el cual todo teorema de  $E'$  es verdadero.*

**Prueba.** Se define el candidato a  $n$ -marco  $(S_n, ME_n, RA)$  de la siguiente manera: sean  $E, F, G, \dots$ , extensiones consistentes y completas de  $E'$  ( $E_n$  la inicial y las demás subordinadas), presentadas en las proposiciones 6.2 y 6.4. A cada extensión  $F$ , es decir,  $F_n$ , se le asocia un mundo posible  $MF$ , es decir,  $MF_n$ , y a cada extensión encajada  $F_k$  de  $F$  se le asocia un mundo posible encajado  $MF_k$  de  $MF$ , sean  $S_n$  el conjunto de tales mundos posibles y  $ME_n$  el mundo actual. Las relaciones de accesibilidad  $R$  del conjunto  $RA$  se construyen así:  $MF_{t+1}RMG_t$  si y solamente si  $G_t$  es  $+$ -subordinado de  $F_{t+1}$ .

Para afirmar que  $(S_n, ME_n, RA)$  es un  $n$ -marco, se deben garantizar las correspondientes restricciones. La restricción  $RMa$  se encuentra garantizada por la proposición 6.2, la restricción  $RE <$  se encuentra garantizada por la definición de encajado y la proposición 6.4 numeral 1,  $RA$  por la definición de  $+$ -subordinado,  $RAE <$  por la proposición 6.5, numeral 4,  $RR$  por la proposición 6.5, numeral 3,  $RE$  por la proposición 6.5, numeral 2,  $RT$  por la proposición 6.5, numeral 1, y  $RS$  por la proposición 6.5, numeral 5.

Asociado al  $n$ -marco  $(S_n, ME_n, RA)$  se define el candidato a  $n$ -modelo  $M = (S_n, ME_n, RA, V)$  sobre las fórmulas de  $LR$ - $n$  haciendo para cada  $MF_k$  en  $S_n$  y para cada fórmula  $X$  de tipo- $t$  donde  $1 \leq t \leq k \leq n$ ,  $V(MF_k, X) = 1$  si  $X$  está en  $F_k$ , y  $V(MF_k, X) = 0$  si  $\sim X$  está en  $F_k$ , donde  $F_k$  es la extensión consistente y completa asociada a  $MF_k$ . Nótese que  $V$  es una relación funcional por ser  $F_k$  consistente y completa. Ahora bien, ya que  $F_k$  es consistente, entonces  $V(MF_k, X) \neq V(MF_k, \sim X)$  y, por lo tanto,  $V(MF_k, X) = 1 \Leftrightarrow V(MF_k, \sim X) = 0$ , por lo que se satisface la definición  $V \sim$ . Para afirmar que  $M$  es un  $n$ -modelo, se debe garantizar que para cada uno de los conectivos,  $V$  satisface la definición de valuación.

Para el caso del condicional, sea  $X \rightarrow Y$  una fórmula de tipo- $t$  donde  $1 \leq t \leq k \leq n$ . Utilizando  $LCP$  se tiene la siguiente cadena de equivalencias:  $V(MF_k, X \rightarrow Y) = 0$ , es decir,  $\sim(X \rightarrow Y)$  está en  $F_k$ , o sea que  $X \wedge \sim Y$  está en  $F_k$ , resultando que  $X$  y  $\sim Y$  están en  $F_k$ , lo cual significa que  $V(MF_k, X) = 1$  y  $V(MF_k, Y) = 0$ , por lo que se satisface la definición  $V \rightarrow$ . Para los demás conectivos binarios se procede de igual forma.

Para el caso de la regla  $V+$ , donde  $1 \leq p < n$ ,  $MF_{p+1}$  es un mundo asociado a  $F_{p+1}$ ,  $MG_p$  es un mundo asociado a  $G_p$  y  $Z$  es una fórmula de tipo- $p$ . Supóngase que  $V(MF_{p+1}, +Z) = 1$ , por lo que  $+Z$  está en  $F_{p+1}$ . Si  $MF_{p+1}RMG_p$ , entonces  $G_p$  es subordinada de  $F_{p+1}$  y  $Z$  está en  $G_p$ , resultando

que  $V(MG_p, Z) = 1$ . Se ha probado de esta manera que  $V(MF_{p+1}, +Z) = 1 \Rightarrow (\forall MG_p \in S_n)(MF_{p+1}RMG_p \Rightarrow V(MG_p, Z) = 1)$ .

Para probar la recíproca, supóngase que  $(\forall MG_p \in S_n)(MF_{p+1}RMG_p \Rightarrow V(MG_p, Z) = 1)$ . Si  $V(MF_{p+1}, +Z) = 0$ , entonces al ser  $MF_{p+1}$  el mundo asociado a la extensión consistente y completa  $F_{p+1}$  resulta que  $\sim +Z$  está en  $F_{p+1}$ , por lo que  $\sim + \sim Z$ , es decir,  $\bullet \sim Z$  está en  $F_{p+1}$ . Por la proposición 6.4, numeral 2, existe una extensión consistente y completa  $G_p$  subordinada de  $F_{p+1}$  tal que  $\sim Z$  está en  $G_p$ . Como  $MG_p$  es el mundo asociado a  $G_p$ , entonces  $MF_{p+1}RMG_p$ , lo cual, por el supuesto inicial implica  $V(MG_p, Z) = 1$ , es decir,  $Z$  está en  $G_p$ , resultando que  $G_p$  es inconsistente, lo cual no es el caso. Por lo tanto,  $V(MF_{p+1}, +Z) = 1$ . Se ha probado de esta manera que  $(\forall MG_p \in S_n)(MF_{p+1}RMG_p \Rightarrow V(MG_p, Z) = 1) \Rightarrow V(MF_{p+1}, +Z) = 1$ .

Para el caso de la regla  $VP$ , sea  $X$  una fórmula de profundidad  $-p$ , con  $1 \leq p \leq n$ ,  $MF_p$ , el mundo asociado a la extensión  $F_p$ , y para cada  $t$ , con  $p \leq t \leq n$ , sea  $MF_t$  el mundo asociado a la extensión  $F_t$ .  $V(MF_p, X) = 1$  si y sólo si  $X$  está en  $F_p$ , como  $X$  es de profundidad  $-p$ , lo anterior es equivalente a  $X$  está en  $F_t$  donde  $p \leq t \leq n$ , pero  $X$  está en  $F_t$  si y sólo si  $V(MF_t, X) = 1$ . Por lo tanto, para cada  $t$ , con  $p \leq t \leq n$ ,  $V(MF_p, X) = V(MF_t, X)$ .

Con base en el análisis anterior, y teniendo en cuenta la forma en que se construye el modelo, se concluye finalmente que  $V$  es una valuación, y, por lo tanto,  $M$  es un  $n$ -modelo.

Para finalizar la prueba, sea  $X$  un teorema de  $E'$ , por lo que  $X$  está en  $E_n$ . Por lo tanto, utilizando la definición de  $V$ , resulta que  $V(ME_n, X) = 1$ , es decir,  $X$  es verdadera en el  $n$ -modelo  $M = (S_n, ME_n, R, V)$ .  $\square$

**Proposición 6.7** (Compleitud de  $LER-n$  y de  $LDR-n$ ). *Para cada fórmula  $X$  de profundidad  $-n$ , con  $n \geq 1$ . Si  $X$  es  $n$ -válida entonces  $X$  es un teorema de  $LR-n$ .*

**Prueba.** Sea  $X$  una fórmula de  $LR-n$ . Si  $X$  no es un teorema, entonces, por la proposición 6.1, numeral 3, la extensión  $E'$ , obtenida añadiendo  $\sim X$  como nuevo axioma, es consistente. Así pues, según la proposición 6.6, existe un  $n$ -modelo  $M$  tal que todo teorema de  $E'$  es verdadero en  $M$ , y como  $\sim X$  es un teorema de  $E'$ , entonces  $\sim X$  es verdadero en  $M$ , es decir,  $X$  es falso en  $M$ , y, por lo tanto,  $X$  no es  $n$ -válida. Se ha probado de esta forma que, si  $X$  no es un teorema de  $LR-n$  entonces  $X$  no es  $n$ -válida, o dicho de otra manera, si  $X$  es  $n$ -válida entonces  $X$  es un teorema de  $LR-n$ .  $\square$

**Proposición 6.8** (Completitud de  $LER$  y de  $LDR$ ). *Para cada fórmula  $X$ , si  $X$  es válida entonces  $X$  es un teorema de  $LR$ .*

**Prueba.** Supóngase que  $X$  es válida y que  $X$  es de profundidad- $p$  arbitraria, por lo que en la construcción de un modelo refutador de la fórmula  $X$ , resulta una cadena inconsistente de mundos posibles  $C = M_a M_{a-1} \dots M_m$  para algún  $m$ , donde  $a \geq p \geq 1$  y  $M_a$  es el mundo actual de profundidad- $a$ , lo cual significa que  $X$  no puede ser refutada por un  $a$ -modelo, es decir,  $X$  es  $a$ -válida. Por la proposición 6.7 se infiere que  $X$  es un teorema de  $LR-a$ , y como los axiomas de  $LR-a$  son axiomas de  $LR$ , se concluye que  $X$  es un teorema de  $LR$ .  $\square$

**Proposición 6.9** (Caracterización semántica de  $LER-n$ ,  $LDR-n$ ,  $LER$ ,  $LDR$ ). *Sea  $X$  una fórmula de profundidad- $n$ .*

1.  $X$  es  $n$ -válida si y solamente si  $X$  es un teorema de  $LR-n$ .
2.  $X$  es válida si y sólo si  $X$  es un teorema de  $LR$ .

**Prueba.** La primera parte es consecuencia de las proposiciones 5.3 y 6.7, la segunda se sigue de las proposiciones 5.5 y 6.8.  $\square$

## 7 Conclusiones

Cuando el razonador es lo suficientemente fuerte (el tipo de  $+$  mayor o igual que el tipo de  $X$ ), con el axioma  $A \times R$  se garantiza que las certezas sean verdaderas:  $+X \mapsto X^5$ , que las imposibilidades sean falsas:  $\neg X \mapsto \sim X$ , que las verdades sean posibles:  $X \mapsto \bullet X$ , que las falsedades sean refutables:  $\sim X \mapsto -X$ , y, además, la contraparte semántica de este axioma, es decir, la restricción  $RR$ , permite refutar las recíprocas; con el axioma  $A \times S$  se garantiza que las certezas sean posibles:  $+X \mapsto \bullet X$ , que las imposibilidades sean refutables:  $\neg X \mapsto -X$ , que las contradicciones sean refutables:  $-(X \wedge \sim X)$ , y, además, la contraparte semántica de este axioma, es decir, la restricción  $RS$ , permite refutar las recíprocas.

---

<sup>5</sup> $X \mapsto Y$  significa que  $X \rightarrow Y$ , pero no siempre  $Y \rightarrow X$ .

En los sistemas  $LER-n$ , con el axioma  $A \times T$ , al cual semánticamente le corresponde la restricción  $RT$ , se garantiza que refutar una certeza es una imposibilidad:  $\neg_2 \neg_1 X \leftrightarrow +_1 X$ , y que la posibilidad de una fórmula imposible es una imposibilidad:  $\neg_2 \bullet_1 X \leftrightarrow \neg_1 X$ . Con el axioma  $A \times E$ , al cual semánticamente le corresponde la restricción  $RE$ , se garantiza que la posibilidad de una fórmula posible es una certeza:  $+_2 \bullet_1 X \leftrightarrow \bullet_1 X$ , y que refutar una fórmula refutable es una certeza:  $+_2 \neg_1 X \leftrightarrow \neg_1 X$ .

Con el axioma  $MP+=$ , al cual semánticamente le corresponde la regla  $V+$ , se garantiza que si un condicional y su antecedente son certezas, entonces su consecuente también es una certeza cuando en  $X \rightarrow Y$  el antecedente y el consecuente son del mismo tipo:  $[+(X \rightarrow Y) \wedge +X] \rightarrow +Y$ ; y que si una disyunción es certeza y un disyunto es refutable, entonces el otro disyunto es posible:  $[+(X \vee Y) \wedge -X] \rightarrow \bullet Y$  cuando los disyuntos son del mismo tipo. Con el axioma  $MP+<$ , al cual semánticamente le corresponde la regla  $V+$  y a la restricción  $RAE<$ , se garantiza que si un condicional y su antecedente son certezas, entonces su consecuente también es una certeza cuando en  $X \rightarrow Y$  el tipo del antecedente es menor que el tipo del consecuente:  $[+(X \rightarrow Y) \wedge +X] \rightarrow +Y$ ; y que si una disyunción es una certeza y el disyunto de tipo superior es refutable, entonces el otro disyunto es posible:  $[+(X \vee Y) \wedge -Y] \rightarrow \bullet X$ .

Tal como lo presenta Chellas en *Modal logic: an introduction* [20], el sistema de lógica modal  $S5$  puede ser construido adicionando al cálculo proposicional clásico los axiomas  $A \times T$  y  $A \times E$  restringidos a un mismo razonador, los axiomas  $MP+<$  y  $A \times R$  sin restricciones y la regla de construcción de certezas, de  $X$  se infiere  $+X$ , presentada en la proposición 5.1 y el axioma  $A \times +$ . Por esta razón, los sistemas  $LER-n$ , con  $n \geq 3$  y  $LER$ , pueden ser considerados como extensiones del sistema  $S5$  generalizado y con diversos tipos de restricciones, las cuales se reflejan en la semántica de mundos posibles como restricciones en la profundidad de los modelos y de los mundos, es decir, como restricciones en la longitud de las cadenas de mundos posibles, en la relación de accesibilidad entre ellos y en el lenguaje asociado a los mismos. Por otro lado, se sabe que al quitar de  $S5$  algunos de los axiomas restringidos  $A \times R$ ,  $A \times T$  y  $A \times E$ , se generan diversos sistemas intermedios conocidos como  $K$ ,  $KT$ ,  $K4$ ,  $K5$ ,  $KT4$ ,  $KT5$ ,  $K45$ ; observando la presentación de los axiomas, de las reglas semánticas y la estructura de las pruebas presentadas para los sistemas  $LER-n$ , se puede concluir que, asociado a cada uno de estos sistemas



intermedios, se encuentra una jerarquía naturalmente obtenida a partir de los sistemas  $LER-n$ .

De manera similar, los sistemas  $LDR-n$ , con  $n \geq 3$  y  $LDR$ , pueden ser considerados como extensiones del sistema  $KD45$  generalizado y con diversos tipos de restricciones; y también se puede concluir que, asociado a cada uno de los sistemas intermedios  $KD, KD4$  y  $KD5$ , se encuentra una jerarquía naturalmente obtenida a partir de los sistemas  $LDR-n$ .

Observar que las restricciones en el lenguaje de los sistemas (al limitar la aplicabilidad de las reglas de creencia), y las restricciones en el tipo de los razonadores (al limitar las consecuencias del conocimiento de algunos razonadores), le imponen al problema de la omnisciencia lógica ciertos límites. Por ejemplo, en el sistema  $LR-4$ , un razonador de tipo-2 no siempre puede hacer inferencias cuando se involucran fórmulas de tipo-3, mientras que un razonador de tipo-3 o superior sí puede hacerlas, sin embargo, ningún razonador puede hacer inferencias sobre fórmulas de tipo-4.

Finalmente, es importante señalar que las restricciones impuestas, por los axiomas  $MP+<$  y  $MP+=$ , pueden ser relajadas para los razonadores con suficiente capacidad deductiva, es decir, del tipo adecuado, adicionando  $MP+>$ :  $+(A \rightarrow B) \rightarrow (+A \rightarrow +B)$  es un axioma de  $LR-(n+1)$ , donde  $A$  es de tipo- $a$ ,  $B$  es de tipo- $b$ ,  $+$  es de tipo- $r$ ,  $1 \leq b < a \leq n$  y  $a \leq r$ ; este axioma es validado semánticamente por las restricciones  $RE>$  (*restricción de encaje externo*): si  $R$  es de tipo- $r$ ,  $r > p$ ,  $K_{p+1}RF_p$  y  $K_{p+2}$  existe, entonces existe  $F_{p+1}$ , y  $RAE>$  (*restricción de accesibilidad encajada externa*): si  $R$  es de tipo- $r$ ,  $r > p$ ,  $K_{p+1}RF_p$ ,  $K_{p+2}$  existe y  $F_{p+1}$  existe, entonces  $K_{p+2}RF_{p+1}$ .

## Referencias

- [1] Jaakko Hintikka, Vincent F. Hendricks and John Symons. *Knowledge and Belief - An Introduction to the Logic of the Two Notions*, ISBN 9781904987086. College Publications, 2005. Referenciado en 83
- [2] Saul A. Kripke. *Semantical analysis of modal logic*. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, ISSN 0044-3050, **9**, 1963. Referenciado en 83
- [3] Jaakko Hintikka. *Impossible possible worlds vindicated*. Journal of Philosophical Logic, ISSN 0022-3611, **4**(3), 475-484 (1975). Referenciado en 83

- [4] Kwang Mong Sim. *Epistemic logic and logical omniscience: a survey*. International journal of intelligent systems, ISSN 0884–8173, **12**, 57–81 (1997). Referenciado en 83
- [5] Max J. Cresswell. *Logics and languages*, ISBN 0416769500. Egmont Childrens Books, 1973. Referenciado en 83
- [6] Nicholas Rescher and Robert Brandon. *The logic of inconsistency*, ISBN 0631115811. Rowman and Littlefield, 1979. Referenciado en 83
- [7] Hector J. Levesque. *A logic of implicit and explicit belief*, En Proceedings of National Conference on Artificial Intelligence, ISBN 978–0865760806, 198–202 (1984). Referenciado en 83
- [8] Ross Anderson and Nuel Belnap. *Entailment: The Logic of Relevance and Necessity*, ISBN 978–0691071923. Princeton University Press, **1**, 1990. Referenciado en 84
- [9] Gerhard Lakemeyer. *Tractable meta-reasoning in propositional logics of belief*. En Proceedings of the 10th international joint conference on Artificial intelligence, **1**, 402–408 (1987). Referenciado en 84
- [10] Ronald Fagin and Joseph Halpern. *Belief, awareness and limited reasoning*. Artificial Intelligence, ISSN 0004–3702, **34**(1), 1987. Referenciado en 84
- [11] Marco Schaerf and Marco Cadoli. *Tractable reasoning via approximation*. Artificial Intelligence, ISSN 0004–3702, **74**(2), 249–310 (1995). Referenciado en 84
- [12] Marcelo Finger and Renata Wassermann. *Logics for approximate reasoning: Approximating classical logic “from above”*. En Brazilian Symposium on Artificial Intelligence, ISBN 3–540–00124–7, **2507**, 21–30 (2002). Referenciado en 84
- [13] Guilherme Rabelloa and Marcelo Finger. *Approximations of Modal Logics: K and beyond*. Annals of Pure and Applied Logic, ISSN 0168–0072, **152**, 2008. Referenciado en 84
- [14] Kurt Konolige. *A Deduction Model of belief (Research notes in artificial intelligence)*, ISBN 0934613087. Morgan Kaufmann Publishers Inc, San Francisco, CA, USA , 1986. Referenciado en 84
- [15] Dov Gabbay and John Woods. *Handbook of the History of Logic, 7, Logic and the Modalities in the Twentieth Century*, ISBN 9780444516220. Elsevier, 2006. Referenciado en 84
- [16] Manuel Sierra. *Sistemas multi-modales de profundidad restringida*. Ingeniería y Ciencia, ISSN 1794–9165, **4**(8), 175–202 (2008). Referenciado en 84, 85, 103, 104

- [17] Walter Carnielli and Claudio Pizzi. *Modalities and multimodalities*, ISBN 9781402085895. Springer, 2008. Referenciado en 89, 90, 98, 100, 103, 104
- [18] Leon Henkin. *The completeness of the first order functional calculus*. The journal of symbolic logic, ISSN 0022-4812, **14**(3), 159-166 (1949). Referenciado en 104
- [19] David Kaplan. *Review: Saul A. Kripke, Semantical Analysis of Modal Logic I. Normal Modal Propositional Calculi*. The journal of symbolic logic, ISSN 0022-4812, **31**(1), 120-122 (1966). Referenciado en 104
- [20] Brian F. Chellas. *Modal logic: an introduction*, ISBN 978-0521295154. Cambridge University Press, Cambridge, 1980. Referenciado en 112