

*La función cuadrática. Un estudio a través de los libros ...*

## **La función cuadrática. Un estudio a través de los libros de texto de los últimos 40 años en Argentina**

*Por Daniela Roxana Vivas*

### **Sobre la autora**

Daniela Roxana Vivas es Licenciada en Matemática Aplicada, egresada de la Universidad Nacional del Litoral (UNL). Realizó una Especialización como Profesora de Enseñanza Superior de Matemática Aplicada en la Universidad de Concepción del Uruguay. Becada por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la UADER (resolución N° 105/06) para realizar estudios de posgrado. Recientemente fue aprobado su Plan de Tesis para la Maestría en Didácticas Específicas de la UNL. Es co-Directora del proyecto PIDA "La trayectoria del tesista. Un estudio en egresados de la Universidad Autónoma de Entre Ríos". Actualmente se desempeña como docente en las cátedras de Estadística de las carreras de Turismo, Comercio Internacional y Cooperativismo y Mutualismo, y Matemática de las carreras de Economía y Administración de UADER.

## Resumen

Este artículo presenta avances de una investigación que se está llevando a cabo, centrada en el análisis de la forma en que los contenidos, en este caso la función cuadrática, se reflejan en el libro de texto. Se toma como punto de inflexión la reforma educativa que se produce en 1993 con la Ley Federal de Educación.

El libro de texto constituye uno de los pilares básicos sobre los que se sustenta la acción docente y permite estudiar los distintos enfoques que se le ha dado a una disciplina a lo largo de un período de tiempo.

El instrumento de análisis será una adaptación del diseñado por Villella para examinar los libros escolares desde tres dimensiones: la formal, la epistemológica y la didáctica. También se abordará el estudio y tratamiento de la función cuadrática haciendo hincapié en los sistemas de representación utilizados en los textos.

## 1. Introducción

Este artículo presenta algunos avances de una investigación, todavía en desarrollo, cuyo principal objetivo es analizar libros de texto publicados antes y después de la sanción de la Ley Federal de Educación, teniendo como eje central el concepto de función cuadrática.

La función cuadrática es una función polinómica de segundo grado que puede escribirse de la siguiente forma:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son números reales cualesquiera con la condición de que  $a \neq 0$ .

La función cuadrática es tomada como centro por dos motivos: primero, porque es uno de los ejes conductores de la Matemática en el último ciclo de la secundaria y la importancia asignada al concepto se extiende incluso más allá de este nivel. En segundo lugar, por la relevancia que tienen las funciones cuadráticas debido a la diversidad de fenómenos en los que el concepto está involucrado, como por ejemplo, la caída de los cuerpos en Física y las antenas parabólicas, las lámparas y los lentes en Ingeniería.

Este estudio busca caracterizar la dimensión formal de los textos analizados, describir elementos que permitan visualizar la concepción de la Matemática que sustentan los autores; analizar la tendencia didáctica que predomina en el tratamiento de la función cuadrática y caracterizar el tratamiento de dicha función a partir del uso que se realiza de los

diversos sistemas de representación.

## **2. El libro: su relevancia y función**

El libro de texto constituye uno de los pilares básicos sobre los que se sustenta la acción docente en cualquier nivel educativo y, muy a menudo, se transforma en el referente exclusivo del saber científico, tanto para los profesores como para los alumnos (Vilella, 2001). Por esta razón, las investigaciones sobre libros de texto se han convertido en un método eficiente para el estudio de los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

Estos textos permiten estudiar los distintos enfoques que se le ha dado a una disciplina a lo largo de un período de tiempo. Las actividades y el estilo de presentación de los contenidos marcan una postura teórica respecto del proceso de enseñanza y aprendizaje que condiciona la práctica cotidiana.

Además, el libro de texto ejerce diferentes roles: puede ser mirado como un objeto de estudio, como material de consulta, como registro de las actividades del alumno, como una recopilación de ejercicios propuestos y problemas por resolver, etc.

Para muchos docentes, la elección de un libro de texto supone su decisión curricular más importante, por lo que no es raro que este instrumento ejerza un efecto poderoso sobre sus enfoques de enseñanza y sobre las estrategias de aprendizaje de los alumnos. Es posible decir que "a través del análisis de los libros de texto en relación con el saber y los roles que le asignan al docente y al alumno mediante sus propuestas de trabajo, se pueden encontrar elementos que coadyuvan a la caracterización del conocimiento profesional de los docentes de matemática" (Vilella, 2007, p.167).

La producción abundante de libros de texto, la variedad y riqueza de sus contenidos, la incidencia en el aula de este material y su función como transmisor de contenidos socialmente aceptados, hacen que resulte interesante estudiar la contribución que han tenido en la historia de la educación matemática.

Por eso, este estudio se justifica por la significación que tiene el libro de texto como recurso didáctico. En el Informe Cockroft se sostiene que "los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula" (1985, p.113).

La importancia del libro de texto como recurso básico para el profesor,

se refleja en la cantidad de investigaciones que en torno a éste se han desarrollado en los últimos años y que han puesto claramente de manifiesto la influencia de los mismos en la actividad que se desarrolla en el aula. Es decir, los docentes sustentan gran parte de sus prácticas en los libros escolares de matemática que recomiendan usar a sus alumnos y muchas veces, que ellos usan.

Los libros se constituyen en artefactos culturales y la elección editorial que se hace de los mismos, además de la generalizada práctica del aula basada en trabajos preparados para los alumnos, van determinando lo que se debe aprender.

Rico (1990, citado en Godino, 2003, p.125) señala que "el libro supone un gran esfuerzo de síntesis, planificación, estructuración y acomodación de contenidos, por encima de la capacidad del profesor medio, se considera el paradigma del conocimiento que hay que transmitir".

A su vez, en los trabajos de Chevallard (1985) y sus colaboradores (Chevallard y Joshua, 1982), citado en González Astudillo y Sierra Vázquez (2004, p. 390), se utiliza la noción de transposición didáctica relativa a las transformaciones entre el saber sabio y el saber enseñado y entre los que existe un escalón intermedio correspondiente al saber enseñar, que se refleja en el texto del saber. Lo más próximo a este texto del saber, o saber a enseñar, es el libro de texto, cuyo contenido y estructura reflejan esas transformaciones del saber sabio.

Por su parte, para Ortiz de Haro (1999, citado en Cobo Merino y Batanero, 2004, p. 6) "un libro de texto se considera como un segundo nivel de transposición didáctica" (el primer nivel estaría formado por los currículos y programas oficiales). Sostiene además que, si en un texto aparece un significado sesgado, éste puede llegar a transmitirse a los alumnos y por lo tanto el profesor debería mantener una permanente vigilancia epistemológica sobre el contenido de los libros de texto.

### **3. El libro en el campo de las Matemáticas**

En el campo de la educación matemática se han realizado en los últimos veinte años muchas investigaciones en torno a los libros de texto, particularmente en Europa. Para hacer este recorrido se destaca a Schubring (1987), citado en González Astudillo y Sierra Vázquez (2004), quien realizó una investigación de carácter histórica basada en textos

antiguos de matemática, lo cual le permitió extraer información sobre la difusión y evolución de los saberes en una época determinada, como así también interpretar fenómenos que tienen relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Este investigador considera necesaria una aproximación global que analice, en primer lugar, los cambios en las sucesivas ediciones de un libro de texto, para pasar luego a buscar los cambios en otras obras. Por último, relacionar estos cambios con los que se han producido en el contexto, es decir, cambios en los programas, en los decretos ministeriales, en los debates didácticos, en la evolución de las matemáticas, en la epistemología, etc.

En los trabajos de autores, ya mencionados, como Chevallard (1985) y Chevallard y Joshua (1982) (citados en Sierra Vázquez, González Astudillo y López Esteban, 1999, p. 464) aparece la noción de la "transposición didáctica", es decir, la transformación de la matemática (*savoir savant*) en el contenido escolar (*savoir enseigné*), que se refleja fundamentalmente en los libros de texto. Estos deben transformar el "saber sabio" en "saber enseñado", accesible a los alumnos, reduciendo el contenido matemático, simplificando su presentación y tratando de buscar ejemplos que motiven a los alumnos y sean comprensibles por ellos. La transposición didáctica también se refleja en el lenguaje que se utiliza en los libros de texto.

Además del análisis del contenido de las obras, se han abordado cuestiones como el control oficial de los textos y, en general, las políticas nacionales referidas a los programas de estudio y a la confección de los libros. Incluso en el estudio del pasado más reciente, esta problemática ha mantenido vigencia, como en el caso de los análisis sobre el papel de los textos escolares en regímenes populistas o dictatoriales.

Por ejemplo, en 1992 se inició en España el proyecto interuniversitario de investigación sobre los Manuales Escolares Españoles (MANES), con sede en el Departamento de Historia de la Educación y Educación Comparada de la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED) (Ossenbach Sauter, 2004). Varias universidades latinoamericanas mostraron su interés por la temática y establecieron convenios de adhesión al proyecto. Las primeras que se sumaron fueron las de Cuyo (Argentina), Antioquia (Colombia) y Nacional Autónoma (México).

Para impulsar los vínculos con América Latina, el proyecto MANES

organizó en Madrid, en septiembre de 1996, un seminario que reunió a participantes de seis países, bajo el título "Los manuales escolares como fuente para la historia de la educación en América Latina. Un análisis comparativo". La convocatoria tenía el fin de sondear entre los investigadores latinoamericanos el interés por la temática, enfocada desde las más diversas perspectivas, épocas y aspectos de la enseñanza.

Al finalizar dicho encuentro existió unanimidad respecto al interés de continuar en esa línea de investigación y constituir un grupo interamericano con objetivos similares a los del proyecto español, que trabajase en coordinación con el mismo. A partir de esa fecha se adhirieron al proyecto las universidades argentinas de Luján, La Pampa, Comahue, Nordeste, La Plata, Buenos Aires y Entre Ríos.

Entre las universidades argentinas podemos destacar las siguientes investigaciones:

- Universidad Nacional de Cuyo: Investigación sobre libros argentinos de Educación Moral y Cívica, Francés e Historia, entre otros.
- Universidad Nacional de Luján: Historia de la enseñanza de la lectura y la escritura en Argentina.
- Universidad de La Pampa: Textos para la enseñanza de la Historia en Argentina.
- Universidad Nacional del Comahue: Libros de texto que circularon en el territorio nacional de Río Negro y Neuquén.
- Universidad Nacional del Nordeste: La incidencia de los libros de texto en las representaciones sobre el mundo aborigen en el territorio nacional del Chaco.
- Universidad Nacional de La Plata: La enseñanza de la Filosofía y de la Historia en los manuales para la escuela media argentina.
- Universidad de Buenos Aires: La enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales y la construcción de la modernidad escolar en Argentina.

En nuestro país son pocos los trabajos realizados sobre el análisis de libros de textos de Matemática. Podemos mencionar dos de ellos, publicados en la Revista Iberoamericana de Educación: uno, elaborado por Abrate, Delgado y Pochulu (2006), de la Universidad Nacional de Villa María, Córdoba, quienes abordaron la caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. El otro, un trabajo de Oliver, Rocerau, Valdez y otros (2003), de la Universidad Nacional de Mar del Plata, que analizó del tratamiento de algunos temas de Geometría en textos escolares para el Tercer Ciclo de

la Educación General Básica.

Por otro lado, se destacan dos tesis. Una de ellas es la de María Pekolj (2006), para obtener el título de Magíster, titulada "El concepto de límite y su puesta en texto. Una mirada histórica y epistemológica". La otra, en la Universidad Nacional del Litoral, "Lo relativo en la Matemática. El caso de la proporcionalidad en el 3° Ciclo de la EGB", de Beatriz Vega (2007), en la que se lleva a cabo un análisis de un libro de texto con la finalidad de describir el tratamiento que en él se realiza de la proporcionalidad.

#### **4. Revisión histórica del concepto de función cuadrática**

Mesa, Y. y Villa, J. son investigadores de la Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia y realizaron un rastreo histórico a través de fuentes primarias y secundarias. Estos autores sostienen que las nociones asociadas a lo "cuadrático" atravesaron por lo menos cuatro momentos: las ecuaciones, las cónicas, la cinemática y las funciones.

El concepto de ecuación es uno de los más importantes del análisis matemático actual, y ha estado presente a través de la historia en diversas culturas. En Babilonia las "nociones cuadráticas" se encontraron asociadas a situaciones en donde el concepto de cuadrado tenía una concepción aritmética con ciertos niveles básicos de generalización.

En Grecia, los griegos marcaron un hito aún más especial en la construcción de las nociones cuadráticas. Se puede hablar en la cultura griega de dos aspectos: uno de carácter aritmético y el otro geométrico. Con respecto al primero, la escuela pitagórica establece razonamientos numéricos para sucesiones y progresiones, haciendo una articulación con la geometría en relación con los números figurados. Se observa también en sus trabajos cierta captación de algunas variaciones y predicciones a través de pequeños incrementos. Por su parte, lo geométrico, tiene como representante a Euclides (330 a.C. - 275 a.C.) quien en los *Elementos*, en el libro I, ofrece una noción más estructurada del concepto de cuadrado. El cuadrado se da a conocer en los siguientes términos: "...entre las figuras cuadriláteras, el cuadrado es equilátero y equiángulo..." (Extraído del libro "Elementos. Libros I-IV". Euclides).

En su trabajo, Euclides evidencia los vínculos entre la aritmética y la geometría dado que la noción de cuadrado aparece como figura y área a la vez.

Como consecuencia de la aparición de las magnitudes

inconmensurables, los griegos no podían reconocer la existencia de números irracionales, lo que les dificultaba el tratamiento numérico de longitudes, áreas, volúmenes y ángulos. Esta limitación operacional junto a un deficiente sistema de numeración que utilizaba las letras del alfabeto para representar los números enteros, con la consiguiente dificultad para realizar las operaciones, impedía asignar a las figuras geométricas números que midieran sus longitudes, áreas y volúmenes, por tanto los griegos tenían que calcular directamente con las figuras, que se trataban como magnitudes. El abismo infranqueable que se había abierto entre número y magnitud continua impedía someter las magnitudes geométricas a manipulaciones algebraicas. En el Libro II de Los Elementos de Euclides, los números son sustituidos por segmentos de recta y las operaciones entre ellos se llevan a cabo mediante construcciones geométricas. Con gran habilidad en la práctica geométrica, los griegos hicieron de su Álgebra Geométrica un poderoso instrumento para la resolución de ecuaciones, mediante el método de la aplicación de las áreas, de ascendencia pitagórica.

Por su parte, los árabes logran darle generalidad a sus procedimientos aritméticos recurriendo a la geometría para demostrar la validez de sus razonamientos. Esto supone un avance hacia la generalidad y permite evidenciar un obstáculo en la concepción de las raíces de una ecuación, ya que éstas eran referidas a segmentos y las cantidades negativas carecen de representación, aunque conocían por influencias hindúes el trabajo con los negativos.

En el recorrido histórico se puede determinar otro momento que cumplió un papel muy importante en la conceptualización de "lo cuadrático". En la cultura griega, llama particularmente la atención la formulación de las secciones cónicas realizadas por Apolonio (262 a.C. - 190 a.C.) quien las estudia aproximándose de una forma sorprendente al estudio de coordenadas. Para él las secciones cónicas eran por definición las curvas formadas por un plano que interseca la superficie de un cono. En su famoso libro *Las cónicas* introdujo términos tan familiares hoy en día como parábola, elipse e hipérbola.

De la literatura revisada se puede inferir que, de no ser por los pocos recursos conceptuales de los que disponía, Apolonio hubiese dado un paso importante hacia la creación de la geometría analítica. Es importante además el significado de "parábola" como equiparación, con lo cual se puede inferir entonces que la concepción cuadrática se refiere a un

proceso también de conversión de áreas.

El siglo XVII se caracteriza por tratar de definir las cónicas como curvas correspondientes a ecuaciones de segundo grado, en  $x$  e  $y$ , por lo que el estudio de los lugares geométricos establece un puente entre la Geometría y el Álgebra, lo que permite asociar curvas y ecuaciones.

Las cónicas, y en particular la parábola, se consideran en la actualidad como referentes importantes de relaciones cuadráticas, sin embargo se observa que históricamente surgieron de forma independiente a las nociones de variación y cambio relativas al concepto de función.

Asimismo, es importante remarcar el continuo vínculo que existió entre las matemáticas y la física, en la cual se puede visualizar procesos de modelización asociados a la explicación de fenómenos de la naturaleza que se convierten en motivo para generar actividad matemática.

Galileo Galilei (1564-1642) realiza importantes aportes a la construcción epistemológica del concepto de "función cuadrática", que se encuentra vinculada de manera explícita a los procesos de modelización de los fenómenos de variación. Un elemento importante en su trabajo es la instauración del método experimental, que puede entenderse como una forma de modelización, con esto pretendía dar explicaciones a fenómenos de variación en la naturaleza.

Con Galileo se inaugura un gran momento para la consolidación del concepto de función cuadrática, estableciendo la ruptura en la concepción de parábola como figura para ser considerada como el resultado del comportamiento de algunas variables. Afirma que la parábola es un punto en movimiento por lo cual podría pensarse a las cónicas como objetos matemáticos que, en relación con el movimiento, permite identificarlas como el producto de la trayectoria de un cuerpo que se mueve de acuerdo a una ley, a un patrón o a una causa. Por lo tanto la gráfica se construye de acuerdo con la relación de la variación entre las cantidades. Así, por ejemplo, una gráfica de caída libre no puede comprenderse como la vertical respecto a la horizontal, sino que ésta debe considerar las variables en juego, en una relación de dependencia que las determina, siendo para este caso importante en la medida en que da cuenta de la variación (o razón de cambio).

Finalmente, se puede observar que el concepto de función como tal, es un concepto con raíces muy antiguas pero con una consolidación muy reciente. Uno de los primeros en cimentar formalmente al concepto de función es Isaac Newton (1643-1727). Este matemático y físico utiliza

el álgebra simbólica y la geometría analítica para construir el cálculo diferencial. En su obra *Los Principia* se encuentra "lo cuadrático" asociado a fenómenos naturales con un carácter más funcional.

En el trabajo de Newton se observa que las situaciones cuadráticas se representan mediante una expresión algebraica para después interpretarse como puntos que relacionan dos magnitudes en una determinada cantidad. Una vez analizado el comportamiento de la curva construida por medio de una ecuación cuadrática, se puede distinguir un tipo de relación unívoca entre cantidades, que posteriormente fue llamada función cuadrática.

Podemos concluir que la revisión histórica muestra "lo cuadrático" como una sinergia entre geometría euclidiana, las cónicas y la geometría analítica, teniendo como objeto de estudio el movimiento.

## 5. Dimensiones para analizar libros de texto

El libro de texto está diseñado y producido para acompañar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el sistema escolar. Su necesidad como instrumento de educación se fundamenta en la concepción de que representa un recurso clave, no sólo para la transferencia de conocimiento y el desarrollo de competencias en los alumnos, sino también porque facilita el acceso a la educación de calidad.

Es importante entonces, definir el término libro de texto o libro escolar, según la noción de Inés Sanz Lerma (1994), como aquellos libros que utilizan habitualmente profesores y alumnos a lo largo del curso escolar en el proceso de enseñanza-aprendizaje de un área de conocimiento.

En la terminología francesa, se suele utilizar el término *manuel scolaire* y en la inglesa los términos *textbook* y *schoolbook* como sus equivalentes, mientras que se utiliza *workbooks* para designar los cuadernos de ejercicios del alumno.

Para analizar los textos y determinar cómo influyen en el proceso de enseñanza definimos tres dimensiones: "la primera impresión que causa al lector el libro que tiene en sus manos, es lo que dimos en llamar la dimensión formal" (Vilella, 2007, p.124). Esta dimensión tiene que ver con analizar la forma en la que el material llega impreso: los colores que se utilizan, la tipografía que se decide para los títulos así como para el resaltado de ideas principales o la enunciación de conceptos claves, las

ilustraciones, la distribución de los contenidos en el índice y la organización de bloques temáticos para su tratamiento, etc. Observaremos si existen organizadores previos, la legibilidad, el tipo de lenguaje que se utiliza, la densidad de información, el uso de material anexo, etc.

Para el estudio de las concepciones de la matemática sostenidas por los autores utilizaremos la "dimensión epistemológica". Tal como afirma Sanz Lerma: "un libro escolar no presenta un saber de modo inocente, sino que presenta toda una visión del mundo que va desde unos determinados tipos de teorías científicas y no de otras, hasta las concepciones ideológicas menos aparentes de la sociedad en que está inmerso" (Sanz Lerma, 1995, p.212). Bajo esta dimensión intentaremos responder ¿Qué es la Matemática? ¿Qué características tiene? ¿Cómo se presenta a los alumnos? ¿Para qué se estudia?

Se considerarán posibles concepciones que puede asumir el autor: el Euclidianismo, el Cuasi-empirismo y el Constructivismo (Vilella 2007, p.127). Para la primera, el conocimiento matemático se toma como eficiencia procedimental memorística. Las Matemáticas constituyen un cuerpo de verdades incuestionables y se presenta a los alumnos como un conjunto de reglas organizadas y de algoritmos. Su finalidad es buscar elementos de aplicación. Además, parece relacionarse con hechos que evolucionan en forma aislada (Vilella, 2007).

Desde el punto de vista del Cuasi-Empirismo, la Matemática es un conocimiento objetivo, absoluto y universal, libre de valores y abstracto. Es un conocimiento estructurado lógicamente y se presenta a los alumnos como un conocimiento estructurado significativamente. Su finalidad es descubrir sus principios básicos, fuente de razonamiento (Vilella, 2007).

Para el Constructivismo, la Matemática resulta un sistema complejo de conceptos, procedimientos y representaciones interconectadas. Se caracteriza por ser un conocimiento revisable, con verdades relativas al contexto en que se trabaja. Se presenta a los alumnos mediante procesos inductivos-deductivos que llevan a las heurísticas y a la resolución de problemas. Su finalidad es el desarrollo intelectual a partir de una construcción antropológica de los conceptos (Vilella, 2007).

Por último, para examinar la "dimensión didáctica" se buscarán elementos que permitan relacionar las particularidades del abordaje de la función cuadrática en cada texto, con las diversas tendencias didácticas descritas por Contreras González (1999), a saber:

a) "La tendencia tradicional": se caracteriza por el uso de la

exposición magistral como técnica habitual y el uso del libro de texto como único material curricular, que contiene la información académica considerada correcta. La enseñanza se funda en la elaboración de un temario de contenidos basado en el producto disciplinar estructurado de acuerdo con la lógica de la disciplina. La asignatura está orientada básicamente a la adquisición de conceptos otorgándole una finalidad exclusivamente informativa. La planificación es cerrada y no da cabida a la consideración de situaciones que se pueden dar en el aula como lugar de interacciones sociales.

El alumno se hace con los conocimientos por el simple hecho de que el profesor se los presente y es el único responsable de los resultados del aprendizaje, en función del grado de sumisión. El alumno se esfuerza en recoger en sus papeles todo aquello que el profesor transmite verbalmente mediante el dictado. El aprendizaje se realiza utilizando la memoria como único recurso. El profesor concibe la evaluación como una actividad que se debe realizar al final de cada una de las partes en las que divide el aprendizaje del alumno, con el único fin de medir su capacidad de retener información a corto plazo y se basa en la aplicación mecánica. El instrumento ideal es el examen. Y en cuanto al diagnóstico inicial de los alumnos suele estar basado exclusivamente en los contenidos previos.

b) "La tendencia tecnológica": el profesor no expone los contenidos en su fase final, sino que simula su proceso de construcción, apoyado en estrategias expositivas, y sigue una programación cerrada con una secuencia que emana de los aspectos estructurales de la disciplina. Interesan tanto los conceptos como los procesos lógicos que los sustentan. La asignatura tiene un carácter informativo y práctico que permite su aplicación en distintos ámbitos de la matemática, otras disciplinas o en la técnica.

El aprendizaje se realiza usando la memoria. Se considera al alumno como el principal responsable del aprendizaje, siempre que el contexto elegido por el profesor sea adecuado. El alumno imita el estilo cognitivo del profesor, pues reproduce el proceso lógico. El examen es el instrumento para medir dicho aprendizaje. El diagnóstico inicial de los alumnos suele estar basado en la detección de errores conceptuales o procedimentales que deberían ser corregidos antes de comenzar la ejecución del proceso.

c) "La tendencia espontaneísta": la enseñanza no requiere de una

planificación, basándose en un diseño abierto tanto de actividades como de recursos a ser utilizados. No interesan tanto los conceptos como los procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia el trabajo escolar. La asignatura posee un carácter formativo con el fin de servir como instrumento para un cambio actitudinal del alumno con respecto al aprendizaje y la vida, como así también, para la adquisición de valores racionales que le permitan conformar una actitud lógica ante los problemas cotidianos.

El profesor piensa que se aprende cuando el objeto de aprendizaje posee un significado para el alumno, produciéndose dicho aprendizaje de manera espontánea, cuando el estudiante está inmerso en situaciones que propician el descubrimiento. El educador concibe la evaluación como un sensor permanente del aprendizaje que le permite reconducirlo en cada momento, enfatizando la importancia del contexto dentro de este proceso. El examen tiene connotaciones de índole psicológica que influyen desfavorablemente en la actividad del alumno y en las relaciones personales dentro del aula. No es, por lo tanto, un buen instrumento para medir la evolución del estudiante. En cuanto al diagnóstico inicial de los alumnos, este se cifra sobre el campo de intereses de aquellos.

d) "La tendencia investigativa": se caracteriza por una propuesta organizada del profesor del proceso que llevarán a cabo los alumnos en la obtención de los saberes a través de la investigación. Interesa tanto la adquisición de conceptos, como el desarrollo de procedimientos y el fomento de actitudes positivas hacia la propia materia y el trabajo escolar en general. La finalidad de la asignatura es dotar al alumno de los instrumentos que le posibiliten el aprendizaje autónomo. Los objetos de aprendizaje no sólo tienen significado, sino la capacidad de ser aplicados a contextos diferentes.

El profesor provoca la curiosidad en los alumnos conduciendo la investigación hacia la consecución de aprendizajes y concibe la evaluación como un sensor permanente del mismo, que le permite reconducirle en cada momento. El examen puede ser un instrumento educativo con el que consigue una doble finalidad: de aprendizaje, en la medida en que es considerado como una actividad individual inserta en el proceso de creación de un conocimiento del alumno, y de control de dicho proceso. En cuanto al diagnóstico inicial, debe poner de relieve todos aquellos aspectos del conocimiento del estudiante (conceptos, actitudes, procedimientos, teoría, concepciones, entre otros) que de una

u otra manera puedan interferir en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

## 6. La función cuadrática y sus sistemas de representación

En el aprendizaje de las matemáticas, el lenguaje tiene un papel fundamental ya que la adquisición de un concepto depende en gran medida de la capacidad de reconocer e interpretar una representación del mismo (Azcarate Jiménez, C; Deulofeu Piquet, J., 2002).

En 1978 Claude Janvier en su tesis doctoral (Deulofeu, J., 2007) planteó la importancia de las representaciones en relación con el concepto de función y la constatación de que el núcleo del trabajo con funciones radica en la interpretación que subyace a cada representación, es decir, en la traducción de una representación a otra.

Comenzamos entonces por identificar cinco sistemas de representación relevantes para la descripción de la función cuadrática: verbal, simbólico, gráfico, geométrico y numérico. (Gómez, P., Carulla, C., 1999). Cada una de estas representaciones permite expresar un fenómeno de cambio, una dependencia entre variables.

El sistema de representación verbal es el que utiliza el lenguaje común para darnos una visión descriptiva y generalmente cualitativa de la relación funcional. Nos permite introducir el análisis fenomenológico de la función cuadrática. Esto es, la diversidad de fenómenos en los que este concepto está involucrado. Allí se encuentran fenómenos propios de la física (como la caída de cuerpos y la optimización de áreas), de la ingeniería (como las antenas parabólicas, las lámparas y los lentes) y propias de lo numérico. Es decir, este sistema tiene que ver con la manera cómo, a partir del lenguaje común, podemos representar funciones tanto del mundo real como del mundo de las matemáticas, para las cuales el modelo que las describe es la función cuadrática o conceptos ligados a ella.

En el sistema de representación simbólico encontramos cuatro formas simbólicas (estándar, canónica, multiplicativa y de foco). Cada una de estas formas involucra una serie de parámetros que determinan características particulares de la función. Los parámetros se encuentran relacionados entre sí. Todas las características gráficas de la función cuadrática encuentran obviamente su expresión en este sistema de representación.

En el sistema de representación gráfico se observan otras

características de la función cuadrática. Allí aparecen diversos elementos (puntos de intersección con los ejes, eje de simetría, vértice, crecimiento, concavidad, variaciones y períodos constantes, máximos, mínimos, etc.) que permiten apreciar el papel de los parámetros mencionados en el párrafo anterior.

El lenguaje gráfico en general constituye una forma de conocimiento y de transmisión de la información y dentro de este lenguaje, las gráficas cartesianas son un excelente instrumento para expresar la dependencia entre dos variables. El conocimiento de este lenguaje, es decir, la capacidad para leer, interpretar y construir gráficas cartesianas, permite establecer la relación existente entre las dos magnitudes representadas, pero al mismo tiempo su conocimiento es un instrumento a través del cual pueden construirse nuevos conceptos como la idea de variación de una función (intervalos de crecimiento, decrecimiento y constantes, etc.).

En el sistema de representación geométrico, es posible apreciar características de la función cuadrática desde la perspectiva de la construcción geométrica de la parábola. Esta construcción se puede hacer en el plano o en el espacio, siendo ésta última la construcción que da origen a todas las cónicas. En este sistema de representación se identifican otros elementos que aportan a la descripción del objeto.

Aunque la representación numérica es muy utilizada en las matemáticas escolares, su carácter discreto restringe la descripción de un objeto visto desde la dimensión funcional. En este sistema trabajamos con los valores numéricos de la función. Se pueden representar los valores de distintas formas: por un lado dándole valores específicos a  $x$ , como por ejemplo, aquellos en donde se anula la función, la imagen da cero, etc. y por el otro, a través de tablas de valores.

El aprendizaje de las funciones pasa, en primer lugar, por un conocimiento de cada uno de estos lenguajes de representación, es decir, por la adquisición de la capacidad para leer e interpretar cada uno de ellos y posteriormente para traducir de uno a otro.

## **7. Metodología**

En esta investigación, interesa estudiar los cambios en el tratamiento de la función cuadrática en libros de texto publicados bajo normas curriculares diferentes. Según Hernández Sampieri, Fernández Collado y Lucio (2004), podría definirse como una investigación no experimental.

A su vez, desde el punto de vista de la temporalización, se puede considerar un estudio longitudinal, que se caracteriza porque "el interés del investigador es analizar cambios a través del tiempo en determinadas categorías, conceptos, sucesos, eventos, variables, contextos" (2004, p. 278).

El criterio para la selección de los libros ha sido escoger los autores más relevantes o las editoriales más utilizadas por los docentes en los últimos 40 años en Argentina.

Los libros a los que se les realizará el análisis, de acuerdo a los períodos establecidos anteriormente, son:

#### **Antes de la Ley Federal de Educación (1970-1993):**

1. López, Antonio. Matemática moderna para 4º año del Bachillerato, Liceo de Señoritas y Escuela de Comercio (Segunda edición). Editorial Stella. Buenos Aires, 1972.

2. Repetto, Linskens y Fesquet. Matemática moderna. Álgebra y Geometría. Tomo 1 (Segunda Edición). Editorial Kapeluz. Buenos Aires, 1979.

3. Tapia, N., Bibiloni y Tapia, C. Matemática 4. Editorial Estrada, 1992.

#### **Después de la Ley Federal de Educación (1993-2007):**

1. De Simone y Turner. Matemática 4 (Quinta Edición). AZ Editora, Buenos Aires, 1996.

2. Kaczor, Schaposchmick, Franco y otros. Matemática 1 (Primera Edición). Editorial Santillana, Buenos Aires, 1999.

3. Berio, Colombo, D'Albano y otros. Matemática 1. Activa (Primera Edición). Editorial Puerto de Palos, Buenos Aires, 2001.

4. Schaposchnik, R., Abdala, C. Real, M. y Turano, C. Nueva carpeta de Matemática. Editorial Aique, Buenos Aires, 2007.

#### **Bibliografía**

ABRATE, R., DELGADO, G. y POCHULU, M.: "Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática", en Revista Iberoamericana de Educación. Número 39, España, 2006.

AZCARATE GIMENEZ, C. y DEULOFEU PIQUET, J.: *Funciones*

y gráficas. España, Editorial Síntesis, 2002.

COBO MERINO, B. y BATANERO, C.: "Significado de la media en los libros de texto de secundaria", en Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias, Volumen 22, Nº 1, Barcelona, 2004.

COCKCROFT, W.: *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft. Estudios de educación*. Madrid, Editorial Ministerio de Educación y Ciencia, 1985.

CONTRERAS GONZÁLEZ, L.: *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas*. España, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva, 1999.

DEULEFOU, J.: "Los sistemas de representación y el uso del C.A.S. en el análisis matemático" Réplica a la ponencia "La enseñanza y el aprendizaje del análisis matemático haciendo uso del C.A.S. (Computer Algebra System) del Prof. Matías Camacho, España, 2007.

GARCÍA, M. y LLINARES, S.: "El concepto de función a través de los textos escolares: reflexión sobre una evolución". Citado en Villella, J. (2004): "La elección de un libro de texto para enseñar geometría", en Boletín Dría Año 2, Nº 4, UNSAM (Buenos Aires), 2004.

GODINO, J.: *Recursos para el estudio de las matemáticas*, España, Matemáticas y su didáctica para Maestros, Proyecto Edumat Maestros, 2003.

GÓMEZ, P. y CARULLA, C.: "La enseñanza de la función cuadrática en las matemáticas escolares del Distrito Capital", en Universidad de Los Andes: Una empresa docente, Bogotá, 1999.

GONZÁLEZ ASTUDILLO, M. y SIERRA VÁZQUEZ, M.: "Metodología de análisis de libros de texto de Matemática. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX", en Investigación Didáctica, Enseñanza de las Ciencias, Revista de Investigación y Experiencias. Volumen 22, Nº 3, Universidad de Salamanca, 2004.

HERNÁNDEZ SAMPIERI, R., FERNÁNDEZ COLLADO, C. y LUCIO, B.: *Metodología de la investigación*, Tercera Edición, México, Editorial Mc Graw Hill, 2004.

OLIVER, M., ROCERAU, M., VALDÉZ, G., VILANOVA, S., MEDINA, P., ASTÍZ, M. y LAVIADA, M.: "Análisis del tratamiento de algunos temas de Geometría en textos escolares para el Tercer Ciclo de la Educación General Básica" en Revista Iberoamericana de Educación, Nº 31, España, Abril 2003.

OSSENBACH SAUTER, G: "La investigación sobre los manuales escolares en América Latina: la contribución del Proyecto MANES" en Revista Interuniversitaria, N° 19, Departamento de Historia de la Educación y Educación Comparada de la Universidad Nacional de Educación a Distancia Madrid (España), 2000.

PEKOLJ, M.: *El concepto de límite y su puesta en texto. Una mirada histórica y epistemológica* (Tesis de Maestría), Córdoba, Universidad Nacional de Río Cuarto, 2006.

SANZ LERMA, I.: *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos* (Tesis Doctoral), San Sebastián (España), Universidad del País Vasco, Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia, 1994.

SIERRA VÁZQUEZ, M., GONZÁLEZ ASTUDILLO, M. y LÓPEZ ESTEBAN, C.: "Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (COU): 1940-1995", Departamento de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, en Revista de Investigación Didáctica, Enseñanza de las Ciencias, Volumen 17, N° 3, Universidad de Salamanca, España, 1999.

VEGA, B.: *Lo relativo en la Matemática. El caso de la proporcionalidad en el 3° Ciclo de la EGB* (Tesis de Maestría), Santa Fe, Universidad Nacional del Litoral, 2006.

VILLELLA, J.: *Matemática escolar y libros de texto*, Buenos Aires, Miño y Dávila Editores, 2007.

VILLELLA, J.: *Uno, Dos, Tres... Geometría otra vez. De la intuición al conocimiento formal en la EGB*, Buenos Aires, Editorial Aique, 2001.