Relatividad general y teoría cuántica no relativista

Rafael Andrés Alemañ Berenguer[1,2]
[1]*Departamento de Ciencia de Materiales, Óptica y Tecnología Electrónica. Universidad Miguel Hernández, Avda. Universidad, s/n. Edif. Torrevaillo - 03202l - Elche (Alicante – España)*
[2]*Sociedad Astronómica de Alicante (Grupo de gravitación y mecánica celeste), Apartado de Correos 616, 03080-Alicante (España)*

E-mail: agrupación.astroalicante@gmail.com

(Recibido el 22 de Noviembre de 2010; aceptado el 23 Enero de 2011)

Resumen

En el presente artículo se comparan y discuten en sus rasgos básicos los aspectos formales y conceptuales de la física del espacio-tiempo (relatividad especial y relatividad general) y de la teoría cuántica no relativista. Una comparación tal revelará tanto sus semejanzas como sus diferencias, aclarando en parte las razones de su disparidad y las dificultades que afronta la búsqueda de un marco unificador entre ambas. Un tratamiento semejante puede resultar de utilidad tanto para profesores como para estudiantes postgraduados, insistiendo en su significado físico y preparando el camino para estudios posteriores.

Palabras clave: Relatividad general, espacio-tiempo, cuántica, gauge, unificación.

Abstract

In this paper, the basic formal and conceptual features of space-time physics (general relativity and special relativity) and non-relativistic quantum theory are compared and discussed. Such a comparation will reveal their similarities as well as their differences, making partially clear the reasons of their disparity and the obstacles that must be faced on searching a proper frame for them both to be unified. This approach may be useful as much for teachers as for postgraduate students involved in foundations of physics, by insisting on its physical meaning and leading up the way towards further studies.

Keywords: General Relativity, space-time, quantum, gauge, unification.

PACS: 03.50.-z, 03.65.-w, 04.20.-q, 04.20.Fy. **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente, a causa de una muy arraigada concepción occidental que se remonta al antiguo atomismo griego, suele considerarse que la física verdaderamente fundamental es aquella que se dedica a esclarecer la estructura microscópica de la materia. Así, no es de extrañar que todas las teorías desarrolladas en este ámbito hayan venido a convertirse, más o menos declaradamente, en modelos a imitar por el resto de la física. El caso más patente a este respecto es el de la teoría cuántica. Elaborada inicialmente en torno a la década de 1920, y enriquecida después con una gran diversidad de formalismos equivalentes, la física cuántica no tardó en erigirse como la más exitosa de las teorías conocidas, tanto por su potencia predictiva como por la exactitud de sus contrastaciones. La radical divergencia entre gran parte de sus conceptos básicos y los de sus predecesoras, indujo a la mayoría de los físicos a establecer una clara línea de demarcación en su ciencia. A un lado se encontraban tanto la física cuántica genérica como las versiones cuánticas de las interacciones fundamentales (electrodinámica cuántica, teorías cuánticas de las fuerzas nucleares y, eventualmente, la gravitación cuántica), mientras que en el otro se situaba el resto de la física, etiquetada como "clásica" desde entonces.

Como es sabido, las teorías de la Relatividad de Einstein constituyeron otro hito de la Física del siglo XX que convulsionó –como la teoría cuántica– nuestra concepción del universo. La Relatividad General, pese a su robusta coherencia interna y su poder abarcador, hubo de esperar hasta la década de 1960 para gozar de mejores confirmaciones experimentales que las logradas alrededor de 1919. La notable complejidad matemática de la teoría junto al hecho de que implicase una visión del cosmos sustancialmente distinta del resto de las teorías físicas (salvo la Relatividad Especial), se combinaron para mantenerla apartada como una pieza exótica dentro del arsenal teórico de los físicos. Para colmo, su resistencia a la cuantización por los procedimientos ordinarios, provocó que los físicos cuánticos la catalogasen como una teoría "clásica" más, e incluso más incómoda de lo habitual.

Con frecuencia, la dificultad de reunir en un marco unificado la gravedad y el resto de las fuerzas fundamentales, suele atribuirse a esta naturaleza "clásica" de la Relatividad. Raramente se intenta de comparar las teorías relativistas –o, en general, la Física einsteiniana del espacio-tiempo– con la física cuántica para detectar las semejanzas y las disparidades, tratando de distinguir los motivos de su aparente incompatibilidad. En la mayoría de las ocasiones se da por hecho que la Relatividad General ha de someterse al entorno cuántico adoptando la forma de una teoría cuántica de campos, como, por ejemplo, el electromagnetismo reconvertido en electrodinámica cuántica.

Sin embargo, más de medio siglo de ímprobos esfuerzos ha resultado, hasta el momento, enteramente infructuoso. Debido a ello parece aconsejable analizar con algún detalle los puntos de acuerdo y los de divergencia entre la física cuántica y la relativista, en busca de las raíces del problema. En el presente artículo estableceremos, siquiera tentativamente, la mencionada comparación entre los rasgos básicos de la Relatividad General y la teoría cuántica no relativista (con algunas de sus extensiones relativistas). Quedarán, pues, fuera de nuestras consideraciones tanto las teorías cuánticas de campos –cuya propia problemática interna es merecedora de un análisis separado– como las ampliaciones de las teorías cuánticas (supercuerdas) o relativistas (*loop quantum gravity*) que pretenden la unificación entre ambas.

Con el fin de comprender mejor esta diferencia, examinaremos en el primer apartado de este artículo las características que nos llevan a adscribir una teoría física al mundo clásico o al cuántico, para después considerar las ecuaciones fundamentales tanto de la relatividad general como de la teoría cuántica no relativista. A continuación nos detendremos de modo particular en el papel que juegan las nociones de espacio, el tiempo, materia, energía y causalidad, en dos dominios clásico y cuántico. Los apartados siguientes abordarán las consecuencias que esta concepción tan distinta de las magnitudes físicas básicas tiene para el objetivo de unificar la interacción gravitatoria con el resto de las fuerzas fundamentales. Por ello trataremos de la gravitación canónica y la aproximación covariante como ejemplo de estrategias fallidas en este empeño. Finalmente, en las conclusiones se intentará ofrecer una visión general del problema con los caminos actualmente abiertos a la investigación.

II. RASGOS CLÁSICOS Y CARÁCTER CUÁNTICO

Para comenzar trazaremos una distinción, si bien provisional y revisable, entre las características que distinguen las teorías cuánticas de la física clásica, aunque lo cierto es que existe tan escaso acuerdo sobre las características distintivas de la física clásica, como sobre aquellas que diferencian a la teoría cuántica del resto de la Física. Inicialmente admitiremos que en la Física espacio-temporal no cuántico concurren los siguientes aspectos:

(1) El espacio y el tiempo, indispensables para la construcción del mundo físico, se consideran entidades mutuamente dependientes entre sí, de modo que no pueden aislarse con un sentido físico completo los aspectos espaciales y temporales de los procesos del mundo material.

(2) Asimismo, el espacio-tiempo configuran un trasfondo interdependiente de los acontecimientos físicos acaecidos en él. En concreto, en la gravitación relativista sus propiedades geométricas quedan determinadas por su contenido de masa-energía Constituye, por así decirlo, el escenario donde se desarrollan los sucesos del mundo físico, pero también influyendo y viéndose influido por ellos.

(3) A cada suceso físico puede asignársele, en principio, una posición (dependiente del referencial) y un tiempo completa y unívocamente determinados.

(4) Las leyes físicas establecen conexiones, también unívocas, entre unos sucesos y otros dentro de una perspectiva epistemológica que se ha dado en llamar "determinismo". Así, toda introducción de probabilidades se debe a la comodidad de evitar un nivel de estructura más profundo en el que aparecerían mecanismos causales que las harían innecesarias.

(5) Hay una cota máxima en la velocidad de propagación de las interacciones físicas, dada por la velocidad de la luz, c.

(6) El significado físico objetivo (independiente de una perspectiva particular de un cierto observador) se obtiene mediante un formalismo tetradimensional, consecuencia de la naturaleza espacio-temporal de la realidad, mencionada en el punto primero. Desde ese punto de vista desaparece la distinción nítida entre ciertos conceptos básicos, como son la masa, la energía, el momento lineal, etc.

La lista precedente, aunque tentativa, puede servirnos como una útil guía para las discusiones posteriores. Con ese mismo propósito, a continuación procederemos a enumerar una serie de peculiaridades de la física cuántica [1]:

(1) Se introducen variables físicas propias –como el espín, la extrañeza, la paridad, el "color" o el "sabor"– algunas de las cuales poseen analogías clásicas con diferente interpretación.

(2) Aparecen probabilidades primarias o irreducibles (que no remiten a ningún subnivel determinista), y una estadística cuántica –la de Fermi-Dirac– con una hipótesis específica como es la exclusión de Pauli.

(3) Inexistencia de conceptos como el de posición o el de trayectoria (y por ello, ausencia de una verdadera cinemática, excepto para valores promedio y en el límite clásico), debido al carácter peculiar de las entidades básicas de la teoría, los objetos cuánticos o *cuantones* [2], y no por efecto del observador.

(4) Ecuaciones específicas del movimiento y de campo (sólo formalmente simulables en la física clásica), originadas por la naturaleza básicamente estocástica de la teoría.

(5) Ausencia de separabilidad, o localidad, entre los componentes de un sistema, por más que estos se alejen espacialmente entre sí.

Prescindiremos aquí de referirnos a la supuestamente decisiva influencia del aparato de medida o de la conciencia del observador sobre el resultado de las mediciones en experimentos cuánticos, puesto que numerosos autores [3, 4, 5] ya se han encargado de rebatirla. Una vez hecho esto, proseguiremos en los sucesivos apartados examinando las similitudes y diferencias entre estas teorías.

III. ECUACIONES FUNDAMENTALES

La Relatividad General (RG en adelante) en su conjunto, es la primera teoría en la que el espacio y el tiempo dejan de desempeñar la función de receptáculo pasivo típica de la física clásica (abreviada como FC), para convertirse en un entramado tetradimensional, el espacio-tiempo, susceptible de influir y ser influido por los procesos naturales. La concepción de un espacio y un tiempo separados, y ambos como telón de fondo inmutable del acontecer físico, es común tanto a la FC como a la teoría cuántica (FQ a partir de ahora).

Sin embargo, en la Física espacio-temporal einsteiniana las posiciones y los tiempos de los sucesos físicos serán ahora relativos al sistema de referencia que se elija. Así ocurrirá con la relación de simultaneidad de dos acontecimientos, e incluso con propiedades que se creían inherentes a los objetos y procesos físicos, como la longitud, la duración o el contenido energético. Será también la peculiar combinación del espacio y el tiempo en la teoría de la Relatividad la responsable de que exista una cota superior, la velocidad de la luz, *c*, en la transmisión de las señales físicas, algo desconocido en la FC y en la FQ.

En la Relatividad General las ecuaciones que gobiernan la curvatura espacio-temporal en presencia de materia y radiación, pueden expresarse como

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}\,. \qquad (1).$$

En ellas, $G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, y $T_{\mu\nu}$ es el tensor que respresenta las contribuciones de la materia y los campos que actúan como fuentes de la interacción gravitatoria. De acuerdo con esta teoría, los coeficientes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (dependiente de la distribución local de materia-energía) se emplean para construir la conexión afín espacio-temporal, $\Gamma^{\delta}_{\eta\lambda}$, que a su vez determinará la clase de las trayectorias permisibles (las geodésicas) para las partículas libres. De este modo, la estructura del espacio-tiempo se ve modificada por el contenido energético, y viceversa, el comportamiento dinámico de la materia-energía local depende también de las características geométricas del espacio-tiempo en su vecindad.

Por lo tanto, la RG posee ecuaciones de un género exclusivamente típico de esta teoría, algo que no ocurre en la FQ. La particularidad proviene no de su forma, pues el formato tensorial puede aplicarse a cualquier teoría del continuo, sino de que las ecuaciones de la RG relacionan la métrica del espacio-tiempo con su contenido energético, algo sin parangón en ninguna otra teoría física.

La peculiar naturaleza no lineal de las ecuaciones de la RG permite además que las leyes del movimiento de las partículas libres (en otras palabras, la ecuación de las geodésicas) se hallen ya incorporadas en las propias ecuaciones de campo de la gravitación [6]. Esta situación es enteramente desconocida ya sea en la FC o en la FQ. En la primera, la ley de la gravitación newtoniana ha de complementarse con las leyes de la mecánica, mientras que las ecuaciones de Maxwell nada nos dicen del movimiento de las fuentes, dado en su caso por la fuerza de Lorentz. Por otra parte, en la FQ la ecuación de Schroedinger contiene un término de energía potencial que debe ser especificado con base en otra teoría.

Por su forma, las ecuaciones cuánticas tampoco son exclusivas de esa rama de la física. Los operadores y funcionales que se presumen distintivos de la FQ, son empleados también en ciertos problemas de límites pertenecientes al electromagnetismo y a la mecánica de medios continuos. De nuevo, y como sucede en la RG, lo que es específico de las ecuaciones funcionales de la FQ es la interpretación de los operadores, que representan magnitudes físicas cuyos valores pueden adoptar un espectro –continuo o discreto– de valores permitidos. Dichos valores, a su vez, aparecen en las mediciones de acuerdo con un patrón intrínsecamente aleatorio. Y mientras no se determinan, la superposición de los diferentes valores posibles como combinación lineal, contiene términos de interferencia entre tales valores capaces de producir efectos empíricamente corroborables.

Es más, los operadores se hallan sometidos a una condición específicamente cuántica, como es el cumplimiento de los conmutadores $[p, q] \equiv pq - qp = -i\hbar$. Estas relaciones de conmutación conducen a las conocidas desigualdades de Heisenberg, que permiten distinguir entre magnitudes con valores compatibles simultáneamente y otras que resultan incompatibles. Esta circunstancia hace que no sea posible equiparar la FQ con otra cualquier teoría de la FC, espacio-temporal o no.

IV. ESPACIO Y TIEMPO

El espacio de la FC, es representable mediante un continuo tridimensional rea $\mathbf{R}^3$ (de cardinal *C* en cada dimensión), al que se asocia un espacio vectorial real $\mathbf{V}_3$ con métrica euclídea simple. El tiempo se caracterizaba como un continuo unidimensional, también de cardinal *C*. En concordancia con esas ideas, el universo de la física clásica era globalmente estático, salvo movimientos locales irrelevantes a gran escala.

Esta perspectiva, como bien se sabe, cambió con la aplicación de la RG al estudio del universo, dando lugar a la moderna cosmología [7, 8, 9]. Desde entonces se dispone de pruebas teóricas y experimentales acerca de una expansión del cosmos, muy distinta de lo que supondría un mero desplazamiento de las galaxias en el seno de un espacio preexistente. Por una adecuada interpretación relativista sabemos que no son los cúmulos de galaxias los que se alejan, sino que es el espacio entre ellos el que crece sin cesar; es decir, en cierto modo se "crea" más espacio en el curso de la expansión cosmológica. Esto supone una situación cualitativamente nueva con respecto a todas las teorías físicas precedentes.

En la teoría cuántica no hay cabida para fenómenos análogos. Los así llamados operadores de "creación y aniquilación" de la FQ relativista, no son tales a poco que se examinen con cuidado. Lo único que hacen es tomar la célebre relación de Einstein entre materia y energía para justificar la transformación de cuantos de materia en cuantos de radiación y a la inversa. Pero en cualquier caso nada se crea o se destruye en sentido estricto, y menos algo tan elusivo como el espacio.

En realidad, la ecuación de Schroedinger (o sus generalizaciones, la ecuación de Klein-Gordon y la de Dirac), no se refieren a propiedades físicas directamente asignables a puntos espacio-temporales concretos, sino a propiedades calculables por medio de un espacio abstracto *n*-dimensional (en general, un espacio de Hilbert con infinitas dimensiones) representativo de la configuración del sistema en un instante dado. Este esquema de razonamiento reproduce fielmente, ampliándolo, el espacio figurativo empleado en la mecánica hamiltoniana, adaptado ahora a las necesidades de la FQ. Por ello hay una disparidad de base en los dominios de los que se ocupan tanto la RG (objetos geométricos en el espacio-tiempo) como la FQ (funcionales en el espacio de Hilbert), que resulta difícilmente salvable en cualquier tentativa de unificación.

Por otra parte, en los sistemas gravitatorios más generales, o en los rotatorios equivalentes, las características de la métrica espacio-temporal de la RG hacen imposible definir un tiempo del sistema. En efecto, al intentar sincronizar relojes a lo largo de una trayectoria cerrada cualquiera, al volver al punto de partida se encuentra un tiempo distinto del inicial. Es cierto que, bajo ciertas condiciones, resulta posible construir un referencial en el que pueda definirse un tiempo del sistema (sistema de referencia síncrono), pero no lo es menos que en ese caso aparecerán singularidades asociadas al tipo de coordenadas elegidas, para eliminar las cuales será preciso pasar a un referencial no síncrono [10].

V. MATERIA Y ENERGÍA

La famosísima ecuación $E = mc^2$, es quizás el estandarte de la Relatividad einsteniana y una de las fórmulas más populares de la historia. A ella se debe el esclarecimiento de la equivalencia –mejor sería decir, identidad– entre la masa y la energía, que se nos revelan así como dos aspectos del mismo concepto [11]. Pero no sólo es eso, puesto que además se establece su unión espacio-temporal indisoluble con el momento lineal a través del tetravector energía-momento, formado con la energía (o masa) y las tres componentes del momento lineal del sistema. Esta reconstrucción geométrica de las propiedades mecánicas de los sistemas físicos, conduce a la sorprendente superación de conceptos tan queridos por la FC como los de energía cinética y potencial.

Ya que únicamente tendremos ahora la energía propia (modulo del vector) y la energía relativa (su proyección sobre el eje temporal de cada sistema de referencia) las nociones de energía cinética y potencial dejan de tener sentido en Relatividad Especial [12]. Igualmente ocurre en la RG, donde $T_{\mu\nu}$, el tensor de masa-energía-momento-tensión, actúa como fuente del campo gravitacional.

En estrecha analogía con el campo electromagnético de Maxwell, las ecuaciones de campo gravitacional de la RG predicen asimismo la producción de ondas gravitacionales por parte de las masas aceleradas. Sin embargo, el tensor de energía, $T_{\mu\nu}$, de la RG es idénticamente nulo para una onda gravitacional pura. Esto significa que la energía gravitatoria es esencialmente no local: no podemos determinar la cantidad de esta energía en juego simplemente examinando la curvatura espacio-temporal en regiones limitadas. La energía gravitatoria no puede estar definida localmente por un motivo muy sencillo: a causa del principio de Equivalencia, para un observador en caída libre en un campo gravitacional ni existe tal campo ni la energía asociada a él. En cambio para otro observador en reposo en ese mismo punto, es un hecho que el campo existe y debe portar una energía.

Esta discrepancia se traduce en que, localmente, la energía del campo no se encuentra unívocamente definida. Desde un punto de vista geométrico, se diría que en pequeñas regiones una superficie curva es indistinguible de su plano tangente (sin curvatura) en ese lugar. La energía gravitacional –y por consiguiente la masa equivalente– está perfectamente definida en un sentido global, de modo que se garantizan los correspondientes teoremas de conservación [13]. Pero lo curioso es que, en ocasiones, dicha conservación obliga a asignar una masa gravitacional no nula a regiones planas del espacio-tiempo [14].

En este sentido la RG también se distancia de la FQ, donde a una partícula en una superposición de dos estados de energía, digamos, $\psi = a\Phi_1 + b\Phi_2$, carece de significado asignarle un valor concreto de la magnitud "energía". O bien se toma el conjunto de las funciones participantes en la combinación lineal, o se tendrá una descripción errónea de la situación física real. No obstante, la distinción radical de esta situación con respecto a la RG, estriba en que el concepto de energía sí pertenece al sustrato teórico de la FQ, aun cuando el sistema no siempre se halle en un estado propio del hamiltoniano, y por eso adopte un espectro continuo o discreto de valores para la energía. La RG, por el contrario, carece del concepto de energía gravitatoria o, en puridad, dicho concepto solo puede ser caracterizado admitiendo condiciones adicionales que no pertenecen al andamiaje esencial de la teoría

Fue el matemático francés E. Cartán quien primero demostró que la deducción más general de las ecuaciones de campo de la RG contenía de forma natural un término introducido inicialmente por Einstein durante sus investigaciones sobre un modelo cosmológico estático. Las mencionadas ecuaciones quedaban por consiguiente,

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}\,, \qquad (2)$$

siendo Λ la desde entonces llamada constante cosmológica. La correcta interpretación física de esta constante ocasionó un mar de discusiones a partir de aquel momento. No obstante, parece claro en la actualidad que la constante cosmológica expresa una suerte de curvatura intrínseca del espacio-tiempo en ausencia de campos y materia. Pero puesto que la curvatura espacio-temporal es debida a la presencia de materia o energía, es lógico suponer que Λ nos está indicando que el estado físico usualmente denominado "vacío" no es realmente tal. Es decir, a falta de los campos y la materia ordinaria, el vacío posee una densidad energética propia imposible de eliminar.

Curiosamente, a conclusiones análogas llegan las teorías cuánticas de campos (obtenidas en el intento combinar la física cuántica ordinaria con la Relatividad Especial), cuando consideran que el vacío es un estado cuántico con una energía mínima remanente distinta de cero. Describiendo la materia mediante teorías cuánticas de campos, se deduce que en periodos muy precoces del cosmos la densidad se hallaba dominada por una energía cuántica cuya presión es negativa e iguala en valor absoluto a la densidad. Su ecuación de estado es $P_q = \rho_q$. El tensor energía-momento de esta componente es $\rho_q(+1, -1, -1, -1)$ o $\rho_q g_{\mu\nu}$. Esta forma nos permite integrar ciertas ecuaciones cosmológicas de las que obtenemos finalmente que $\rho_q = \Lambda$ [14, 6, 17].

Sin embargo, la aparente equivalencia entre las conclusiones de ambas teorías puede resultar engañosa, por cuanto la energía gravitatoria no es un concepto que pertenezca propiamente al sustrato conceptual de la RG, como se comentará en el epígrafe siguiente. Sólo reinterpretando la RG en términos pre-relativistas, se identifica la constante cosmológica con una suerte de "fuerza antigravitatoria", cuando la propia noción de fuerza se halla ausente de la teoría gravitatoria de Einstein. La constante cosmológica sería más bien una condición geométrica sobreimpuesta la conexión afín del espacio-tiempo global que determina su curvatura a gran escala, razón por la cual su influencia solo se manifiesta al tratar el universo en su conjunto.

Es cierto que los cálculos teóricos emprendidos hasta la fecha a fin de establecer una cota máxima para el valor de Λ no han alcanzado el éxito –lo que constituye el mayor enigma de la física moderna, según S. Weinberg– pero con todo, nadie duda ya que de la RG se desprende un concepto de vacío muy diferente del sustentado por la FQ [18, 19].

VI. CAUSALIDAD

Se suele afirmar con frecuencia que uno de los rasgos emblemáticos de la FQ es la posibilidad de acaecimiento de "efectos sin causa", o lo que es lo mismo, que la FQ es acausal. Esta suposición es tan solo parcialmente cierta ya que la evolución del vector de estado bajo la ecuación de Schroedinger es un proceso enteramente determinista. Únicamente la interacción de un sistema cuántico con otro –sea este otro sistema un aparato de medida o no– impone la reducción o colapso del vector de estado de una manera puramente aleatoria. Sucede en realidad que un antecedente causal único (la interacción) se corresponde estocásticamente con uno de un abanico de sucesos consecuentes (cada uno de los estados participantes en la superposición cuántica).

En la RG encontramos asimismo ciertos procesos acausales, pero en un sentido distinto al de la teoría cuántica; casos en los cuales un suceso espacio-temporal o una cadena de ellos carece de un antecedente causal definido. Un ejemplo muy claro nos lo proporciona el modelo cosmológico llamado "anti-De Sitter". En este modelo, el eje temporal describe una curva cerrada, mientras que los ejes espaciales definen dos secciones hiperbólicas infinitas [20]. El espacio de este universo es ilimitado, al contrario que el tiempo, cuya extensión es finita (Fig. 1).

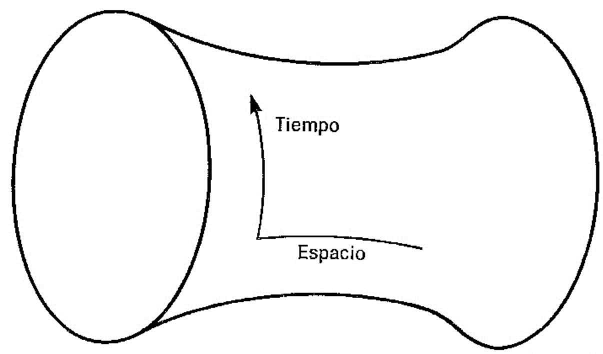

FIGURA 1. En un modelo cosmológico anti-De Sitter, las secciones espaciales son infinitas, pero la dimensión temporal es finita y se cierra circularmente sobre sí misma.

Pues bien, en el marco de este peculiar espacio-tiempo pueden aparecer influencias causales (rayos de luz, emisiones de partículas, etc.) literalmente venidas de más allá del infinito, debido a las especiales propiedades geométricas de este espacio hiperbólico. Como se ve en la imagen inferior (fig.2), un observador puede recibir, por ejemplo, dos rayos de luz L en el instante E_2. Sin embargo, si retrocedemos a lo largo del eje temporal veremos que en el instante E_1 dichos rayos de luz no partían de punto alguno en esa hipersuperficie 3-dimensional espacial de simultaneidad. La curvatura provoca que las trayectorias de L no intersecten jamás la hipersuperfice de simultaneidad de E_1 aunque ésta sea de extensión infinita. Para E_2 los rayos L proviene literalmente de más allá del infinito.

Un planteamiento más conocido dentro de la RG es el de los "agujeros blancos", la contrapartida emisiva de los agujeros negros absorbedores de toda la materia circundante. De acuerdo con los teoremas de Penrose y Hawking [21], en el interior de un agujero negro la singularidad equivale topológicamente a la ausencia de un punto espacio-temporal, un agujero en la misma urdimbre del espacio-tiempo. Modificando leve pero dramáticamente las ecuaciones de los agujeros negros, obtenemos los agujeros blancos, conteniendo singularidades (o, si se quiere, agujeros espacio-temporales) de las que puede salir cualquier cosa. Dado que las singularidades constituyen bordes en el espacio-tiempo, las leyes físicas quedan en suspenso y, en principio, cualquier efecto puede emerger de él sin causa que lo provoque.

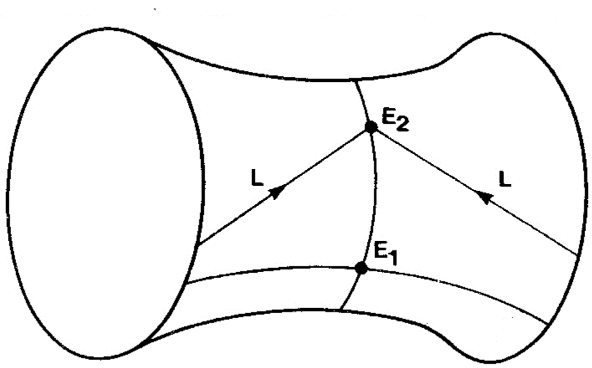

FIGURA. 2. La curvatura de este espacio hiperbólico ocasiona que las trayectorias L nunca alcancen la 3-superficie de simultaneidad de E_1.

Otro objeto exótico de la RG es el denominado CTC, "curva temporal cerrada" [22, 23]. Como su mismo nombre indica, se trata de una línea de universo sin principio ni fin que se cierra sobre sí misma formando una circunferencia espacio-temporal. La manifestación física de las CTC no puede ser más extravagante: desde el punto de vista de un observador ordinario, se apreciaría que el objeto constituyente de la CTC aparece repentinamente de la nada y se desdobla en dos copias idénticas que se separan espacialmente (algo así como si el objeto ocupase dos posiciones en cada instante). Conforme nos aproximamos al final de la CTC dichas copias se acercarían de nuevo hasta fundirse una vez más y desaparecer tan súbitamente como se inició. Parece claro que una CTC es una entidad causalmente autocontenida en la que no pueden definirse sin ambigüedad lo que son causas y efectos. Puesto que tenemos una sucesión circular de acontecimientos espacio-temporales, cada uno de los miembros de la serie que forma la CTC puede considerarse tanto causa como efecto de todos los demás.

VII. FORMALISMO 3+1

El uso del formalismo típico de la mecánica analítica, junto con la teoría de operadores sobre espacios abstractos, suministró las herramientas matemáticas con que construir la teoría cuántica desde sus orígenes a la actualidad. El camino seguido por la física espacio-temporal resultó muy distinto, por cuanto utilizó el análisis tensorial como los instrumentos propios de las variedades geométricas implicadas. De modo que el proyecto de unificación entre ambas ramas de la física hubo de afrontar en sus comienzos con dificultades no solo conceptuales, sino también de tipo formal.

Con el fin de emplear los métodos habituales de cuantización en la teoría de campos, se necesita construir una densidad lagrangiana para la relatividad general. Esto equivale a buscar una formulación que distinga netamente entre la parte espacial y la temporal del espacio-tiempo. Algo así rompe –siquiera formalmente– con el espíritu fundacional de la relatividad einsteiniana, motivo por el cual se suele hablar en estos casos de "formalismo no covariante" o "formulación 3 + 1", para indicar esa nítida distinción que se establece entre variables espaciales y temporales.

Introducimos primero una foliación del espacio-tiempo mediante hipersuperficies Σ de tiempo constante. En cualquier instante t, un intervalo sobre Σ se define mediante el elemento de línea

$$d\sigma^2 = g_{ij}(t, x, y, z)\,dx^i dx^j \tag{3}$$

En el instante $t + dt$, se ha producido la transición desde Σ a Σ′, de modo que ahora el elemento de línea sería:

$$d\sigma'^2 = g_{ij}(t + dt, x, y, z)\,dx'^i\, dx'^j \tag{4}$$

A partir de esta transición, podemos definir un lapso de tiempo $N(t, x, y, z)dt$ debido al cual dx^i se transforma en

$$dx'^i = dx^i + N^i dt \tag{5}$$

En tales circunstancias, el intervalo espacio-temporal adopta la forma,

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\sigma'^2 - (Ndt)^2 = g_{ij}(t + dt, x, y, z)\,dx'^i\, dx'^j - (Ndt)^2 = \\ &g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) - (Ndt)^2 = \\ &g_{ij}dx^i dx^j + g_{ij}N^j dx^i dt + g_{ij}N^i dx^j dt + (g_{ij}N^i N^j - N^2)dt^2, \end{aligned} \tag{6}$$

que finalmente llega a la igualdad,

$$ds^2 = (N_i N^i - N^2)dt^2 + 2N_i dx^i dt + g_{ij} dx^i dx^j \tag{7}$$

Denotando como η_β el campo de vectores normales a la hipersuperficie Σ, la dirección del vector unitario vendrá dada por la condición $\eta_\beta = (-1, 0, 0, 0)$. A continuación denominamos segunda forma fundamental de la superficie Σ al tensor simétrico:

$$K_{il} = D_l \eta_i = \partial_l \eta_i - \Gamma_{il}^{\beta} \eta_\beta \tag{8}$$

Recurriendo a la forma del vector unitario antes mencionado se obtiene:

$$K_{il} = -\Gamma_{li}^{0} = K_{li} \tag{9}$$

Y como los símbolos de Christoffel son simétricos con respecto a los subíndices i y l, el tensor K_{il} también será simétrico.

La importancia de este razonamiento reside en el hecho de que el tensor K_{il} describe la curvatura de la hipersuperficie 3-dimensional Σ (x^0 = constante) desde la perspectiva del espacio-tiempo 4-dimensional en el que se halla inmersa. El tensor K_{il} puede expresarse alternativamente:

$$K_{il} = K_{li} = -\Gamma^0_{li} = -\frac{1}{2}\partial_0 g_{il} = -\frac{1}{2}\dot{g}_{il} \qquad (10).$$

Así pues, cuando hablamos de la curvatura externa (o extrínseca) de Σ nos referimos al escalar obtenido a partir de la segunda forma fundamental de la hipersuperficie.

$$\mathrm{Tr}K^2 - (\mathrm{Tr}K)^2 = K_{ij}K^{ij} - (K^i_i)^2. \qquad (11).$$

Por el contrario, llamamos curvatura interna (o intrínseca) al escalar tridimensional ${}^{(3)}R^i_i$ asociado a Σ. A su vez, el escalar ${}^{(4)}R^\mu_\mu$ se calcula bajo la condición de que en coordenadas comóviles los símbolos de Christoffel Γ^μ_{00} $\Gamma^0_{0\mu}$se anulan:

$${}^{(4)}R^\mu_\mu = {}^{(4)}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = {}^{(4)}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} + (\Gamma\Gamma)_{\mu\nu}\right). \qquad (12).$$

Haciendo uso de los tensores de curvatura interna y externa, obtenemos las llamadas ecuaciones de Gauss-Codazzi:

$${}^{(4)}R^\mu_\mu = {}^{(3)}R^i_i + \mathrm{Tr}K^2 - (\mathrm{Tr}K)^2 + \partial_0\mathrm{Tr}K + g^{ij}\partial_0 K_{ij} \qquad (13).$$

La importancia de estas ecuaciones reside en que nos indican el valor de la curvatura escalar 4-dimensional en términos de la curvatura interna, la curvatura externa y la evolución temporal del tensor K_{il}, reflejada en los términos $\partial_0\mathrm{Tr}K + g^{ij}\partial_0 K_{ij}$.

Se plantea ahora la cuestión de si en la relatividad general reformulada de este modo tiene respuesta el típico problema de Cauchy, a saber, si con datos iniciales adecuados existe una única la solución para las ecuaciones relativistas que depende de forma continua de dichos datos. La respuesta, en principio, es negativa a causa de la covariancia bajo difeomorfismos en el espacio-tiempo y de las infinitas maneras distintas en que un espacio-tiempo 4-dimensional puede escindirse en espacio y tiempo (la separación 3 + 1 no es unívoca). Sin embargo, cumpliendo ciertos requisitos bastante razonables resulta posible construir soluciones de las ecuaciones gravitatorias relativistas que satisfagan el problema de Cauchy, como se desprende de los teoremas de Choquet-Bruhat [24]

VIII. GRAVITACIÓN CANÓNICA

Podemos preguntarnos ahora si hay alguna relación entre el espacio de fases de la formulación hamiltoniana y las variedades métricas que sirven de base a las teorías del espacio-tiempo físico. En otras palabras, nos planteamos cuál es el vínculo entre el fibrado cotangente del espacio de configuraciones, T^*, que tiene una estructura simpléctica natural suministrada por la forma simpléctica canónica, y el fibrado tangente T, con una estructura métrica natural proporcionada por el elemento de línea de Riemann (la conocida forma cuadrática diferencial de n dimensiones).

El espacio de fases hamiltoniano posee estructura simpléctica, lo que permite determinar en él la noción de elemento de volumen, pero carece de una estructura métrica propiamente dicha. En general, la estructura métrica presupone el concepto de volumen, pero no al contrario. Por ello, las ecuaciones del movimiento de Hamilton necesitan una estructura formal –la simpléctica– menos rica que la contenida en las variedades métricas. Además, una variedad simpléctica carece de la noción de curvatura local que permita, por el teorema de Darboux, distinguir también localmente entre diversas variedades simplécticas.

Las consideraciones precedentes adquieren su verdadera trascendencia al afrontar el problema de cuantizar la gravedad mediante un método “canónico”. Es decir, se trata de reformular la Relatividad General a semejanza de la teoría cuántica hamiltoniana, utilizando variables canónicas conjugadas.

La variable canónica esencial es la métrica de una superficie espacial q_{ab} (simbolizada así para evitar confusiones con la métrica espacio-temporal $g_{\mu\nu}$), y su momento conjugado se denota π_{ab}. Este momento conjugado se vincula estrechamente con la curvatura extrínseca, la cual a su vez depende de la derivada temporal de la métrica espacial [25, 26, 27, 28]. La teoría contiene cuatro ligaduras –es decir, relaciones entre las variables en un cierto instante– a causa de las simetrías presentes. Tres de ellas manifiestan la covariancia de la Relatividad General frente a difeomorfismos espaciales. La cuarta ligadura se asocia con difeomorfismos fuera de las superficies espaciales, y se conoce como la “ligadura hamiltoniana”. Exponiéndolo con algo más de detalle, existen dos tipos de ligaduras en el formalismo hamiltoniano de la gravedad relativista: las ligaduras difeomórficas (o del momento canónico) y las ligaduras hamiltonianas. Las primeras –como su nombre indica– generan los difeomorfismos en la 3-superficie de datos iniciales, mientras las segundas gobiernan la transición desde cada una de estas 3-superficies a la siguiente (fig. 3). O en otras palabras, las ligaduras hamiltonianas generan el movimiento, y las ligaduras difeomórficas relacionan las descripciones equivalentes de la misma situación física.

Por desgracia, este formalismo canónico rompe la simetría relativista entre espacio y tiempo, separando de manera peculiar el comportamiento de la ligadura hamiltoniana con respecto a las demás. Ya que ahora el movimiento viene dado por la ligadura hamiltoniana y –según Dirac– las ligaduras se identifican con transformaciones gauge, el movimiento mismo es meramente una pura transformación gauge. En consecuencia, todas las magnitudes invariantes gauge de la teoría –las únicas a las que suele atribuirse auténtico significado físico– son constantes del movimiento: ninguna propiedad física relevante debería cambiar con el tiempo en absoluto. Tras una serie de manipulaciones matemáticas llegamos a un hamiltoniano para la Relatividad General formado únicamente por las ligaduras mencionadas, el cual se anula sin remedio. La causa de esta anulación estriba en que la noción de tiempo introducida en el formalismo canónico, es puramente artificial y arbitraria.

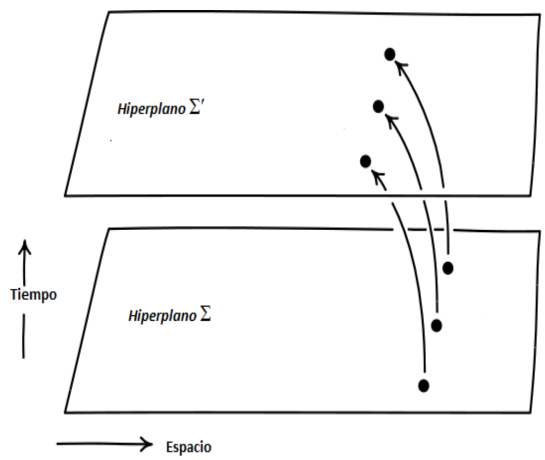

FIGURA. 3. Transición de una 3-superficie Σ a la siguiente, Σ', para una coordenada t escogida.

Y como la Relatividad General se ocupa de la única fuerza completamente universal, la gravedad, sus conclusiones deberían aplicarse al universo entero. Así pues, nada habría de experimentar jamás cambio alguno en todo el cosmos. Este es el problema del tiempo, o "del formalismo congelado", típico de la Relatividad General gauge. Por decirlo de alguna manera, el método canónico "detecta" que la Relatividad General no privilegia variable temporal alguna, y reacciona anulando los hamiltonianos construidos mediante tales variables. Obviamente, los intentos de cuantizar la teoría gravitatoria de Einstein no sólo no han solucionado esta paradoja, sino que se han visto irremediablemente obstaculizados por ella.

IX. APROXIMACIÓN COVARIANTE

No se corre mejor suerte con la llamada "aproximación covariante" (las teorías basadas en cuantos de campo gravitatorio –gravitones– sobre un fondo espacio-temporal sin curvatura), defendida por Feynman y sus colegas. Se comienza con un espacio-tiempo lorentziano (es decir, sin curvatura y con la signatura usual en el métrica relativista) dotado de un tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$ y, además, de un campo $h_{\mu\nu}$ sin masa con espín 2. Este campo depende del valor del tensor de impulso-energía $T_{\mu\nu}$ típico de la Relatividad General. En primera aproximación, la lagrangiana se escribiría $L = L_m + L_0(h) + h_{\mu\nu}(\delta L_m, \delta\eta_{\mu\nu})$. Obviamente, L_m es la lagrangiana de la materia, $L_0(h)$ representa la contribución del campo h libre –sin interacciones– y $h_{\mu\nu}(\delta L_m, \delta\eta_{\mu\nu})$ es el término de acoplamiento entre el campo de espín 2 y la materia. La conjunción de la métrica sin curvatura $\eta_{\mu\nu}$ y el campo $h_{\mu\nu}$ genera en la práctica una métrica efectiva $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}+ h_{\mu\nu}$ equivalente a la métrica curva de la gravedad einsteiniana. En definitiva, superponiendo el campo de espín 2 sin masa –los gravitones– sobre un espacio-tiempo con métrica plana $\eta_{\mu\nu}$, la materia se mueve por las geodésicas de una métrica "curva" $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}+ h_{\mu\nu}$.

Si a continuación permitimos que h se acople consigo mismo, ya que su energía también gravita, la lagrangiana se hace fuertemente no lineal. En las décadas de 1960 y 1970, Deser, Boulware, Weinberg y Feynman, entre otros autores, consiguieron obtener de esa lagrangiana no lineal la acción de Hilbert-Einstein para la métrica $\eta_{\mu\nu}+ h_{\mu\nu}$, suponiendo un acoplamiento mínimo con la materia. Llegamos con ello a una reinterpretación de la Relatividad General en términos de un campo de espín 2 auto-interactivo, sobre un fondo espacio-temporal minkowskiano que de hecho resultaría inobservable [29, 30, 31, 32]. Posteriormente se demostró también la índole no renormalizable de las teorías cuánticas de la gravedad que seguían el patrón de la aproximación covariante [33].

Semejante proceder consigue imitar localmente las propiedades de la Relatividad General, salvo efectos como la dilatación gravitatoria del tiempo. Debido a la separación entre espacio y tiempo que subyace en todos estos procedimientos, la aproximación covariante logra simular el carácter dinámico que el espacio tridimensional posee en la gravitación relativista. Pero como el tiempo no es una variable mecánica en el formalismo hamiltoniano original, tampoco lo es en este método, y el carácter dinámico del tiempo relativista se pierde por completo.

También queda abierto el problema de construir la totalidad del espacio-tiempo yuxtaponiendo unos entornos locales con otros. Por esa misma razón no es correcto afirmar que la introducción de gravitones sobre un fondo espacio-temporal llano, reproduce la Relatividad General. Porque la teoría gravitatoria de Einstein permite –al menos en principio– relacionar regiones espacio-temporales vecinas con curvaturas distintas, cosa que los gravitones no logran hacer de manera unívoca. En otras palabras, nada impide pasar de la simetría global (covariancia general) a la local (covariancia de Lorentz); el problema surge cuando buscamos la transición inversa. El método gauge no permite recuperar inequívocamente simetrías globales a partir de locales.

Por si todo ello fuese poco, cuando decidimos deducir las ecuaciones gravitatorias de Einstein a partir de un principio variacional, la acción admite el grupo de los difeomorfismos como simetría variacional. Y al aplicar las transformaciones de Legendre para obtener la versión hamiltoniana de la teoría, llegamos a una formulación con ligaduras como las discutidas previamente. Por tanto, podemos definir una magnitud físicamente objetiva en

Relatividad General como toda cantidad dinámica que sea invariante gauge en el sentido de Dirac (es decir, su corchete de Poisson con las ligaduras de primera clase, se anule). Ahora bien, en Relatividad General el álgebra de Lie de las ligaduras no posee la propiedad de clausura, por lo cual no es un álgebra de Lie genuina. Y dado que la clausura es una propiedad distintiva de las teorías de Yang-Mills [34, 35], se sigue de ello que la gravitación einsteiniana no pertenece a la familia de las teorías de Yang-Mills.

X. CONCLUSIONES

En los apartados anteriores se han discutido las peculiaridades relatividad general, máximo exponente de la teoría clásica de campos considerada como paradigma central de la física clásica, en comparación con las características distintivas de la teoría cuántica no relativista. El papel dinámico otorgado al espacio y al tiempo, la inexistencia de ciertos conceptos clásicos (las energías cinética o potencial, el tiempo global o la energía local en un sistema gravitatorio, etc.), el profundo cambio en la interpretación de otras nociones (la expansión cosmológica, la equivalencia masa-energía) o la posibilidad de sucesos sin antecedentes causales unívocos (cosmologías hiperbólicas, agujeros blancos, CTC), son características que separan ampliamente a la RG de la teoría cuántica [23].

La principal disparidad entre la RG y la física cuántica reside en que los objetios tratados por la primera residen en el espacio-tiempo físico de cuatro dimensiones, modelizado mediante una variedad métrica pseudo-riemanniana, mientras la segunda se ocupa de objetos pertenecientes a espacios abstracto, no métricos, que pueden llegar a poseer infinitas dimensiones. Por otro lado, el papel esencial que a las probabilidades se otorga en la teoría cuántica resulta imposible de reconciliar con la concepción geométrica de ese espacio-tiempo relativista [36]. Evaluar probabilidades de modo objetivo implica privilegiar de algún modo la coordenada temporal en la que se verifica tal evaluación. Pero algo así se revela incompatible con la interpretación geométrica de la estructura causal típica de la relatividad general.

La RG no contiene probabilidades primarias, ni una estadística propia, ni postula discontinuidades básicas en la estructura de la materia y la radiación. De hecho, si deseamos introducir fermiones en el seno de la RG, resulta ineludible construir la conexión afín con el tensor métrico y con las tétradas de Cartan [37]. Ello parece indicar, pues, que la RG por sí sola es incapaz de describir el movimiento de la materia considerada microscópicamente, incluso en los casos más simples. Estos y otros problemas de más grueso calibre –como los relacionados con las tentativas de cuantización y renormalización- permanecen como un desafío pendiente para los investigadores del futuro.

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi gratitud a todos los miembros de la Agrupación Astronómica de Alicante, en cuyas sesiones plenarias han sido discutidos en profundidad muchos de los aspectos brevemente abordados en este artículo. De estos debates surgió una interpretación tan intuitiva como resultó posible de estas cuestiones.

REFERENCIAS

[1] Bunge, M., *Controversias en física*, (Tecnos, Madrid, 1983).

[2] Bunge, M., *Quantum Mechanics and Measurement*, Int. J. Quantum Chem., **12** (Suppl. 1), 1(1977).

[3] Bunge, M., *Foundations of physics*, (Springer, New York, 1967).

[4] Margenau, H., *Quantum-mechanical descriptions*, Phys. Rev. **49**, 240 (1936).

[5] Popper, K., *La lógica de la investigación científica* (Tecnos, Madrid, 1962).

[6] Eddington, A. S., *The Mathematical Theory of Relativity* (Cam. Univ. Press, Cambridge, 1963).

[7] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, (New York, Wiley, 1972).

[8] Wald, R. M., *General Relativity*, (Chicago, University of Chicago Press, 1984).

[9] Carroll, S. M., *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, (San Francisco, Addison-Wesley, 2004).

[10] Landau, L., Lifshitz, E., *Teoría Clásica de campos*, (Reverté, Barcelona, 1973).

[11] Alemañ-Berenguer, R. A., *Una aproximación geométrica a la equivalencia masa-energía en relatividad*, Latin-American Journal of Physics Education **3**, 121 (2009).

[12] Terletskii, Y., *Paradoxes in the Theory of Relativity*, (Plenum Press, New York, 1968).

[13] Bondi, H., *Gravitational Waves in General Relativity*, Nature **186**, 535 (1961).

[14] Penrose, R., Rindler, W., *Spinors and space-time*, (Cam. Univ. Press, Cambridge, 1986).

[15] Albrecht, A., Steinhardt, P. J., *Cosmology for Grand Unified Theories With Radiatively Induced Symmetry Breaking*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1220 (1982).

[16] Mandl, F., Shaw, G., *Quantum field theory*, (Wiley, New York, 1984).

[17] Milonni, P.W., *The Quantum Vacuum*, (Academic Press, New York, 1994).

[18] Friedrich, H., *Cauchy problems for the conformal vacuum field equations in general relativity*, Comm. Math. Phys. **91**, 445 (1983).

[19] Rindler, W., Ishak, M., *The Contribution of the Cosmological Constant to the Relativistic Bending of Light Revisited*, Phys. Rev. D **76**, 043006 (2007).

[20] Misner, C. W., Thorne, K. S., Wheeler, J. A., *Gravitation*, (Freeman, San Francisco, 1973).

[21] Penrose, R., Hawking, S., *On Gravitational Collapse and Cosmology*, Proc. R. Soc. Lon. **A 314**, 529 (1969).
[22] Gödel, K., *An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation*, Rev. of Mod. Phys. **21**, 447 (1949).
[23] Hawking, S., Penrose, R., *Cuestiones cuánticas y cosmológicas*, (Alianza, Madrid, 1993).
[24] Anderson, A., Choquet-Bruhat, Y., York Jr, J. W., *Einstein–bianchi hyperbolic system for general relativity*, Topological Methods in Nonlinear Analysis **10**, 353 (1997).
[25] Bergmann, P. G., *Non-linear field theories*, Phys. Rev. **75**, 680 (1949).
[26] Dirac, P. A. M., *Generalized Hamiltonian dynamics*, Can. J. Math. **2**, 129 (1950).
[27] Dirac, P. A. M., *Is There an Aether?*, Nature **168**, 906 (1951).
[28] Ashtekar, A., *New perspectives in canonical quantum gravity*, (Bibliopolis, Naples, 1988).
[29] DeWitt, B. S., *Theory of Radiative Corrections for Non-Abelian Gauge Fields*, Phys. Rev. Lett. **12**, 742 (1964).
[30] DeWitt, B. S., *Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory*, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).
[31] Deser, S., Quantum gravitation: problems and prospects, *Annals of the New York Academy of Sciences* **262**, 292 (1975).
[32] Martellini, M., *Nonrenormalizability in quantum gravity*, Il Nouovo Cimento A **53,** 211 (1979).
[33] Hooft, G., Veltman, M., *Combinatorics of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B **50**, 318 (1972).
[34] Morrison, K., *Yang-Mills connections on surfaces and representations of the path group*, Proc. Am. Math. Soc., **112**, 1101 (1991).
[35] Atiyah, M. F., Bott, R., *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A., **308**, 523 (1982).
[36] Alemañ-Berenguer, R. A., *Quantum Mechanics versus Special Relativity: A forgotten conflict*, en http://philsci-archive.pitt.edu/4313/ Colsultada el 20 de noviembre de 2010.
[37] De Sabbata, V., Gasperini, M., *Introduction to gravitation*, (World Scientific, Singapore, 1985).