Termodinámica Relativista: una aproximación didáctica al Primer Principio

J. Güémez
Departamento de Física Aplicada, Universidad de Cantabría.

E-mail: guemezj@unican.es

(Recibido el 30 de Diciembre de 2010; aceptado el 23 de Enero de 2011)

Resumen

Utilizando un formalismo de Termodinámica Relativista semejante al desarrollado por Arzeliès y Van Kampen, en el marco de la Formulación Asíncrona, se resuelve el ejercicio de la compresión isoterma de un gas ideal, considerando un origen electromagnético de las fuerzas aplicadas. En este marco relativista, los procesos mecánicos y termodinámicos se integran en el Primer Principio de la Termodinámica expresado, utilizando 4-vectores de Minkowski, como $\Delta U^{\mu} = W^{\mu} + Q^{\mu}$, en una formulación covariante Lorentz, lo que, junto con la formulación covariante de las fuerzas electromagnéticas, constituye una formulación covariante Lorentz de la Física Clásica.

Palabras clave: Termodinámica, Relatividad, cuadrivectores.

Abstract

The isothermal compression of an ideal gas exercise is solved, considering an electromagnetic origin for forces applied to it, using a Relativistic Thermodynamics formalism similar to that previously developed by Arzeliès and Van Kampen, in the frame of the Asynchronous Formulation of Relativistic Thermodynamics. In this relativistic framework mechanical and thermodynamical processes merge in the First Law of Relativistic Thermodynamics expressed, using Minkowski's 4-vectors, as $\Delta U^{\mu} = W^{\mu} + Q^{\mu}$, in a covariant Lorentz formulation, which, together to electromagnetic interactions covariant formulation, constitutes a covariant Lorentz formulation of Classical Physics.

Keywords: Thermodynamics, Relativity, four-vectors.

PACS: 05.70.-a , 03.30.+p **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

Para la resolución completa de ejercicios de Física en los que se produce desaparición de energía Mecánica (por ejemplo, por efecto de una fuerza de rozamiento [1]), o creación de energía Mecánica (por ejemplo, una persona en cuclillas que da un salto y se eleva [2]), es necesario considerar tanto la Segunda Ley de Newton como el Primer Principio de la Termodinámica [3]. La Segunda Ley de Newton aplicada a un cuerpo extenso, de masa M (constante), expresada como Ecuación Impulso-Momento Lineal $I = \Delta\mathbf{p}$:

$$F\Delta t = M\Delta\mathbf{v}_{\mathrm{cm}}, \qquad F = \sum_k \mathbf{F}_k, \tag{1}$$

donde F es la resultante de las $\mathbf{F}_k$ fuerzas externas, supuestas constantes, aplicadas simultáneamente durante el intervalo de tiempo Δt, y v_{cm} es la velocidad del centro de masas [4] medida en un cierto referencial S, conduce, por integración, a la Ecuación del Centro de Masas ([5], pp. 195-197):

$$\Delta K_{\mathrm{cm}} = F\cdot\Delta\mathbf{x}_{\mathrm{cm}}, \tag{2}$$

donde K_{cm} es la energía cinética del centro de masas y $\mathbf{x}_{\mathrm{cm}}$ su desplazamiento. Ésta Ec. (2) se complementa con el Primer Principio de la Termodinámica o Ecuación de Conservación de la Energía [6], en el referencial S,

$$\Delta K_{\mathrm{cm}} + \Delta U = W_{\mathrm{ext}} + Q\,; \qquad W_{\mathrm{ext}} = \sum_j W_{j\mathrm{ext}} \tag{3}$$

donde U es la energía interna del sistema [1], $W_{j\mathrm{ext}}$ es algún tipo de trabajo realizado por fuerzas conservativas externas sobre el sistema [7], con trabajo total W_{ext}, y Q es el calor ([8], pp. 101-102).

En los ejercicios característicos de Termodinámica [9] se considera la descripción de un proceso (por ejemplo, una compresión adiabática reversible de un gas) en el referencial 'privilegiado' S_0 en el que el impulso total de las fuerzas aplicadas sobre el sistema (en ocasiones, no se explicita la existencia de fuerzas que, aunque aplicadas sobre el sistema, no tienen desplazamiento asociado y no realizan trabajo) es nulo $I = F\Delta t = 0$ y el centro de gravedad del sistema se encuentra en reposo en los estados inicial y final (al menos) de equilibrio termodinámico. Con

$\Delta K_{cm} = 0$, el Primer Principio se reduce a su expresión más conocida: $\Delta U = W_{ext} + Q$ ([9], pp. 78-80).

Para un referencial S_A que, a lo largo del eje x, se mueve con velocidad $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ respecto del referencial S, las transformaciones Galileanas, del trabajo de las fuerzas externas aplicadas y de la variación de la energía cinética del centro de masas, permiten demostrar que, de acuerdo con el Principio de Relatividad de Galileo, la Segunda Ley de Newton y el Primer Principio de la Termodinámica se expresan, en forma covariante, en S_A como [10]:

$$\Delta K_{cmA} = F \cdot \Delta \mathbf{x}_{cmA},$$
$$\Delta K_{cmA} + \Delta U = W_{extA} + Q,$$

donde las magnitudes correspondientes son medidas en S_A y donde masas, fuerzas, intervalos de tiempo, impulso I, variación de momento lineal Δp, energía interna ΔU y calor Q son *invariantes Galileanos* [3] y donde velocidad $v_A = v - V$, desplazamiento $\Delta x_{cmA} = \Delta x_{cm} - V\Delta t$, energía cinética $\Delta K_{cmA} = \Delta K_{cm} - V\Delta p$ y trabajo $W_{extA} = W_{ext} - VI$, tienen sus correspondientes transformaciones Galileanas [11].

Es interesante constatar que si las fuerzas que se aplican sobre el sistema tienen un origen electromagnético, obteniéndose alguna fuerza $\mathbf{F}$ mediante la aplicación de la fuerza de Lorentz

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right),$$

(q carga eléctrica, $\mathbf{E}$, campo eléctrico, $\mathbf{B}$ campo magnético) ([12], Sec. 19.7 y Sec. 22.2), el formalismo completo no es ni covariante – bajo transformaciones de – Galileo (la fuerza de Lorentz no es covariante Galileo) ni covariante – bajo transformaciones de – Lorentz (el formalismo termodinámico anterior no es covariante Lorentz), incumpliéndose el Principio de Relatividad de Einstein.

Una vez hechas estas consideraciones sobre lo que constituye una Termodinámica Relativista Galileana, incompatible con las interacciones electromagnéticas, parece necesario avanzar en la obtención de un formalismo para el Primer Principio de la Termodinámica expresado de acuerdo con los principios de la Relatividad Especial de Einstein [3], lo que constituiría una Termodinámica Relativista Lorentziana, ya compatible con las interacciones electromagnéticas.

En este artículo se resuelve el ejercicio de la compresión isoterma (no cuasiestática) de un gas ideal en el referencial S_0 en el que el sistema como un todo se encuentra en reposo, y en un referencial S_A, en configuración estándar (Apéndice A) respecto de S_0, utilizando el formalismo de Minkowski de 4-vectores para expresar el Primer Principio de la Termodinámica y las magnitudes que en él aparecen. El formalismo previamente desarrollado tiene elementos en común con el desarrollado por Arzeliès [13], Van Kampen [14] y Hamity [15], posteriormente formalizados en el marco de la Formulación Asíncrona [16] de la Termodinámica Relativista.

En la Sec. II se desarrolla el formalismo de Termodinámica Relativista, basado en: (i) el Principio de Inercia de la Energía, (ii) la Formulación Asíncrona y (iii) el Principio de Similitud. En la Sec. III se obtiene el Primer Principio de la Termodinámica, en su forma covariante (bajo transformaciones de) Lorentz, $\Delta U^{\mu} = W^{\mu} + Q^{\mu}$, con la obtención previa de los 4-vectores función energía U^{μ}, trabajo de configuración W^{μ}, éste con un origen electromagnético, y calor Q^{μ}. En la Sec. IV se aplica el formalismo desarrollado al análisis del proceso de compresión isoterma de un gas ideal en los referenciales S_0 y S_A, en configuración estándar con el primero. Las fuerzas aplicadas sobre el gas se modelizan mediante émbolos, sobre los que se ha localizado una carga eléctrica, situados en un campo eléctrico. Finalmente, en la Sec. V se obtienen algunas conclusiones respecto al formalismo de Termodinámica Relativista desarrollado y se hacen algunos comentarios al respecto. Aunque se supone que el lector está familiarizado con el formalismo de 4-vectores de Minkowski de la Teoría Especial de la Relatividad [17], por razones de autocontenido, en el Apéndice A se hace un resumen de las propiedades de los 4-vectores y se específica el 'tensor métrico' $g_{\nu\mu}$ y el 4×4-tensor para la 'transformación de Lorentz', $L^{\mu}_{\nu}(V)$, utilizados en el desarrollo del formalismo.

Debido a su temática, se considera que este artículo puede ser de interés para alumnos universitarios interesados en los fundamentos de la Física, con los únicos requisitos de conocimientos de Termodinámica y de la Teoría Especial de la Relatividad. Dada la amplitud de los conceptos implicados, el artículo constituye, en cierta manera, una revisión del formalismo general de la Física Clásica.

II. TERMODINÁMICA RELATIVISTA. FORMALISMO

Se puede considerar que el objetivo de una Termodinámica Relativista es describir el comportamiento de cuerpos compuestos, extensos y deformables, mediante el mismo formalismo de 4-vectores de Minkowski (Ap. A) que se aplica a partículas elementales [17] (Sec. 2.3). En la Mecánica Clásica la aplicación de las Leyes de Newton a sistemas extensos, deformables o abiertos, exige hacer consideraciones adicionales – las ecuaciones de Poinsot-Euler para la rotación ([18], pp. 236-238) en el caso de cuerpos rígidos–, o introducir conceptos termodinámicos – energía interna, temperatura, etc., en el caso de sistemas deformables–. En la aplicación de la Teoría Especial de la Relatividad a cuerpos extensos, y debido a la Ecuación de Einstein, toda forma de energía contribuirá a la inercia del sistema (un cuerpo en rotación tendrá más inercia que el mismo cuerpo sin girar y un cuerpo a alta temperatura tendrá más inercia que el mismo cuerpo a menor temperatura [19]) y la inercia de un sistema [20] jugará un papel semejante en sistemas extensos al de la masa en partículas elementales, pero, bajo condiciones muy generales, aplicándose las mismas ecuaciones en cada caso.

A. Principio de Inercia de la Energía

Dado un sistema, con varios componentes, extenso, deformable, a partir de la interpretación más general de la ecuación de Einstein $E_0 = mc^2$, se puede enunciar el siguiente principio:

Hipótesis de Einstein o Principio de la Inercia de la Energía [21]: para un sistema en completo equilibrio termodinámico, todas sus formas de energía, relativísticamente expresadas en un referencial S_0 en el que el sistema se encuentre en reposo (momento lineal nulo), contribuyen a la *función energía U* del sistema, y a su inercia *M*, con la Ecuación de Einstein expresada como:

$$M = Uc^{-2}. \quad (4)$$

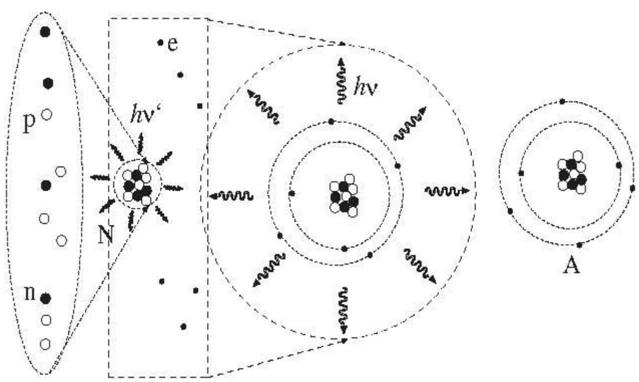

FIGURA 1. Formación de un átomo (A) a partir de su núcleo (N), previamente formado a partir de protones, neutrones, y de electrones (e), situados previamente en el infinito. La inercia del núcleo $M_N = U_N c^{-2}$ es menor que la suma de las inercias de sus componentes $U_N = 6m_p c^2 + 4m_n$, $M_A = U_N c^{-2} - |\Delta M_N|$, debido a la energía liberada en forma de fotones $\Delta M_N = -(8h\nu')c^{-2}$ cuando se forma el núcleo. La inercia del átomo $M_A = U_A c^{-2}$ es menor que la suma de las inercias de sus componentes $U = 6m_e c^2 + M_N c^2$, $M_A = U_A c^{-2} - |\Delta M_A|$, debido a la energía liberada en forma de fotones $\Delta M_A = -(8h\nu)\, c^{-2}$ cuando se forma el átomo.

Se puede definir también la inercia (se prefiere utilizar el término *inercia*, en lugar de masa [20], para evitar confusiones) *M* de un cuerpo como [22] (Fig. 1):

La inercia *M* de un cuerpo extenso es igual a la suma de las masas tabuladas de todas sus partículas elementales componentes (protones, neutrones y electrones) m_0:

$$m_0 = \sum_j m_p + \sum_k m_n + \sum_l m_e\,,$$

con energía asociada $U = m_0 c^2$, menos la energía mínima $\tilde{U}$, dividida por c^2, necesaria para separar dichas partículas elementales y situarlas a gran distancia unas de otras (Sec. III-A):

$$M = \left(U - \tilde{U}\right) c^{-2} = m_0 - \tilde{U}c^{-2}.$$

Aunque no es habitual definir la *energía interna* en los libros de texto de Termodinámica (normalmente se habla de que la energía interna es una función de estado del sistema, pero sólo se calculan sus *variaciones*), las magnitudes *función energía* y energía interna [1], coinciden si se consideran explícitamente las energías asociada a las masas m_j de las partículas constituyentes del sistema $(\sum_j m_j c^2)$ y sus energías de enlace nuclear, electrónico, etc., (Sec. III-A) además de las energías (energía cinética interna, energía de enlaces químicos, etc.) que habitualmente se asocian a la energía interna Termodinámica [7]. Esta definición de función energía es tan general que se puede aplicar incluso a sistemas formados por radiación térmica (fotones) [24] (Sec. 3.3.1).

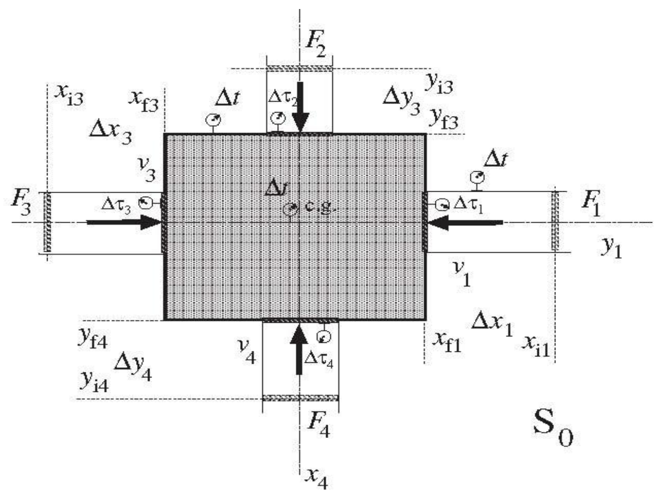

FIGURA 2. Fuerzas F_k (k = 1, 2, 3, 4) aplicadas, con impulso y torque nulos, sobre un sistema deformable durante un intervalo de tiempo Δt medido en el referencial S_0 en el que el sistema (c.g.) se encuentra en reposo, al menos, en sus estados de equilibrio inicial y final. Cada émbolo, con desplazamiento $\Delta r_k = r_{fk} - r_{ik}$ ($r \equiv x, y, z$) y desplazado con velocidad v_k, tiene su particular tiempo propio $\Delta\tau_k$. El 4-vector velocidad v_k^μ asociado al desplazamiento del *k*-ésimo émbolo viene dado por $v_k^\mu = \Delta r_k^\mu / \Delta\tau$, con $\Delta r_k^\mu = r_{fk}^\mu - r_{ik}^\mu = \left(\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k, c\Delta t\right)$.

B. Formulación Asíncrona

En la *Formulación Asíncrona* [25] de la Termodinámica Relativista se admite que existe un *referencial privilegiado* S_0, en el cual todas las fuerzas que se ejercen sobre el sistema se aplican simultáneamente, es decir, durante el mismo intervalo de tiempo $\Delta t = t_f - t_i$ y en el que el sistema, como un todo, permanece en reposo (al menos instantáneamente) ([26], p. 41). Se admite que en este referencial privilegiado S_0 un observador lleva a cabo el experimento correspondiente y que en él se miden todas las magnitudes necesarias para la descripción del mismo (Fig. 2). Tal y como se indica en la Ref. [26] (pp. 3-4), un 'observador' es un sistema completo de recogida de información, un sistema inercial de coordenadas espacio-temporal, con todos sus relojes sincronizados, que registra la posición (*x, y, z*) y el instante *t* de cada suceso. Cada 'observación' hecha por el observador inercial se corresponde con el acto de asignar las coordenadas *x, y, z* de la localización en que ha tenido lugar y el tiempo *t* indicado por un reloj situado en (*x, y, z*) cuando el suceso ha ocurrido.

En esta Formulación Asíncrona, un observador en el referencial S_A no intenta realizar un experimento similar al realizado en S_0 (esta forma de proceder constituiría una Formulación Síncrona [27]) sino que se refiere exactamente al *mismo* experimento [28] realizado en S_0.

Esta forma de proceder por parte del observador en S_A, implica, inevitablemente, que dos sucesos que sean simultáneos en S_0 ya no sean simultáneos – serán asíncronos – en S_A (efecto relativista de pérdida de la simultaneidad) [25]. Utilizando 4-vectores se puede enunciar el:

Principio de la Formulación Asíncrona [28]: Existe un *referencial privilegiado* S_0 en el cual todas las fuerzas que se ejercen sobre el sistema se aplican simultáneamente. Si en S_0 se define un 4-vector $A^\mu = B^\mu + C^\mu$, donde B^μ se define para el suceso $x_1^\mu = x_1, y_1, z_1, ct_1$ y C^μ se define para el suceso $x_2^\mu = x_2, y_2, z_2, ct_2$, con $x_1^\mu \neq x_2^\mu$, pero con $t_2 = t_1$, como:

$$A^\mu(x_1^\mu[t_1], x_2^\mu[t_1]) = B^\mu(x_1^\mu[t_1]) + C^\mu(x_2^\mu[t_1]) \,,$$

entonces la magnitud A^μ([t_1], [t_1]) en S_0 es la misma magnitud que ([t_{1A}], [t_{2A}])en S_A cuando todos los 4-vectores con subíndice A se obtengan de los correspondientes 4-vectores sin subíndice utilizando la transformación de Lorentz.

La denominación de 'referencial privilegiado' [*privileged observer* ([25], p. 746)] para S_0 puede parecer poco afortunada, pues sugiere una preferencia entre referenciales aparentemente incompatible con el Principio de Relatividad. En realidad, la elección del referencial S_0 se debe: (i) a que es necesario asegurar que exista al menos un referencial relativista en el que se cumpla la condición de simultaneidad en la aplicación de las fuerzas y tal que en el límite de bajas velocidades se recupere la descripción Galileo-Newtoniana, una condición siempre exigible, y (ii) a que es necesario asegurar que si el torque de las fuerzas aplicadas es nulo en un referencial, lo sea también en los demás referenciales [29]. Si la descripción de las fuerzas aplicadas se hace en un referencial en el que el cuerpo se encuentra en movimiento, no hay, en general, garantías de que exista un referencial en el que se pueda recuperar la descripción Galileo-Newtoniana. Algo semejante, elegir un referencial privilegiado que permita una equiparación con la descripción clásica, será necesario hacer respecto al calor (Sec. III-C) (en cuya descripción clásica ni siquiera se contempla la posibilidad de que pueda llegar a tener momento lineal asociado) en una generalización al intercambio de energía en forma de radiación térmica (Sec. III-C) de la Formulación Asíncrona original.

C. Principio de Similitud

Cuando se estudian sistemas extensos, formados por muchas partículas, y deformables, diferentes autores ([30], Cap. 13) han encontrado que se obtienen descripciones coherentes si se considera que las relaciones entre el momento lineal total **p**, la velocidad **v** y la energía total *E* de un cuerpo extenso formado por muchos componentes, se relacionan entre ellas como las mismas magnitudes **p** y *E* para una partícula elemental,

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2}\mathbf{v} \,,$$

y que **p** y *E* se transforman entre referenciales inerciales mediante transformaciones de Lorentz igual que lo hacen para una partícula elemental. Estas y otras observaciones [31], llevan a enunciar el:

Principio de Similitud [3]: cuando los procesos llevados a cabo sobre un cuerpo extenso permitan asegurar que se cumple en todo momento el Principio de Inercia de la Energía, se podrá considerar que la expresión matemática de una ley de la Física será la misma tanto si dicha ley se refiere a una partícula elemental, caracterizada por su masa *m*, como si se refiere a un sistema compuesto, caracterizado por su función energía *U*, y su inercia *M*, que bajo las circunstancias anteriores, estarían bien definidas a lo largo del proceso.

La forma de interpretar el Principio de Similitud es la siguiente. Las únicas ecuaciones básicas de física que pueden considerarse correctas son aquellas aplicadas a partículas elementales. La Ecuación de la Fuerza de Lorentz $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, la Segunda Ley de Newton Clásica, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, y ecuaciones relativistas como $E^2 = m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2$ o $\mathbf{p} = (E/c^2)\mathbf{v}$, etc., se aplican con seguridad a partículas elementales de masa tabulada *m* y carga eléctrica *q*, pues todas las magnitudes implicadas están bien definidas, $E = \gamma(v)mc^2$, $\mathbf{p} = \gamma(v)m\mathbf{v}$, etc., los campos eléctricos y magnéticos, etc., y las fuerzas aplicadas tienen carácter local, aplicándose todas ellas en el mismo punto. Del mismo modo, la transformación de un 4-vector $C^\mu = A^\mu + B^\mu$ o $C^\mu = c^{-1}qE^\mu_\nu v^\nu$, etc., entre referenciales inerciales, S_0 y S_A en configuración estándar, se puede llevar a cabo utilizando la transformación de Lorentz $L^\mu_\nu(V)$ con $C^\mu_A = L^\mu_\nu(V)C^\nu$, donde $C^\mu_A = A^\mu_A + B^\mu_A$, etc., es el mismo 4-vector en el referencial S_A que el 4-vector C^μ en S_0, pues todos ellos están (bien) definidos localmente.

En el caso de un cuerpo extenso y deformable (un núcleo atómico de Ni, un gas encerrado en un sistema cilindro-pistón, una esfera de Fe, etc.), si se quieren aplicar con seguridad estas mismas ecuaciones, y se quiere utilizar la misma transformación de Lorentz, la aplicación de una serie de fuerzas, con carácter no local, pues fuerzas diferentes se pueden aplicar en diferentes partes del cuerpo extenso (Fig. 2), se debe llevar a cabo de acuerdo con los métodos de la Formulación Asíncrona y de tal manera que se garantice que a lo largo del proceso considerado se cumple en todo momento el Principio de Inercia de la Energía. Es decir, en el caso de un cuerpo extenso y deformable los procesos se deben llevar a cabo de tal manera que durante la realización de los mismos el cuerpo se comporte realmente como un todo. Cuando se haya garantizado el cumplimiento del Principio de Inercia de la Energía se podrá aplicar el Principio de Similitud, utilizando para la descripción de los procesos llevados a cabo sobre dicho cuerpo extenso ecuaciones y transformaciones de 4-vectores no definidos localmente, que, en puridad, sólo se pueden aplicar con seguridad a partículas elementales y en procesos locales.

Sea un gas contenido en un sistema cilindro-pistón. Si las fuerzas aplicadas sobre el pistón dan lugar a que éste se desplace con una velocidad v_k, y esta velocidad v_k es mayor que la de la velocidad del sonido en el gas, v_s, con un tiempo característico de relajación del sistema t_C dependiendo de las dimensiones lineales L del sistema, $t_C \approx L / v_s$, $v_k \gg v_s$, dejará de cumplirse el Principio de Inercia de la Energía, pues habrá partes del sistema que no notarán las fuerzas aplicadas, no contribuirán a la inercia del sistema y éste no se comportará como un todo. La descripción de los procesos a intervalos de tiempo más pequeños que el tiempo característico no se podrá hacer de acuerdo con un formalismo que utilice el Principio de Similitud y tendrá que recurrirse a otros formalismos [32]. Del mismo modo, si un cuerpo tiene dimensiones lineales tan grandes que una perturbación sobre el mismo tiene un tiempo de relajación característico muy grande para llegar a todo el sistema, el formalismo basado en el Principio de Similitud no podrá ser aplicado a intervalos de tiempo menores que éste [33].

Por ejemplo, para un cuerpo a temperatura T, con función energía $U \equiv U(T)$ (no se considera la dependencia de U con el volumen), y $M(T) = U(T)c^{-2}$, que es la energía total del sistema en el referencial S_0 en el que el sistema se encuentra en reposo, que se mueve con velocidad v (unidimensional) en un cierto referencial S_A, su momento lineal p_A y su energía total E_A vienen dadas por:

$$p_A = \gamma(v) M(T) v = \gamma(v) \frac{U(T)}{c^2} v,$$

$$E_A = \gamma(v) U(T) = \gamma(v) M(T) c^2,$$

$$p_A = \frac{E_A}{c^2} v.$$

Estas ecuaciones constituyen la generalización de las definiciones $p_A = \gamma(v)mv$ y $E_A = \gamma(v)mc^2$ para el momento lineal y la energía total de una partícula elemental de masa m y velocidad v. La energía total E_A de un sistema compuesto se expresa como [22]:

$$E_A^2 = [U(T)]^2 + c^2 p_A^2 = [M(T)]^2 c^4 + c^2 p_A^2. \quad (5)$$

Esta Ec. (5) es la generalización en este contexto termodinámico de la ecuación $E_A^2 = m^2c^4 + c^2 p_A^2$ para una partícula elemental.

Para una partícula elemental de masa m, su energía cinética se define como $K_A = [\gamma(v_A) - 1]\, mc^2 = E_A - mc^2$. Para un cuerpo formado por j partículas (o cuerpos extensos) de inercia M_j, no interaccionantes, con velocidades respectivas v_j en el referencial S_0, se tienen un momento lineal total p nulo (por definición de S_0), una energía total E, una función energía U, una inercia M, y una energía cinética interna (energía cinética en el referencial S_0 en el que el momento lineal total del sistema es cero) K_I dados por:

$$p = \sum_j \gamma(v_j) M_j v_j = 0,$$

$$E = \sum_j \gamma(v_j) M_j c^2,$$

$$U = E$$

$$M = c^{-2} U = \sum_j \gamma(v_j) M_j,$$

$$K_I = \sum_j \left[\gamma(v_j) - 1\right] M_j c^2 = E - u;\ u = \sum_j M_j c^2 \neq Mc^2.$$

Considerando las transformaciones relativistas ([17], pp. 264-265) (Sec. 4.2):

$$\gamma(v_{jA}) = \gamma(V)\gamma(v_j)\left(1 - \frac{v_j V}{c^2}\right),$$

$$\gamma(v_{jA}) v_{jA} = \gamma(V)\gamma(v_j)(v_j - V),$$

donde v_{jA} es la velocidad en S_A de un componente que se mueve con velocidad v_j en S_0, para un observador en S_A se tendrá un momento lineal p_A, una energía total E_A y una energía cinética total K_A, dados por:

$$p_A = \sum_j \gamma(v_{jA}) M_j v_{jA} = -\gamma(V) MN,$$

$$E_A = \sum_j \gamma(v_{jA}) M_j c^2 = \gamma(V) Mc^2,$$

$$K_A = \sum_j \left[\gamma(v_{jA}) - 1\right] M_j c^2 = E_A - u = [\gamma(V) - 1]\, Mc^2 + K_I.$$

Las ecuaciones en S_A de p_A y E_A son las correspondientes a una partícula elemental, siempre que se pueda asegurar que al cuerpo se le puede asignar una inercia M en cada momento. La energía cinética total K_A es igual a la suma como un todo de un cuerpo de inercia M que se mueve con velocidad V, más la energía cinética interna K_I, lo que constituye la generalización relativista del Teorema de Köning clásico ([23], p. 198).

Para aquellas ecuaciones en las que intervengan magnitudes que se refieran a propiedades colectivas de un sistema (temperatura, presión, viscosidad, etc.), por ejemplo, la Ecuación térmica de estado de un gas ideal $PV = nRT$, se deberá recurrir a otro tipo de razonamientos para obtener las correspondientes ecuaciones relativistas.

III. PRIMER PRINCIPIO DE LA TERMODINÁMICA. COVARIANTE LORENTZ

El Principio de Inercia de la Energía junto con el Principio de Similitud implican: (i) que la formulación en forma de 4-vectores, covariante Lorentz, del Primer Principio de la Termodinámica, debe tener la misma forma funcional que el Primer Principio de la Termodinámica Clásica y (ii) debe ser válida en procesos en los que la descripción relativista completa de los fenómenos exija que intervengan fotones.

A. Función energía de diferentes cuerpos

La función energía U de un sistema formado por muchos componentes, por ejemplo, átomos, –que, a su vez, van a estar formados por otros componentes, más básicos, núcleo y electrones en interacción electromagnética, con el núcleo, a su vez, formado por protones y neutrones unidos mediante la interacción fuerte (no se va a considerar el interior de los protones o los neutrones [34]) – es una función de estado, pero no es una función aditiva de las partículas elementales que forman el sistema [35, 36], pues va a depender de cómo se encuentren interaccionando dichas partículas elementales. Por tanto, para un sistema compuesto esta función debe ser obtenida secuencialmente a partir de sus partículas elementales componentes.

1. Las constantes universales (c, h (Planck), k_B (Boltzmann), etc.) son invariantes relativistas [37].

2. Protones, neutrones y electrones (tomados como partículas elementales; se considera que en los procesos que se van a estudiar, estas partículas elementales nunca son aniquiladas y que siempre se encuentran en el mismo estado) contribuyen a la función energía como $U_p = m_p c^2$, $U_n = m_n c^2$, $U_e = m_e c^2$, donde m_p es la masa del protón, etc.

3. La función energía U_N del núcleo atómico de un átomo , de un número atómico Z y número másico A, viene dada por:

$$U_N = Zm_p c^2 + (A-Z)m_n c^2 - |\tilde{U}_N|,$$

donde la inercia del conjunto $M_N = U_N c^{-2}$ es menor [33], debido a la interacción fuerte, que la suma de las masas de sus partículas elementares constituyentes, protones, (m_p) y neutrones (m_n), en una cantidad $\tilde{U}_N c^{-2}$, igual a la energía liberada en la formación del núcleo, dividida por c^2 [19] (Fig. 1).

4. En la Formación de un átomo , intervienen Z electrones mediante interacción electromagnética con el núcleo formado con anterioridad (Fig. 1). La función energía de un átomo U_A (inercia M_A) con un núcleo con Z protones, $A - Z$ neutrones y Z electrones

$$U_A = U_N + Zm_e c^2 - |\tilde{U}_A|, \tag{6}$$

donde $\tilde{U}_A$ es la energía de enlace (negativa) liberada por el átomo al formarse [38], la misma energía que hay que aportar si se quieren arrancar a todos los electrones del núcleo.

5. Para un sistema formado por un conjunto de componentes no interaccionantes [39], por ejemplo, un mol de átomos de He a alta temperatura encerrados en un recipiente, la inercia del sistema es igual a la suma de las energías totales de sus componentes, dividida por c^2 (Sec. 4.1).

6. Para la radiación térmica contenida en una cavidad (conjunto de fotones térmicos) [40] su inercia es igual a la suma de las energías de dichos fotones [41], dividida por c^2. La energía emitida por un cuerpo en forma de radiación térmica se trata como radiación térmica en una cavidad [42] (Sec. 3.3).

A.1 El 4-vector función energía U^μ

En el referencial S_0, en el que el momento lineal del sistema es cero, el 4-vector función energía, U^μ, viene dado por [21]:

$$U^\mu = (0, 0, 0, U) = (0, 0, 0, Mc^2) .$$

Para un observador en un referencial S_A se tendrá que el 4-vector es (Ap. A):

$$U^\mu_A = L^\mu_\nu(V)U^\nu ,$$

donde (V) es el 4×4-tensor de la transformación de Lorentz para la configuración estándar. Con = {cp_A, 0, 0, E_A}, el observador en S_A asigna al cuerpo un momento lineal p_{xA} –de acuerdo con el Principio de Inercia de la Energía– y una energía total E_A dadas por:

$$p_{xA} = -\gamma(V)\frac{U}{c^2}V = -\gamma(V)MV ,$$

$$E_A = \gamma(V)U ,$$

con la norma invariante (Ap. A) del 4-vector dada por:

$$\|U^\mu_A\| = (E_A^2 - c^2 p_{xA}^2)^{1/2} = U .$$

La energía total E_A es la suma de la energía cinética, $K_A = [\gamma(V) - 1]U$ y la función energía U. Es precisamente la transformación de Lorentz la que pone de manifiesto cómo la función energía contribuye al momento lineal del sistema y, por tanto, a su inercia.

B. Trabajo de configuración

Para poder aplicar la Formulación Asíncrona, en el referencial privilegiado S_0, el conjunto de k *fuerzas externas* $\mathbf{F}_k = (F_{xk},F_{yk},F_{zk})$ se aplican todas ellas simultáneamente durante un mismo intervalo de tiempo [16] Δt, con desplazamiento $\Delta r_k = (\Delta x_k, \Delta y_k, \Delta z_k)$ para la k-ésima fuerza, $\mathbf{F}_k$ (Fig. 2).

En el referencial S_0, para la k-ésima fuerza aplicada sobre el k-ésimo pistón, el 3-vector impulso $\mathbf{I}_k =(I_{xk}, I_{yk}, I_{zk})$, $\mathbf{I}_k = \mathbf{F}_k\Delta t$ y el escalar trabajo (todas las fuerzas son conservativas) δW_k, $\delta W_k = \mathbf{F}_k\, \mathrm{d}x_k$ (producto 'fuerza-desplazamiento' [43]), vienen dados por

$$\mathbf{I}_k = \left(F_{xk}\mathrm{d}t, F_{yk}\mathrm{d}t, F_{zk}\mathrm{d}t\right),$$

$$W_k = \mathbf{F}_k\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}_k = F_{xk}\mathrm{d}x_k + F_{yk}\mathrm{d}y_k + F_{zk}\mathrm{d}z_k .$$

B.1 El 4-vector trabajo W^μ

En el contexto de la formulación de Einstein de la Teoría electromagnética ([44], Sec. 7.1), para una partícula puntual, con carga eléctrica q, que se mueve con velocidad v $=(v_x, v_y, v_z)$, $v = |\mathrm{v}|$, con 4-vector velocidad $v^\mu=\gamma(v)\ \{v_x, v_y, v_z, c\}$, en un campo eléctrico $\mathbf{E} =(E_x, E_y, E_z)$ caracterizado por el 4×4-tensor mixto $E^{\mu}_{\nu} = g_{\nu\chi} E^{\chi\mu}$ ([17], Part IV):

$$E^{\mu}_{\nu} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & E_x \\ 0 & 0 & 0 & E_y \\ 0 & 0 & 0 & E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{Bmatrix},$$

se define el 4-vector fuerza de Minkowski F^μ como:

$$F^{\mu} = \frac{q}{c} E^{\mu}_{\nu} v^{\nu} = \gamma(v)\left(qE_x, qE_y, qE_z, c^{-1}\left(qE_x v_x + qE_y v_y + qE_z v_z\right)\right).$$

Para la fuerza $\mathbf{F}_k$ – supuesta constante –, que actúa sobre el k-ésimo émbolo (Fig. 2), se puede suponer que dicha fuerza viene producida por un campo eléctrico $\mathbf{E}_k$ que actúa sobre una partícula de carga q depositada sobre dicho émbolo, $\mathbf{F}_k = q\mathbf{E}_k$ (Sec. 4). Se define el 4-tensor $F_k^{\nu\mu}$ –doble contravariante – campo de fuerzas ([45] Sec. 42):

$$F_k^{\nu\mu} = qE_k^{\nu\mu} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & -F_{xk} \\ 0 & 0 & 0 & -F_{yk} \\ 0 & 0 & 0 & -F_{zk} \\ F_{xk} & F_{yk} & F_{zk} & 0 \end{Bmatrix}.$$

El 4-tensor mixto $F_{k\nu}^{\ \mu}$ se obtiene utilizando el tensor métrico $g_{\nu\mu}$ (Ap. A) haciendo:

$$F_{k\nu}^{\ \mu} = g_{\nu\xi} F_k^{\xi\mu} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{xk} \\ 0 & 0 & 0 & F_{yk} \\ 0 & 0 & 0 & F_{zk} \\ F_{xk} & F_{yk} & F_{zk} & 0 \end{Bmatrix}.$$

Para la fuerza $F_{k\nu}^{\ \mu}$, asociada al desplazamiento $\mathrm{d}r_k = (\mathrm{d}x_k, \mathrm{d}y_k, \mathrm{d}z_k)$ del k ésimo émbolo, y que actúa durante intervalo de tiempo, Δt, se pueden obtener dos 4-vectores: (i) el 4-vector fuerza de Minkowski F_k^μ y (ii) el 4-vector trabajo δW_k^μ:

1. Para el desplazamiento del k-ésimo émbolo se tiene el 4-vector velocidad v_k^μ dado por (Fig. 2):

$$v_k^\mu = \frac{dx_k^\mu}{d\tau_k} = \gamma(v_k)\left(v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}, c\right);\ v_{xk} = \frac{dx_k}{dt}, \text{ etc.},$$

con $\mathrm{d}t = \gamma(v_k)\mathrm{d}T_k$. El 4-vector fuerza de Minkowski F_k^μ para la k-ésima fuerza es:

$$cF_k^{\mu} = F_{k\nu}^{\ \mu} v_k^{\nu} = \gamma(v_k)\left(cF_{xk}, cF_{yk}, cF_{zk}, \mathbf{F}_k\cdot\mathbf{v}_k\right),$$

con $\mathbf{F}_k\cdot\mathbf{v}_k = F_{xk}v_{xk} + F_{yk}v_{yk} + F_{zk}v_{zk}$.

2. El 4-vector trabajo (infinitesimal) δW_k^μ para la k-ésima fuerza se define como:

$$\begin{aligned} \delta W_k^{\mu} &= F_{k\nu}^{\ \mu} dx_k^{\nu}, \\ &= \left(cF_{xk}dt, cF_{yk}dt, cF_{zk}dt, F_{xk}dx_k + F_{yk}dy_k + F_{zk}dz_k\right), \\ &= \left(cI_{xk}, cI_{yk}, cI_{zk}, W_k\right), \end{aligned}$$

un 4-vector con unidades de energía. Tomando la derivada respecto del tiempo propio $\mathrm{d}\tau_k$ de δW_k^μ:

$$\frac{\delta W_k^{\mu}}{d\tau_k} = \frac{dt}{d\tau_k}\frac{\delta W_k^{\mu}}{dt} = cF_k^{\mu},$$

con $dt/d\tau_k = \gamma(v_k)$ (factor de Lorentz asociado al movimiento del k-ésimo émbolo), se obtiene el 4-vector fuerza de Minkowski F_k^μ. Esta forma de obtener el 4-vector F_k^μ mediante derivación respecto del tiempo propio confirma que la estructura construida δW_k^μ es ella misma un 4-vector [3]. Todo dispositivo con el que el sistema pueda intercambiar trabajo reversible, constituye un *foco mecánico* ([8], pp. 98-99)

Las condiciones de la Formulación Asíncrona indican que, posteriormente a la obtención de los 4-vectores (finitos) W_k^μ de cada una de las fuerzas aplicadas, se puede obtener el 4-vector trabajo (impulso-trabajo) total W^μ como suma de los 4-vectores de todas las fuerzas externas aplicadas, que debe tomar la forma:

$$W^\mu = \sum_k W_k^\mu = (0,0,0,W) \quad ; W = \sum_k W_k \, ,$$

Para un observador en el referencial S_A, el 4-vector trabajo total W_A^μ vendrá dado por [13]:

$$W_A^\mu = L_\nu^\mu(V) W^\mu = \left(-c\gamma(V)\left(Wc^{-2}\right)V, 0, 0, \gamma(V)W\right),$$

con

$$\left\| W_A^\mu \right\| = \left(W_A^2 - c^2 I_{xA}^2\right)^{1/2} = W \, .$$

C. Calor

Antes de obtener el calor Q (energía intercambiada como radiación térmica ([46], Sec. 9.3) por un cuerpo en algún proceso) en forma de 4-vector Q^μ, se va a considerar expresar en forma de 4-vector U_F^μ la radiación térmica contenida en una cavidad cuyas paredes se encuentran a temperatura T (sistema termodinámico cuya densidad de energía es proporcional a la cuarta potencia de la temperatura absoluta) ([47], Cap. 23).

Al asociar energía U_F a la radiación térmica contenida en una cavidad en el referencial S_0 en el que las paredes de dicha cavidad se encuentran en reposo, a esta energía se le debe asociar una inercia $M_F = U_F c^{-2}$ en un referencial S_A que se mueva respecto de S_0. Para dotar de significado físico al momento lineal $p_F = \gamma(V) M_F V$ asociado a U_F en S_A, se va a describir la radiación térmica contenida en la cavidad como un conjunto de fotones térmicos (conjunto de fotones cuyas frecuencias siguen una distribución de Planck) [48].

Para un fotón de longitud de onda λ y frecuencia angular $\omega = 2\pi / T$, período T (sin confusión con la temperatura), que se propaga en la dirección dada por el vector de onda **k**:

$$\mathbf{k} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta, \frac{2\pi}{\lambda}\operatorname{sen}\theta, 0\right),$$

(por simplicidad no se considera la dimensión z) el 4-vector vector de onda [49] ([17], p. 249) ω^μ es:

$$\omega^\mu = \left(c\frac{2\pi}{\lambda}\cos\theta, c\frac{2\pi}{\lambda}\operatorname{sen}\theta, 0, \frac{2\pi}{T}\right).$$

En el referencial S_0, en el que las paredes de la cavidad se encuentran en reposo, el momento lineal del conjunto de fotones contenido en la misma es cero. Por simplicidad de cálculo (particularmente, evitar integrales sobre frecuencias y, posteriormente, simplificar las transformaciones relativistas de frecuencias entre referenciales) se considera una aproximación monocromática [50], (que tiene las características más importantes de la distribución de Planck) en la que se considera que todos los fotones tienen la misma frecuencia $\nu, \nu(T) = AT^{-1}$ (Ley de Wien).

Para el r-ésimo fotón, con frecuencia ν y que se mueve en la dirección ($\cos\theta_r$, $\operatorname{sen}\theta_r$, 0) se tiene $(\lambda\nu = c, \hbar = h/2\pi)$ el 4-vector energía u_r^μ para ese fotón es:

$$u_r^\mu = \hbar\omega_r^\mu = \left\{c\left[\frac{h\nu}{c}\right]\cos\theta_r, c\left[\frac{h\nu}{c}\right]\operatorname{sen}\theta_r, 0, h\nu\right\}.$$

La norma de este 4-vector es $\left\| u_r^\mu \right\| = 0$. A un fotón individual, con momento lineal $p_F = h\nu / c$ y energía $E_F = h\nu$, no se le asocia ni función energía ni inercia.

En el referencial S_0, el momento lineal $\mathbf{P}_F = (p_{xF}, p_{yF}, 0)$, de un conjunto de N fotones dentro de una cavidad a temperatura T, y su energía total, E_F, son tales que:

$$p_{xF} = \sum_r \frac{h\nu}{c}\cos\theta_r = 0,$$
$$p_{yF} = \sum_r \frac{h\nu}{c}\operatorname{sen}\theta_r = 0,$$
$$U_F(T) = \sum_r h\nu = Nh\nu(T),$$

tal que el 4-vector U_F^μ viene dado como suma de los 4-vectores de todos los fotones –los fotones son independientes–, y

$$U_F^\mu = \sum_k u_k^\mu = \left(0,0,0,U_F(T)\right) ; U_F(T) = Nh\nu \, .$$

El número de fotones que, en un instante dado, se encuentran en la cavidad es un invariante relativista [37].

La función energía de un conjunto de fotones, $U_F(T)$, viene dada por

$$U_F(T) = \left(E_F^2 - c^2 p_F^2\right)^{1/2} = Nh\nu \neq 0 \, .$$

A la radiación térmica contenida en la cavidad se le asocia una inercia $M_F = U_F(T)c^{-2}$, de acuerdo con el Principio de Inercia de la Energía [51] y el Principio de Similitud.

Nótese que, de acuerdo con su definición, la función energía de un haz estrecho de radiación electromagnética [52], o de un haz de fotones proveniente de un láser [53], es nula (y su inercia es también nula).

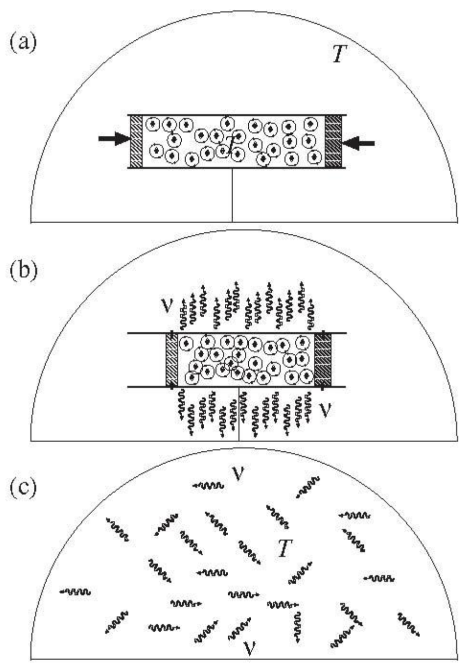

FIGURA 3. (a) Un gas contenido en un cilindro es comprimido bajo la acción de dos émbolos dentro de una cavidad a temperatura *T* (proceso isotermo), respecto de la cual se mantiene en reposo (su centro de masas se encuentra en reposo en los estados inicial y final de equilibrio termodinámico). (b) Durante el proceso de compresión se emiten fotones de frecuencia $\nu=\nu(T)$ con momento lineal total nulo. (c) El calor emitido durante la compresión se modeliza como energía asociada a la radiación formada por todos los fotones emitidos contenida en la cavidad $U_F(T) = Nh\nu$ (cambiada de signo).

C. 1 El 4-vector calor Q^μ

Una vez descrito mediante un 4-vector U_F^μ el gas de fotones contenido en una cavidad, se va a caracterizar como 4-vector Q^μ el calor intercambiado por un cuerpo. Para ello, dicho calor se tratará como un gas de fotones en una cavidad, formado por los fotones que se emiten, o se absorben, a través de la frontera del cuerpo (Fig. 3). Una cavidad con paredes a temperatura *T*, llena de radiación en equilibrio con dichas paredes, con la que el sistema pueda intercambiar calor, constituye un *foco térmico* ([8], pp. 98-99).

Un fotón, de frecuencia ν y dirección **u**, emitido por un cuerpo Z, contribuye con $-h\nu\mathbf{u}/c$ a la variación de momento lineal y con $+h\nu$ a la variación de energía total de Z. Un fotón absorbido por Z contribuye con $+h\nu\mathbf{u}/c$ a la variación de momento lineal y con $+h\nu$ a la variación de energía total de Z. No hay trabajo mecánico asociado a la absorción o emisión de radiación térmica (fotones) por parte de un cuerpo [54], pues se considera que los fotones absorbidos y los emitidos constituyen dos fases termodinámicas en equilibrio.

En el referencial S_0, el 4-vector *calor* (*momento-energía radiante*) Q^μ del sistema termodinámico cuando absorbe (+) o emite (-), N fotones de frecuencia ν(T), a un foco térmico, es:

$$Q^\mu = -U_F^\mu = \left(0, 0, 0, \pm U_F(T)\right),$$

con $U_F(T) = Nh\nu$.

Para un observador en el referencial S_A, que observa el gas de fotones emitidos o absorbidos, es:

$$p_{FA} = -\gamma(V)\; U_F(T)c^{-2}\; V = -\gamma(V)VM_F(T),$$

$$E_{FA} = \gamma(V)U_F(T) = -\gamma(V)M_F(T)c^2,$$

$$U_{FA}(T) = \left\|Q^\mu\right\| = \left(E_{FA}^2 - c^2 p_{FA}^2\right)^{1/2} = U_F(T) = M_F(T)c^2,$$

con la función energía $U_F(T)$ y la inercia $M_F(T)$, invariantes relativistas. Si el calor *Q* se define como la norma del 4-vector Q^μ, que es igual a la energía intercambiada en forma de fotones térmicos (momento lineal total nulo) en el referencial S_0, entonces el calor es un invariante relativista [14].

Dado un sistema termodinámico encerrado en un recipiente a temperatura *T*, la materia constituyente del mismo –átomos, moléculas, etc. – debe encontrarse en equilibrio termodinámico (distribución de Boltzmann para los niveles de energía de los átomos y distribución de Maxwell para sus velocidades) con la radiación térmica (distribución de frecuencias de Planck), siempre presente, contenida también en el sistema [55]. Debido al Principio de Inercia de la Energía la función energía asociada a la radiación térmica, en forma de 4-vector, y la función energía asociada al movimiento e interacción de la materia, también en forma de 4-vector, se transforman del mismo modo para observadores en movimiento relativo. Por tanto, sistemas que para un observador se encuentran en equilibrio termodinámico, con la radiación térmica en equilibrio con la materia a la misma temperatura, para los demás observadores inerciales, a través del cálculo de las normas, las funciones energía y las asignaciones de temperatura a las mismas, también estarán en equilibrio. El equilibrio termodinámico es un invariante relativista.

D. Primer Principio

De acuerdo con la Generalización de la Formulación Asíncrona de la Termodinámica Relativista en relación a los 4-vectores U^μ, W^μ y Q^μ se tiene que, en las condiciones adecuadas, el formalismo del cálculo con 4-vectores de Minkowski en Relatividad Especial se puede utilizar tanto para magnitudes definidas localmente como para magnitudes definidas no localmente en un espacio-tiempo de Minkowski (sin curvatura). Es decir, para magnitudes definidas tanto sobre partículas puntuales como sobre cuerpos extensos [31]. Se eleva a la categoría de principio el:

Primer Principio de la Termodinámica [15]: para todo sistema termodinámico, que interacciona con un foco mecánico y un foco térmico, existe un referencial S_0 en el que utilizando el Principio de Inercia de la Energía, el Principio de la Formulación Asíncrona Generalizada y, en las condiciones de aplicabilidad del Principio de Similitud, se puede escribir, con cada magnitud expresada en forma de 4-vector, que [56]:

$$\Delta U^{\mu} = U_f^{\mu} - U_i^{\mu} = W^{\mu} + Q^{\mu}. \tag{7}$$

D. 1 Primer Principio en S_A

Una vez se han descrito los procesos en el referencial S_0, con intervalos de tiempo, Δt, desplazamientos, Δx, fuerzas, F, velocidades, v, momentos, p, energías, E, etc., medidos en dicho referencial, otro observador inercial, en el referencial S_A, en configuración estándar respecto de S_0, debe expresar con sus propias magnitudes, intervalos de tiempo, Δt_A, desplazamientos, Δx_A, fuerzas, F_A, velocidades, v_A, momentos, p_A, energías, E_A, *de aquellos procesos que ya han sido descritos en* S_0, utilizando para ello ecuaciones que deben tener la misma forma funcional que las utilizadas por el observador en S_0 (Principio de Relatividad).

En el referencial S_A (configuración estándar, velocidad V) el Primer Principio de la Termodinámica se expresa:

$$\Delta U_A^{\mu} = U_{fA}^{\mu} - U_{iA}^{\mu} = W_A^{\mu} + Q_A^{\mu},$$

con los correspondientes 4-vectores en S_A obtenidos mediante la transformación de Lorentz. La covarianza de las ecuaciones asegura que para un mismo proceso siempre se obtienen resultados equivalentes en S_A y en S_0 (Sec. V).

IV COMPRESIÓN ISOTERMA DE UN GAS IDEAL

Un cilindro horizontal, de sección A, longitud L, se encuentra cerrado por un émbolo (pared móvil) y una base, y contiene 1 mol, N_A átomos, de He. El sistema se comporta como un gas ideal, con Ecuación Térmica de Estado, $PV = N_A k_B T$. El gas, inicialmente ocupando un volumen V_i, bajo presión P_i y a temperatura T se encuentra en equilibrio termodinámico, con $P_i V_i = RT$ (Fig. 4).

Cada átomo de He –sistema auto-confinado formado por dos protones, dos neutrones y dos electrones– (Fig. 1) es un componente del sistema y tiene una función energía u dada por (Sec. 3.1):

$$u = u_0 - \left|\tilde{u}_N\right| + \left|\tilde{u}_A\right| , \tag{8}$$

$$u_0 = 2\left(m_p + m_e + m_n\right) c^2 , \tag{9}$$

–m_p, m_p y m_e masas tabuladas del protón, neutrón y electrón, respectivamente– donde $\tilde{u}_N$ es la energía de enlace (negativa) del núcleo y $\tilde{u}_A$ es la energía de enlace (negativa) del átomo. La inercia de cada componente del sistema (átomo de He) es $m = uc^{-2}$.

Como frontera del sistema se toma el propio cilindro, cuyas paredes exteriores se caracterizan como diatermas. El émbolo y la base se consideran paredes adiabáticas.

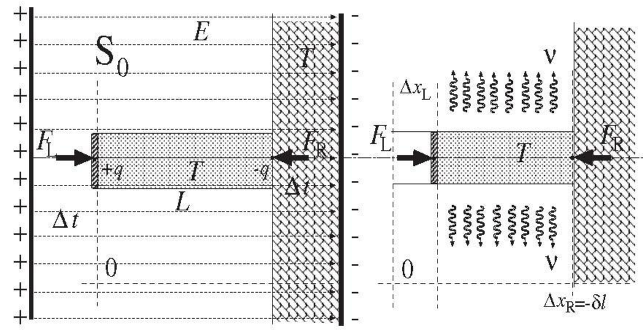

FIGURA 4. Gas a temperatura T encerrado en un cilindro de paredes diatermas, y dotado de un émbolo, que es comprimido bajo la acción de una fuerza $F_L = qE$ que actúa sobre el émbolo debido a la interacción de una carga q depositada sobre el émbolo con un campo eléctrico E entre las placas de un condensador cargado, que se desplaza Δx_L. La base del cilindro, cerrado, se apoya en una pared. Sobre esta base, en la que hay depositada una carga $-q$, se aplica una fuerza $F_R = -qE$, con desplazamiento asociado $\Delta x_R = -\delta l$. Durante el proceso de compresión, se emiten fotones a un foco térmico a temperatura T. El proceso de compresión isoterma se observa desde el referencial S_0 en que el sistema se encuentra en reposo. Las fuerzas se aplican simultáneamente y el conjunto de fotones emitidos tienen momento lineal total nulo.

A. Compresión isoterma en el referencial S_0

Se toma como referencial S_0 aquel en el que el momento lineal del gas es cero en todo momento, que coincide con el referencial en el que el cilindro permanece en reposo junto con la pared en la que se encuentra fijado (Fig. 5). Aunque el centro de gravedad del gas se va a desplazar a lo largo del proceso de compresión, su velocidad final es cero. En el referencial S_0 las fuerzas, cuya resultante es cero, se aplican simultáneamente durante el intervalo de tiempo Δt.

1. *Función Energía*. Para facilitar los cálculos, se puede aplicar, una aproximación mono-cinética, el equivalente cinético a la aproximación monocromática para la radiación térmica en una cavidad. En esta aproximación, todos los átomos que forman el gas se mueven con la misma velocidad $\mathbf{v}$, aunque en diferentes direcciones, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, 0)$ – se considera que los átomos de He se mueven en el plano x-y –, tal que $v(T) = aT^{1/2}$ es la velocidad de los componentes del gas, siendo T la temperatura absoluta del gas. La constante a se determina imponiendo que la energía cinética de un componente sea

igual a $k_B T$, *i.e.*, $\gamma(v)-1\ u = k_B T$.

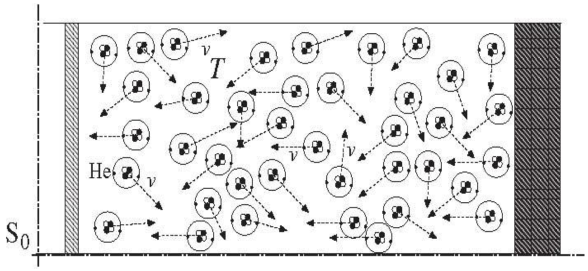

FIGURA 5. Sistema formado por (1 mol de) átomos de He, a temperatura *T*. En la aproximación mono-cinética, cada átomo se mueve con velocidad $|\mathbf{v}| = v$. En el referencial S_0 el momento lineal total del sistema es cero. Cada átomo tiene una cierta energía cinética $K = \ \gamma(v)-1\ u$, donde $v(T) = aT^{1/2}$.

En esta aproximación mono-cinética, el momento lineal $\mathbf{p}_j = (p_{xj}, p_{yj}, 0)$ y la energía total, E_j del *j*-ésimo componente son:

$$p_{xj} \ = \gamma(v) m v_{xj} \ ,$$
$$p_{yj} \ = \gamma(v) m v_{yj} \ ,$$
$$E_j \ = \gamma(v) u \ ,$$

En S_0 el momento lineal inicial del sistema $\mathbf{p}_i$ y su energía total, función energía, U_i son:

$$p_{xi} \ = \sum_j p_{xj} = \sum_j \gamma(v) m v_{xj} \ = 0 \ ,$$
$$p_{yi} \ = \sum_k p_{yj} = \sum_j \gamma(v) m v_{yj} \ = 0 \ ,$$
$$U_i \ = \sum_j \gamma(v) u = N_A \gamma(v) u \ .$$

El 4-vector función energía inicial U_i^{μ} para el sistema es:

$$U_i^{\mu} = \ 0,0,0,U_i \ ; U_i = \gamma(v) N_A u \ .$$

La dependencia de la función energía con la temperatura $U(T) = \gamma(v) N_A u$ se obtiene a partir de la dependencia de la velocidad $v = v(T)$ con la temperatura. Esta energía total es, por definición $(\mathbf{p}_i = 0)$, la función energía del sistema, $U_i = K_i + U$, igual a la suma de las energías cinéticas de los átomos de He $K_i = N_A \ \gamma(v)-1\ u$, y de la suma de las funciones energía de cada componente $U = N_A u$.

Considerando que la temperatura (y la velocidad de los componentes del sistema en la aproximación mono-cinética) no varía a lo largo del proceso, el 4-vector función energía final, U_f^{μ} , es

$$U_f^{\mu} = \ 0,0,0,U_f \ = U_i^{\mu} \ ,$$

con $U_f = U_i = U(T)$.

2. *Trabajo*. De acuerdo con la Formulación Asíncrona, en el referencial S_0 –en el que las armaduras del condensador cargado, entre las que se crea el campo eléctrico que se va a utilizar para mover el émbolo y la base del cilindro, permanece en reposo–, se aplican dos fuerzas, $F_R = F$, sobre la base (derecha, *R*) del cilindro y una fuerza F_L sobre el émbolo (izquierda, *L*), que se desplaza sin rozamiento, tal que $F_L = -F_R = F$. Dichas fuerzas F_L y F_R se aplican simultáneamente durante el intervalo de tiempo Δt. El conjunto del condensador cargado, entre cuyas placas se mantiene una diferencia de potencial constante, y la batería eléctrica que mantiene constante dicha diferencia de potencial, constituye un foco mecánico, con el que el gas puede intercambiar trabajo de forma reversible ([9], pp. 60-62). En la Fig. 4 se muestra el proceso de compresión del gas encerrado en el cilindro bajo la acción de un campo eléctrico $\mathbf{E} = (E,0,0)$ que actúa durante un intervalo de tiempo Δt sobre una carga $+q$ depositada sobre el émbolo **L**, que se desplaza una distancia $\Delta x_L = \Delta x$ y por la acción del mismo campo sobre una carga $-q$ depositada sobre la base **R**, con desplazamiento $\Delta x_R = \delta l \approx 0$. El campo eléctrico aplicado viene caracterizado por el 4-tensor campo electromagnético $E_{\nu}^{\mu} = g_{\nu\xi} E^{\xi\mu}$ dado por:

$$E_{\nu}^{\mu} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

Con los 4-vectores desplazamiento Δx_R^{μ} y Δx_L^{μ} dados por:

$$\Delta x_R^{\mu} \ = \ -\delta l, 0, 0, c\Delta t \ \ ,$$
$$\Delta x_L^{\mu} \ = \ \Delta x, 0, 0, c\Delta t \ \ ,$$

los trabajos realizados por el émbolo y la base sobre el gas se obtienen haciendo:

$$W_L^{\mu} = qE_{\nu}^{\mu} \Delta x_L^{\nu} = \ cqE\Delta t, 0, 0, qE\Delta x \ \ ,$$
$$W_R^{\mu} = -qE_{\nu}^{\mu} \Delta x_R^{\nu} = \ -cqE\Delta t, 0, 0, qE\delta l \ \ ,$$

con la componente temporal de estos 4-vectores igual al trabajo realizado por las respectivas fuerzas.

En S_0 el impulso I de las fuerzas aplicadas es nulo, y el trabajo de las fuerzas externas aplicadas, con desplazamientos respectivos $\Delta x_R = -\delta l(\delta l \approx 0)$ y Δx_L = Δx, es:

$$W = F_L \Delta x_L + F_R \Delta x_R = qE \quad \Delta x + \delta l \quad .$$

El 4-vector trabajo (impulso-trabajo) W^{μ} en S_0 es:

$$W^{\mu} = W_L^{\mu} + W_R^{\mu} = \quad 0, 0, 0, qE \quad \Delta x + \delta l \quad . \tag{11}$$

3. *Calor*. El sistema se encuentra en contacto diatermo con un foco térmico a temperatura T. En todo momento el sistema se encuentra en reposo en S_0 y respecto de la radiación de fondo (o de las paredes que producen la radiación que se comporta como foco térmico). Durante la lenta compresión del gas, se emite radiación térmica en forma de fotones de frecuencia ν. Esta frecuencia es la misma frecuencia ν que, en la aproximación monocromática, tienen los fotones asociados al foco térmico. Sin pérdida de generalidad se puede admitir que desde las paredes diatermas del cilindro se emiten $N/2$ fotones en dirección $\theta_+ = \pi/2$ y otros $N/2$ fotones de la misma frecuencia en dirección θ_- = $-\pi/2$ (Fig. 4). El momento lineal total $\mathbf{p}_F = (p_{x_F}, p_{y_F}, 0)$ de este conjunto de fotones es:

$$p_{x_F} = 0 ,$$

$$p_{y_F} = \frac{N}{2} h\nu \ \mathrm{sen}\theta_+ + \frac{N}{2} h\nu \ \mathrm{sen}\theta_- = 0 .$$

La energía total, que con $\mathbf{p}_F = 0$ es la función energía, U_p asociada a los fotones emitidos como resultado de la compresión, es:

$$U_F = Nh\nu .$$

El 4-vector de transferencia de energía por radiación térmica (calor) Q^{μ} es:

$$Q^{\mu} = \quad 0, 0, 0, -Nh\nu \quad . \tag{12}$$

4. Por la aplicación del Primer Principio, $U_f^{\mu} - U_i^{\mu} = W^{\mu} + Q^{\mu}$, con los 4-vectores obtenidos previamente, Ecs. (10), (11) y (12), se tiene como única ecuación que, $qE \quad \Delta x + \delta l \quad - Nh\nu = 0$. Es decir,

$$Nh\nu = qE \quad \Delta x + \delta l \quad . \tag{13}$$

El trabajo de configuración realizado por las fuerzas externas, es el que proporciona la energía necesaria para la emisión de radiación térmica en forma de fotones.

B. Compresión isoterma en el referencial S_A

El observador en S_A podría obtener los 4-vectores correspondientes, $U_{iA}^{\mu}, U_{fA}^{\mu}, W_A^{\mu}$ y Q_A^{μ} llevando a cabo medidas de las diferentes magnitudes implicadas –tal y como se han medido en S_0–, desplazamientos, Δx_A, intervalos de tiempo, Δt_A, velocidades de los componentes del sistema, v_A, fuerzas aplicadas, F_A, frecuencias de fotones, ν_A, etc., en su propio referencial. Se admite que cuando el observador en S_A lleve a cabo la medida experimental de alguna magnitud relacionada con el experimento en S_0, obtendrá el mismo resultado que obtendría aplicando la transformación de Lorentz al 4-vector correspondiente [10].

1. *Función energía*. La velocidad $\mathbf{v}_A = \quad v_{xA}, v_{yA}, 0 \quad, v_A = |\mathbf{v}_A|$, se obtiene a partir de la velocidad correspondiente $\mathbf{v} = \quad v_x, v_y, 0 \quad, v = |\mathbf{v}|$ en S_0 mediante las transformaciones relativistas:

$$v_{xA} = \frac{v_x - V}{1 - v_x V / c^2} , \tag{14}$$

$$v_{yA} = \frac{v_y \gamma^{-1}(V)}{1 - v_x V / c^2} . \tag{15}$$

Imponiendo la condición de que el 4-vector velocidad en S_A v_A^{μ} y el 4-vector velocidad en S_0 v^{μ} estén relacionados como:

$$v_A^{\mu} = \gamma(v_A) \quad v_{xA}, v_{yA}, v_{zA}, c \quad ,$$

$$v^{\mu} = \gamma(v) \quad v_x, v_y, v_z, c \quad ,$$

$$v_A^{\mu} = L_{\nu}^{\mu}(V), v^{\nu} ,$$

igualando componente a componente, se obtienen las relaciones [10]:

$$\gamma(v_A) = \gamma(v)\gamma(V)\left[1 - \frac{v_x V}{c^2}\right], \tag{16}$$

$$\gamma(v_A) v_{xA} = \gamma(v)\gamma(V) \quad v_x - V \quad , \tag{17}$$

$$\gamma(v_A) v_{yA} = \gamma(v) v_y . \tag{18}$$

En el referencial S_0, por cada átomo de He j con velocidad $\mathbf{v}_j = (v_{xj}, v_{yj}, 0)$ existe otro átomo de He n, con velocidad opuesta $\mathbf{v}_n = (v_{xn}, v_{yn}, 0) = (-v_{xj}, -v_{yj}, 0)$, lo que asegura un momento lineal nulo en S_0.

Utilizando las Ecs. (14)-(15) junto con las expresiones Ecs. (16)-(18), es fácil calcular la contribución al momento lineal y a la energía total medidas en S_A, de cada par ($j - n$). Sumando estas contribuciones para las $N_A/2$ parejas, la contribución de todos ellos al momento lineal total p_{iA} y a la energía total E_{iA} en S_A es:

$$p_{ixA} = \sum_j \gamma(v_{jA}) u v_{xjA} = -\gamma(V)\left[\frac{\gamma(v) N_A u}{c^2}\right] V ,$$

$$p_{iyA} = \sum_j \gamma(v_{jA}) u v_{yjA} = 0 ,$$

$$E_{iA} = \sum_j \gamma(v_{jA}) u c^2 = \gamma(V)\ \gamma(v) N_A u \ ,$$

donde $v_{jA} = (v_{xjA}, v_{yjA}, 0)$ es la velocidad, inicial, de la j-ésima partícula en S_A. Con $U^{\mu}_{iA} = (c p_{iA}, 0, 0, E_{iA})$, se tiene

$$U^{\mu}_{iA} = (-c\gamma(V) M V, 0, 0, \gamma(V) U(T)) \ ,$$

donde $M = \gamma(v) N_A u c^{-2} = U(T) c^{-2}$, es la inercia que el observador en S_A asocia al sistema. Éste es el mismo 4-vector U^{μ}_{iA} que puede ser obtenido mediante la transformación de Lorentz aplicada a U^{μ}_{iA}, es decir,

$$U^{\mu}_{iA} = L^{\mu}_{\nu}(V) U^{\nu}_{i} .$$

Lo mismo que se ha hecho para U^{μ}_{iA} se puede hacer para obtener $U^{\mu}_{fA}, U^{\mu}_{fA} = L^{\mu}_{\nu}(V) U^{\nu}_{f}$ con:

$$U^{\mu}_{fA} = (-c\gamma(V) M V, 0, 0, \gamma(V) U(T)) = U^{\mu}_{iA} . \qquad (19)$$

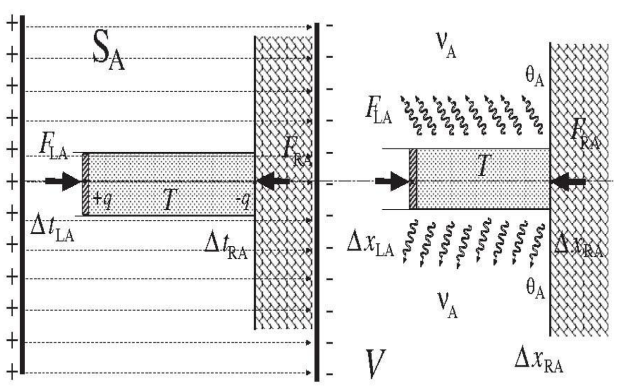

FIGURA 6. Proceso de compresión isoterma dado en Fig. 4, descrito desde el punto de vista de un observador en el referencial S_A en configuración estándar, con velocidad V respecto del referencial S_0. La fuerza F_{RA} tiene asociado el desplazamiento Δx_{RA} y la fuerza F_{LA} tiene asociado el desplazamiento Δx_{LA}. Las fuerzas F_{RA} y F_{LA} no se aplican ni simultáneamente ni durante el mismo intervalo de tiempo y se tiene un impulso neto aplicado sobre el gas. Los fotones se emiten con frecuencia ν_A y formando un ángulo θ_A con la horizontal. El calor Q_A lleva asociado momento lineal no nulo.

2. *Trabajo*. Para obtener el 4-vector W^{μ}_{A} en S_A se pueden utilizar las transformaciones relativistas de desplazamientos, intervalos de tiempo y fuerzas. En S_A se tienen los 4-vectores desplazamientos respectivos asociados a las fuerzas F_R y F_L:

$$\Delta x^{\mu}_{RA} = L^{\mu}_{\nu}(V)\Delta x^{\nu}_{R} = \left\{-\gamma(V)\ (-\delta l - V\Delta t),0,0,c\gamma(V)\left[\Delta t + \frac{V}{c^2}\delta l\right]\right\},$$

$$\Delta x^{\mu}_{LA} = L^{\mu}_{\nu}(V)\Delta x^{\nu}_{L} = \left\{-\gamma(V)\ (\Delta x - V\Delta t),0,0,c\gamma(V)\left[\Delta t - \frac{V}{c^2}\Delta x\right]\right\}.$$

En el referencial S_A, las fuerzas F_{RA} y F_{LA} se van a aplicar durante intervalos de tiempo diferentes $\Delta t_{RA} \neq \Delta t_{LA}$ y de forma no simultánea.

Las transformaciones de las fuerzas aplicadas, así como los impulsos, trabajos y 4-vectores trabajo en S_A se pueden obtener genéricamente, sin hacer referencia al origen electromagnético de las fuerzas [57]. La fuerza $\mathbf{F}_A = (F_{xA}, F_{yA}, F_{zA})$ medida en el referencial S_A se obtiene en función de la fuerza $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ medida en S_0 mediante la ecuación, dada por componentes [58]:

$$F_{xA} = \frac{F_x - (V/c^2)\ (F_x v_x + F_y v_y)}{1 - v_x V / c^2} , \qquad (20)$$

$$F_{yA} = \frac{\gamma^{-1}(V) F_y}{1 - v_x V / c^2} . \qquad (21)$$

Las fuerzas aplicadas en horizontal ($F_y = 0$) en dicha configuración son invariantes, $F_A = F$,

$$F_{LA} = qE; F_{RA} = -qE .$$

El impulso I_A y el trabajo W_A vienen dados en S_A por

$$I_A = F_{LA}\Delta t_{LA} + F_{RA}\Delta t_{RA} = -\gamma(V)\left[\frac{qE\ (\Delta x + \delta l)}{c^2}\right] V ,$$

$$W_A = F_{LA}\Delta x_{LA} + F_{RA}\Delta x_{RA} = \gamma(V) qE\ (\Delta x + \delta l) .$$

Así, el observador en S_A tiene el 4-vector W^{μ}_{A} dado por [13]:

$$W^{\mu}_{A} = (c I_A, 0, 0, W_A) . \qquad (22)$$

Este mismo resultado para W^{μ}_{A} se puede obtener considerando el origen electromagnético de las fuerzas aplicadas sobre el émbolo L y la base R. Así, el 4×4 tensor del campo electromagnético en S_A, $E^{\mu}_{A\nu}$ se obtiene mediante la transformación (Ap. A) ([17], p. 281):

$$E_{A\nu}^{\ \mu} = L_{\xi}^{\mu}(V)E_{x}^{\xi}L^{+x}_{\ \nu}(V) = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}.$$

El campo eléctrico no cambia en el referencial S_A respecto del campo en S_0 (y no aparece ningún campo magnético). Los 4-vectores trabajo asociados a las fuerzas aplicadas sobre el émbolo L y la base R se obtienen aplicando la propia definición del 4-vector en S_A, es decir:

$$\begin{aligned} W_{LA}^{\mu} &= qE_{A\nu}^{\ \mu}\Delta x_{LA}^{\nu} \\ &= \left(cqE\gamma(V)\left(\Delta t - (V/c^2)\Delta x\right), 0, 0, q\gamma(V)E\left(\Delta x - V\Delta t\right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{RA}^{\mu} &= -qE_{A\nu}^{\ \mu}\Delta x_{RA}^{\nu} \\ &= \left(-cqE\gamma(V)\left(\Delta t - (V/c^2)\delta l\right), 0, 0, qE\gamma(V)\left(-\delta l - V\Delta t\right) \right). \end{aligned}$$

En S_A el impulso:

$$I_A = I_{LA} + I_{RA} = -\gamma(V)\left[\frac{qE\left(\Delta x + \delta l\right)}{c^2}\right]V,$$

de las fuerzas aplicadas no es nulo, y el trabajo de las fuerzas externas aplicadas es,

$$W_A = W_{LA} + W_{RA} = \gamma(V)\left[qE\left(\Delta x + \delta l\right)\right].$$

El 4-vector trabajo (impulso-trabajo) W_A^{μ} en S_A es:

$$\begin{aligned} W_A^{\mu} &= W_{LA}^{\mu} + W_{RA}^{\mu} \\ &= \left\{ -c\gamma(V)\left[\frac{qE\left(\Delta x + \delta l\right)}{c^2}\right]V, 0, 0, \gamma(V)\left[qE\left(\Delta x + \delta l\right)\right] \right\}. \end{aligned}$$

Es éste el mismo resultado para W_A^{μ} que puede obtenerse aplicando la transformación de Lorentz sobre W^{μ} con $W_A^{\mu} = L_{\nu}^{\mu}(V)W^{\nu}$. El observador en S_A asocia un impulso neto a las fuerzas aplicadas. En una generalización del Principio de Inercia de la Energía, el observador en S_A asocia en S_A una inercia $qE(\Delta x + \delta l)c^{-2}$ al trabajo $qE\left(\Delta x + \delta l\right)$ realizado en S_0.

3. *Calor*. El observador en S_A podría obtener directamente el 4-vector Q_A^{μ} si fuese capaz de medir la frecuencia ν_A con que son emitidos, y el ángulo θ_A con el que lo son, los fotones relacionados con la compresión del gas, tal y como son descritos en S_A.

Por el efecto Doppler relativista, la frecuencia ν_A de un fotón emitido en S_0 con frecuencia ν y ángulo θ viene dada por:

$$\nu_A = \gamma(V)\left(1 - \beta(V)\cos\theta\right)\nu. \tag{23}$$

En el efecto relativista de aberración [59] se tiene que el ángulo θ_A medido en S_A vendría dado por:

$$\cos\theta_A = \frac{\cos\theta - \beta(V)}{1 - \beta(V)\cos\theta}, \tag{24}$$

$$\operatorname{sen}\theta_A = \frac{\gamma^{-1}(V)\operatorname{sen}\theta}{1 - \beta(V)\cos\theta}. \tag{25}$$

En S_0, por cada fotón r emitido en sentido $+\pi/2$ hay otro fotón s emitido en sentido $-\pi/2$, ambos con la misma frecuencia ν, lo que garantiza el momento lineal nulo del conjunto de fotones emitidos. Con $\theta_r = \pi/2$ y $\theta_s = -\pi/2$, en S_A los fotones se emiten con frecuencia, $\nu_A = \gamma(V)\nu$, mayor que la frecuencia ν (efecto Doppler transverso ([60], Sec. 5.3), y para el observador en S_A los fotones se emiten con ángulos mayores, en ´valor absoluto, de $\pi/2$ (Fig. 6).

Utilizando las Ecs. (23)-(24)-(25), es fácil obtener en S_A la contribución al momento lineal y a la energía total de cada par de fotones ($r - s$). Puesto que hay $N/2$ pares de fotones ($r - s$) opuestos y como todos ellos contribuyen de la misma manera, se tiene:

$$p_{xFA} = -\gamma(V)\left[\frac{Nh\nu}{c^2}\right]V,$$

$$p_{xFA} = 0,$$

$$E_{FA} = \gamma(V)Nh\nu.$$

El 4-vector $Q_A^{\mu} = \left(-cp_{FA;x}, -cp_{FA;y}, 0, -E_{FA}\right)$ viene dado por

$$Q_A^{\mu} = \left\{ c\gamma(V)\left[\frac{Nh\nu}{c^2}\right]V, 0, 0, -\gamma(V)\left(Nh\nu\right) \right\}.$$

Este resultado del 4-vector Q_A^{μ} es igual al obtenido por aplicación de la transformación de Lorentz $L_{\nu}^{\mu}(V)$ sobre Q^{μ}, con $Q_A^{\mu} = L_{\nu}^{\mu}(V)Q^{\mu}$. Nótese que un conjunto de fotones de energía $U_F = Nh\nu$ no se transforma entre referenciales como un fotón, sino como un cuerpo con inercia $M_F = Nh\nu c^{-2}$.

Aunque en S_A se emite el mismo número de fotones N, con $N/2$ en cada dirección, que en S_0 y no hay momento neto en dirección y (al igual que en S_0), cada uno de los N fotones emitidos tienen una componente en sentido $-x$, por lo que en S_A el conjunto de fotones emitidos transporta un momento lineal neto $p_{xFA} = -\gamma(V)(h\nu / c^2)V$ en ese sentido, a la vez que proporciona un momento lineal al sistema en dirección +*x*.

En el referencial S_A el conjunto de fuerzas aplicadas producen un impulso neto –en contraste con el impulso cero en S_0 – debido al efecto de la pérdida relativista de la simultaneidad–, en dirección −*x*. El conjunto de fotones emitidos en S_A, con componente de momento lineal −*x* no nula, produce un impulso sobre el sistema, en dirección +*x*. Este momento lineal ejercido por los fotones sobre el sistema, anula el impulso debido a las fuerzas aplicadas. El conjunto de fotones emitidos en S_A transporta un momento lineal – en contraste con el momento nulo de los fotones en S_0 –, precisamente aquel impulso producido por las fuerzas aplicadas en S_A. En S_A la energía transportada por los fotones es igual al trabajo realizado por las fuerzas externas sobre el sistema, al igual que sucedía en S_0.

V. CONCLUSIONES

Un ejercicio de física clásica que incluya elementos de Mecánica (por ejemplo, un cuerpo Z de masa *M* que se desplaza bajo la acción de una fuerza conservativa *F*), Electromagnetismo (la fuerza *F* proviene de la interacción de una carga eléctrica *q*, depositada sobre Z, con un campo eléctrico *E* producido entre las placas de un condensador cargado) y Termodinámica (en su desplazamiento, el cuerpo Z se mueve sobre una superficie con la que tiene un coeficiente de rozamiento dinámico μ, produciéndose disipación de energía mecánica, aumento de la energía interna ΔU del cuerpo Z y calor *Q*), no puede resolverse de forma acorde con el Principio de Relatividad de Galileo, pues las fuerzas de origen electromagnético se transforman mediante transformaciones de Lorentz [61, 10]. En ausencia de una Termodinámica Relativista, el formalismo tampoco es covariante (bajo transformaciones de) Lorentz.

Desde un moderno punto de vista, una teoría relativista (covariante Lorentz) requiere una definición clara (i) de los objetos tensoriales que van a caracterizar el estado de equilibrio termodinámico del sistema y (ii) de cualquier otra magnitud tensorial que caracterice la interacción del sistema con su entorno mecánico [foco mecánico ([9], Cap. 3)] y con su entorno térmico [foco térmico ([9], pp. 89-90)], con una descripción de los aparatos que los miden. Los observables dependerán, en general, del sistema físico y del observador, pero el Principio de Relatividad garantiza que todos los observadores inerciales obtendrán resultados equivalentes [por ejemplo, utilizando los invariantes relativistas que forman parte del formalismo (Ap. A)] cuando analicen el mismo proceso. Por lo tanto, cualquier formalismo relativista desarrollado para describir un proceso físico debe ser acorde con el Principio de Relatividad (lo que, actualmente, no sucede en la Física Clásica) y, por tanto, debe ser covariante Lorentz. Este ha sido el camino seguido en este artículo al desarrollar el formalismo de la Termodinámica Relativista.

Un desarrollo coherente de una Termodinámica Relativista exige: (i) garantizar que el sistema se comporta en todo momento de acuerdo con el Principio de Inercia de la Energía (por ejemplo, las fuerzas se aplican durante intervalos de tiempo mucho mayores que los tiempos de relajación del sistema) y (ii) llevar a cabo los experimentos en el referencial S_0, de tal modo que las ecuaciones válidas para partículas elementales (puntuales) puedan ser también aplicadas a sistemas termodinámicos (extensos) (Principio de Similitud). Cuando este objetivo se logra, en la Generalización de la Formulación Asíncrona de la Teoría Especial de la Relatividad, el formalismo de 4-vectores de Minkowski se puede aplicar tanto a magnitudes locales (partículas elementales) como no locales (cuerpos compuestos).

Debido a que la descripción mediante 4-vectores de una ley de la Física exige que a cada componente (temporal, escalar) de energía del 4-vector correspondiente se le asocie su parte (espacial, vectorial) de momento lineal (multiplicado por *c*), se hace necesario entrar en consideraciones microscópicas para caracterizar 4-vectores como el 4-vector función energía U^μ o el calor Q^μ, así como a especificar la naturaleza electromagnética de las fuerzas consideradas. Esta exigencia de caracterizar de forma exhaustiva estas magnitudes (en contraste, por ejemplo, con el cálculo de las variaciones de energía interna que se lleva a cabo en Termodinámica), sugiere que tal vez fuera más conveniente referirse a una Relatividad para Cuerpos Extensos, mejor que a una Termodinámica Relativista (de la que estarían ausentes consideraciones microscópicas), para el formalismo desarrollado.

Sea un cuerpo sólido Z, que a la vez que se desplaza como un todo bajo la acción de diferentes fuerzas $\mathbf{F}_k$, experimenta ciertos procesos termodinámicos. Para la descripción del proceso llevado a cabo por el cuerpo Z en el marco de la Teoría Especial de la Relatividad, utilizando el formalismo de Minkowski de 4-vectores, las Ecs. (1)-(3) se unen en el Primer Principio de la Termodinámica Relativista,

$$\mathrm{d}U^\mu = \delta W^\mu + \delta Q^\mu ,$$

con cuatro ecuaciones relacionadas [por exigencias de la Formulación Asíncrona en el referencial S_0 el cuerpo Z se encuentra instantáneamente en reposo ([26], p. 41), con $v_i = 0,\ y\ v_f = v,\ \mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$]:

$$\begin{Bmatrix} \gamma(v)M_f v_x \\ \gamma(v)M_f v_y \\ \gamma(v)M_f v_z \\ \gamma(v)U_f - U_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_k F_{xk} \ \mathrm{d}t \\ \sum_k F_{yk} \ \mathrm{d}t \\ \sum_k F_{zk} \ \mathrm{d}t \\ \delta W \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \delta Q \end{Bmatrix},$$

con *k* fuerzas conservativas aplicadas simultáneamente, y con:

$$\delta W = \sum_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k \ \ \mathrm{d}t; \delta Q = \dot{N} h\nu \, \mathrm{d}t,$$

$$M_i = U_i c^{-2}; M_f = U_f c^{-2},$$

siendo N la tasa de intercambio de fotones de Z con el foco térmico. La exigencia más importante para asegurar la coherencia del formalismo de Termodinámica Relativista desarrollado es el Principio de Inercia de la Energía y que a toda forma de energía U –W o Q– que contribuya a la componente temporal de un 4-vector en el referencial S_0 se le asigne una inercia $M = Uc^{-2}$.

Si una fuerza $\mathbf{F}_k$ ejercida sobre Z proviene de la interacción de un campo electromagnético [57], con 4×4-tensor $E_{k\nu}^{\mu}$, con una carga eléctrica q, el 4-vector fuerza de Minkowski (generalización del concepto vectorial de fuerza de Lorentz) F_k^{μ}, viene dado por:

$$F_k^{\mu} = \frac{q}{c} E_{k\nu}^{\mu} v_k^{\mu} = \gamma(v_k)\left(F_{xk}, F_{yk}, F_{zk}, c^{-1}\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k \right),$$

y el correspondiente 4-vector trabajo (infinitesimal) δW^{μ} por:

$$\delta W_k^{\mu} = qE_{k\nu}^{\mu}\, \mathrm{d}\, x_k^{\mu} = \left(cF_{xk}\, \mathrm{d}\, t,\ cF_{yk}\, \mathrm{d}\, t,\ cF_{zk}\, \mathrm{d}\, t,\ \mathbf{F}_k \cdot \mathrm{d}\, \mathbf{x}_k \right),$$

con

$$cF_k^{\mu} = \frac{\delta W_k^{\mu}}{\mathrm{d}\, \tau_k}.$$

El 4-vector calor Q^{μ} se puede obtener generalizando la Formulación Asíncrona al comportamiento de los fotones.

En conclusión, la formulación mediante 4-vectores de Minkowski del Primer Principio de la Termodinámica Relativista (particularmente, mediante la introducción de los 4-vectores función energía U^{μ} y calor Q^{μ} y con la integración del 4-vector trabajo W^{μ} en dicho principio) permite resolver ejercicios de Física Clásica (no cuántica), que incluyan conceptos de Mecánica, Electromagnetismo y Termodinámica en un formalismo completamente covariante (bajo transformaciones de) Lorentz.

El formalismo desarrollado permite obtener otras dos conclusiones interesantes:

1. Con un 4-vector velocidad V^{μ} definido como $V^{\mu} = \gamma(V)\left(V_x, V_y, V_z, c \right)$, $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$, $V = |\mathbf{V}|$, el 4-vector momento lineal p^{μ} definido como ([45], Sec. 31)

$$p_A^{\mu} = c^{-1} U_A^{\mu} = \left(\gamma(V) MV_x, \gamma(V) MV_y, \gamma(V) MV_z, \gamma(V) Uc^{-1} \right),$$

se puede expresar como:

$$p_A^{\mu} = \frac{U}{c^2} V^{\mu}.$$

Esta Ec. (26) es la generalización para cuerpos extensos, incluyendo una cavidad con fotones térmicos, de la ecuación $p = (E/c^2)V$ para partículas elementales ([62], Sec. 7.2.2) [22].

2. En el referencial S_0 se define un 4-vector 'dirección' $l^{\mu} = \{0, 0, 0, 1\}$. Sea el 4-vector dirección n^{μ} en S_A, que se define como:

$$n^{\mu} = L_{\nu}^{\mu}(V) l^{\nu} = c^{-1}\left(-\gamma(V)V, 0, 0, \gamma(V)c \right),$$

y sea

$$n_{\mu} = c^{-1}\left(\gamma(V)V, 0, 0, \gamma(V)c \right),$$

el 4-vector covariante dirección, con $n_{\mu}n^{\mu} = 1$, donde V es la velocidad de S_A respecto de S_0. El 4-vector n_{μ} satisface las ecuaciones:

$$n_{\mu} W_A^{\mu} = W,$$
$$n_{\mu} Q_A^{\mu} = Q.$$

La proyección del Primer Principio en S_A sobre el 4-vector dirección n_{μ} es:

$$n_{\mu}\left[U_{fA}^{\mu} - U_{iA}^{\mu} = W_A^{\mu} + Q_A^{\mu} \right] \to U_f - U_i = W + Q.$$

Esta proyección reduce el Primer Principio expresado en forma covariante Lorentz a la expresión clásica del mismo [14].

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer al Prof. S Velasco y a la Profa. M Ortega sus comentarios sobre este artículo. Y quisiera mostrar mi agradecimiento al árbitro anónimo que revisó este artículo por su cuidadosa lectura del mismo y por sus útiles y pertinentes aportaciones, que han permitido mejorar su presentación.

APÉNDICES

A Transformación de Lorentz y 4-vectores de Minkowski

De acuerdo con la (que se podría denominar) Hipótesis de Minkowski, una magnitud tiene (verdadero) sentido físico para todos los observadores si se comporta como un 4-vector bajo transformaciones de Lorentz ([17], Cap. 28).

1. Dos referenciales rígidos S_0 y S_A, con idénticas unidades de longitud y tiempo, se encuentran en *configuración estándar* ([64], p. 5) cuando el origen de S_A se mueve con velocidad $\mathbf{V} = (V, 0, 0)$ a lo largo del eje x de S_0, el eje x_A coincide con el eje x, mientras que tanto los ejes y e y_A y z y z_A permanecen paralelos, y cuando todos los relojes de ambos referenciales se han puesto a cero en el momento en que los orígenes de ambos referenciales

han coincidido (Fig. 7).

2. Un mismo suceso, (x, y, z, t) en S_0 y (x_A, y_A, z_A, t_A) en S_A, es expresado mediante el correspondiente 4-vector suceso x^μ y x_A^μ, ambos 4-vectores contravariantes [65], [los 4-vectores contravariantes se nota con índice griego y son matrices columna]:

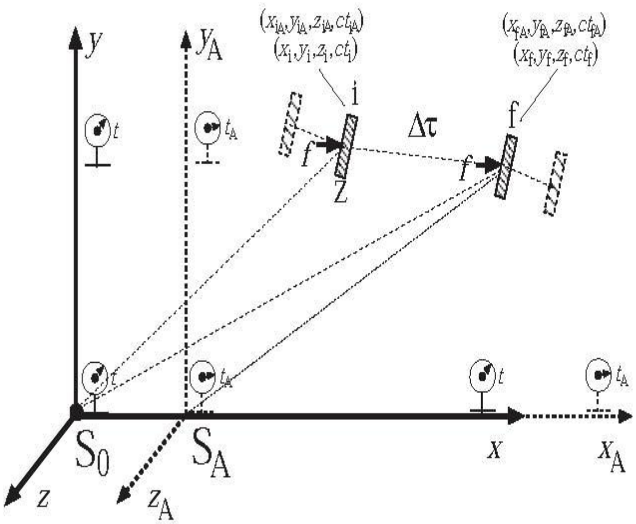

FIGURA 7. Referenciales S_0 y S_A en configuración estándar. (i) Una fuerza f comienza a actuar sobre un cuerpo Z. Suceso inicial, subíndice i en ambos referenciales, (f) suceso final, la fuerza f deja de actuar sobre Z. El tiempo $\Delta\tau$ es el intervalo de tiempo propio de Z ([63], Sec. 2.9) entre los sucesos inicial y final. Los 4-vectores suceso inicial, x_i^μ = {x_i, y_i, z_i, ct_i} en S y x_{iA}^μ = {x_{iA}, y_{iA}, z_{iA}, ct_{iA}} en S_A y suceso final, x_f^μ = {x_f, y_f, z_f, ct_f} en S y x_{fA}^μ = {x_{fA}, y_{fA}, z_{fA}, ct_{fA}} en S_A se relacionan entre sí como $x_{iA}^\mu = L_\nu^\mu(V)\, x_i^\nu$ y $x_{fA}^\mu = L_\nu^\mu(V)\, x_f^\nu$, respectivamente, donde $L_\nu^\mu(V)$ es la matriz de la formación de Lorentz para la configuración estándar.

$$x^\mu = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{Bmatrix};\; x_A^\mu = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \\ ct_A \end{Bmatrix}.$$

(Los 4-vectores contravariantes se expresarán a veces como fila, pero manteniéndose el índice griego contravariante). Cada componente de un 4-vector A^μ contravariante se nota con un subíndice j, con j =1, 2, 3, 4, tal que A^μ = {A_1, A_2, A_3, A_4}. El correspondiente 4-vector covariante [subíndice griego (matriz fila)] se nota A_μ.

3. La matriz 4×4 de la transformación de Lorentz para la configuración estándar con velocidad V viene dada por [66]:

$$L_\mu^\nu(V) = \begin{Bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & -\beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{Bmatrix},$$

con $\beta(V) = V/c$ y donde $\gamma(V) = \left(1-\beta^2(V)\right)^{-1/2}$ es el denominado *factor de Lorentz*. Configuraciones diferentes de la estándar tienen matrices de Lorentz más complejas [67], pero no aportan una física diferente, por lo que sólo se va a considerar esta configuración.

4. La matriz inversa de la transformación de Lorentz, $L^{+\nu}_{\mu}(V) = L_\mu^\nu(-V)$, tal que

$$L^{+\mu}_{\xi}(V) L_\nu^\xi(V) = 1_\nu^\mu ,$$

viene dada por:

$$L^{+\nu}_{\mu}(V) = \begin{Bmatrix} \gamma(V) & 0 & 0 & \beta(V)\gamma(V) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta(V)\gamma(V) & 0 & 0 & \gamma(V) \end{Bmatrix}.$$

5. Se aplica la convención de Einstein ([68], p. 12) sobre la suma: la repetición de un índice-subíndice implica la suma sobre sus valores j = 1, 2, 3, 4. Por ejemplo:

$$A_\mu B^\mu = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4 .$$

6. Los 4-vectores x^μ y x_A^μ relativos al mismo suceso se relacionan mediante la transformación de Lorentz como

$$x_A^\mu = L_\nu^\mu(V) x^\nu .$$

7. El desplazamiento Δx^μ entre dos sucesos, inical $x_i^\mu = \{x_i, y_i, z_i, ct_i\}$ y final $x_f^\mu = \{x_f, y_f, z_f, ct_f\}$, se define $\Delta x^\mu = x_f^\mu - x_i^\mu$ y es un 4-vector.

8. La subida y bajada de índices en un 4-vector se lleva a cabo utilizando el tensor métrico del espacio de Minkowski $g_{\nu\mu}$ [45]. Eligiendo definir el intervalo (infinitesimal) invariante entre dos sucesos, inicial (x_i, y_i, z_i, ct_i) y final (x_f, y_f, z_f, ct_f), con 4-vector desplazamiento dx^μ = {dx, dy, dz, cdt}(d$x = x_f - x_i$, etc.) como ([26], p. 9)

$$\mathrm{d}s^2 = c^2(\mathrm{d}t)^2 - \left[(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2\right] ,$$

se tiene que al definirse:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{\nu\mu}\, \mathrm{d}x^\nu\, \mathrm{d}x^\mu ,$$

el tensor métrico $g_{\nu\mu}$ viene dado como ([26], p. 45):

$$g_{\nu\mu} = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}.$$

9. Todo 4-vector A^μ, $A^\mu = \{A_x, A_y, A_z, A_t\}$, se divide en tres componentes (espaciales), provenientes del vector tridimensional $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y una cuarta componente (temporal) A_t (con las mismas unidades de espacio que las anteriores). Para un 4-vector contravariante A^μ, se tiene:

(a) Su 4-vector covariante correspondiente A_μ, que se define como $A_\mu = g_{\nu\mu}A^\nu$ y se obtiene cambiando de signo las tres componentes espaciales del mismo, sin cambiar el signo de la temporal: $A_\mu = \{-A_x, -A_y, -A_z, A_t\}$.

(b) Dado un 4-vector covariante B_μ, $B_\mu = \{B_x, B_y, B_z, B_t\}$, el producto interno $B_\mu A^\mu$ o *proyección* de A^μ sobre B^μ, se define:

$$B_\mu A^\mu = B_t A_t + B_x A_x + B_y A_y + B_z A_z .$$

(c) Su *norma* $\left\|A^\mu\right\|$ se define:

$$\left\|A^\mu\right\| = \left(A_\mu A^\mu\right)^{1/2} = \left[A_t^2 - \left(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2\right)\right]^{1/2}.$$

La norma de un 4-vector es un invariante relativista: $\left\|A^\mu\right\| = \left\|A_A^\mu\right\|$.

(d) Dado el 4-vector contravariante C^μ cualquier combinación lineal $aA^\mu + cC^\mu$, donde a y c son constantes, es también un 4-vector contravariante.

(e) Dos 4-vectores A^μ y B^μ se dice que son iguales si son iguales componente a componente $A_j = B_j$. La igualdad de dos 4-vectores es un invariante relativista y, por tanto, toda ecuación entre 4-vectores es una ecuación invariante relativista. Esto indica que la forma más directa de obtener leyes físicas *covariantes* es formularlas mediante 4-vectores.

10. El tiempo propio $d\tau$ del desplazamiento dx^μ es el tiempo medido mediante un reloj que se mueve con el objeto que experimenta el desplazamiento (Fig. 7), con 4-vector desplazamiento $\{0, 0, 0, cd\tau\}$, y viene dado por:

$$\mathrm{d}\tau = \left[(\mathrm{d}t)^2 - c^{-2}\left(\mathrm{d}^2x + \mathrm{d}^2y + \mathrm{d}^2z\right)\right]^{1/2},$$

y es igual a la *norma* del 4-vector desplazamiento dividida por c. Se tiene que:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(v) .$$

Esta ecuación expresa el intervalo de tiempo $d\tau$ a partir del 4-vector desplazamiento dado en el referencial S_0 que se elige para describir el proceso.

11. La derivada del 4-vector desplazamiento de un cuerpo dx^μ respecto del tiempo propio de dicho desplazamiento, $d\tau$, y debido al carácter invariante de éste, es otro 4-vector. El vector tridimensional velocidad $\mathbf{v}$ viene dado por $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, con $v_x = d_x/d_t$, $d_x = x_f - x_i$, etc., con $v = \left|\mathbf{v}\right| = \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)^{1/2}$. El 4-vector velocidad v^μ [65] viene dado por:

$$v^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \gamma(v)\left(v_x, v_y, v_z, c\right) ,$$

12. Para un campo electromagnético caracterizado por el 4×4-tensor campo electromagnético $E_\nu^\mu = g_{\nu\xi}E^{\xi\mu}$, en el referencial S_0, el mismo campo electromagnético viene caracterizado por el 4×4-tensor $E_{A\nu}^{\ \mu}$ en el referencial S_A, dado por:

$$E_{A\nu}^{\ \mu} = L_\xi^\mu(V)E_\chi^\xi L_{\ \nu}^{+\chi}(V) .$$

REFERENCIAS

[1] Besson, U., *Work and energy in the presence of friction: the need for a mesoscopic analysis*, Eur. J. Phys. **22**, 613-622 (2001).

[2] Arons, A. B., *Developing the energy concepts in introductory physics*, Phys. Teach. **27**, 506-517 (1989).

[3] Güémes, J., *¿Es posible una Termodinámica relativista?*, Rev. Esp. Fis. **24**, 47-57 (2010).

[4] Jewett, Jr, J. W., *Energy and the Confused Student V: The Energy/momentum approach to problems involving rotating and deformable systems*, Phys. Teach. **46**, 269-274 (2008).

[5] Tipler, P. A., *Física*, 3ª Edición, (Reverté, Barcelona, 1995).

[6] Jewett, Jr, J. W., *Energy and the Confused Student IV: A global approach to energy*, Phys. Teach. **46**, 210-217 (2008).

[7] Mallinckrodt, A. J., Leff, H. S., *All about work*, Am. J. Phys. **60**, 356-365 (1992).

[8] Fernández Pineda, C., Velasco, S., *Introducción a la Termodinámica*, (Síntesis, Madrid, 2009).

[9] Zemansky, M. W., Dittman, R. H., *Heat and Thermodynamics: An Intermediate Textbook*, 7th Ed. (McGraw-Hill International Editions, Singapur, 1997).

[10] Güémez, J., *An undergraduate exercise in the first law of relativistic thermodynamics*, Eur. J. Phys. **31**, 1209-1232 (2010).

[11] Camarca, M., Bonanno, A., and Sapia, P., *Revisiting work-energy theorem's implications*, Eur. J. Phys. **28**, 1181-1187 (2007).

[12] Serway, R. A., Jewett, Jr, J. W., *Principles of Physics. A Calculus-Based Text*, 3rd Ed. (Harcourt College Publishers, Orlando, 2002).

[13] Arzeliès, H., *Transformation relativiste de la temperature et quelques autres grandeurs thermodynamiques*, Nuovo Cimento **35**,795-803 (1965).

[14] van Kampen, N. G., *Relativistic thermodynamics of moving systems*, Phys. Rev. **173**, 295-301 (1968).

[15] Hamity, V. H., *Relativistic Thermodynamics,* Phys. Rev. **187**, 1745-1752 (1969).

[16] Grøn, Ø., *The asynchronous formulation of relativistic statics and thermodynamics*, Nuovo Cimento **17**, 141-165 (1973).

[17] Freund, J., *Special Relativity for Beginners. A Textbook for Undergraduates*, (World Scientific, Singapore, 2008).

[18] Taylor, L. W., *Physics. The Pioneer Science. Volume I. Mechanics, Heat, Sound*, (Dover, New York, 1959).

[19] Hecht, E., *An Historico-Critical Account of Potential Energy: Is PE Really Real?*, Phys. Teach. **41**, 486-493 (2003).

[20] Hecht, E., *There Is No Really Good Definition of Mass*, Phys. Teach. **44**, 40-45 (2006).

[21] Baierlein, R., *Does nature convert mass into energy?*, Am. J. Phys. **75**, 320-325 (2007).

[22] Hecht, E., *On Defining Mass*, Phys. Teach. **49**, 40-44 (2011).

[23] Knudsen, J. M., Hjorth, P. G., *Elements of Newtonian Mechanics*, (Springer Verlag, Heidelberg, 2000).

[24] Kolbenstvedt, H., *The mass of a gas of massless photons*, Am. J. Phys. **63**, 44-46 (1995).

[25] Cavalleri, G., Salgarelli, G., *Revision of the relativistic dynamics with variable rest mass and application to relativistic thermodynamics*, Nuovo Cimento **42**, 722-754 (1969).

[26] Schutz, B. F., *A First Course in General Relativity*, 2nd Ed. (Cambridge University Press, Cambridge (UK), 2009).

[27] Franklin, J., *Lorentz contraction, Bell's spaceships and rigid motion in special relativity*, Eur. J. Phys. **31**, 291-298 (2010).

[28] Gamba, A., *Physical Quantities in Different Reference Systems According to Relativity*, Am. J. Phys. **35**, 83-89 (1967).

[29] Aranoff, S., *Torques and Angular Momentum on a System at Equilibrium in Special Relativity*, Am. J. Phys. **37**, 453-454 (1969).

[30] Smith, J. H., *Introduction to Special Relativity*, (Stipes Publising Co., Champaign, 1965).

[31] Whitaker, M. A. B., *Definitions of mass in special relativity*, Phys. Educ. **11**, 55-57 (1976).

[32] Hoover, W. G, and Moran, B., *Pressure-volume work exercises illustrating the first and second laws,* Am. J. Phys. **47**, 851-856 (1979).

[33] Rasor, N. S., *On the Origin of Inertia*, Am. J. Phys. **26**, 188-189 (1958).

[34] Hobson, A., *Teaching $E = mc^2$: Mass Without Mass*, Phys. Teach. **43**, 80-82 (2005).

[35] Bauman, R. P., *Mass and energy: The low-energy limit*, Phys. Teach. **32**, 340-342 (1994).

[36] Marx, G., *Is the amount of matter additive?* Eur. J. Phys. **12**, 271-274 (1991).

[37] Rothenstein, B., Balan, S., *Special relativity without clock synchronization*, Eur J. Phys. **16**, 31-35 (1995).

[38] Grøn Ø., *Manifestly covariant formulation of Bohr's theory for photon emission from an atom,* Eur. J. Phys. **1**, 57-58 (1980).

[39] Manzi, L. P., and Wasik, P. D., *Rest Mass of a System of Particles*, Am. J. Phys. **38**, 270-271 (1970).

[40] Leff, H. S., *Teaching the photon gas in introductory physics*, Am. J. Phys. **70**, 792-797 (2002).

[41] Weidner, R. T., *On Weighing Photons,* Am. J. Phys. **35**, 443 (1967).

[42] Gabovich, A. M., Gabovich, N. A., *How to explain the non-zero mass of electromagnetic radiation consisting of zero-mass photons*, Eur. J. Phys. **28,** 649-655 (2007).

[43] Hilborn, R. C., *Let's ban Work from Physics,* Phys. Teach. **38,** 447 (2000).

[44] Loureiro, J., *Física Relativista. Mecánica e Electromagnetismo,* (IST Press, Lisboa, 2008).

[45] Rindler, W., *Special Relativity*, 2nd Ed. (Oliver and Boyd Ltd, Edinburg, 1966).

[46] Lemons, D. S., *Mere Thermodynamics*, (The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 2009).

[47] Blundell, S. J., Blundell, K. M., *Concepts in Thermal Physics,* 2nd Ed. (Oxford University Press, Oxford, 2010).

[48] Margaritondo, G., *A historically correct didactic first step in the quantum world: stressing the interplay of relativity, thermodynamics and quantum physics*, Eur. J. Phys. **24**, 15-19 (2003).

[49] Madsen Houlrik, J., *The relativistic wave vector*, Eur. J. Phys. **30**, 777-783 (2009).

[50] Shanks, D., *Monochromatic Approximation of Blackbody Radiation*, Am. J. Phys. **24**, 244-246 (1956).

[51] Yuen, C. K., *Lorentz transformation of thermodynamic quantities*, Am. J. Phys. **38**, 246-252 (1970).

[52] Horwitz, G., *Rest frames in relativistic thermodynamics*, Phys. Rev. D **4**, 3812-3813 (1971).

[53] Laufer, G., *Work and heat in the light of (thermal and laser) light*. Am. J. Phys. **51**, 42-43 (1983).

[54] Herrmann, F., Würfel, P., *Light with nonzero chemical potential*, Am. J. Phys. **73**, 717-722 (2005).

[55] Munley, F., *Approach of gas and radiation to equilibrium*, Am. J. Phys. **58**, 357-352 (1990).

[56] van Kampen, N. G., *Relativistic Thermodynamics* J. Phys. Soc. Japan **26**, Supplement 316-321 (1969).

[57] Jefimenko, O. D., *Derivation of relativistic force transformation equations from Lorentz force law*, Am. J. Phys. **64**, 618-620 (1996).

[58] Stewart, B. U., *Simplified relativistic force transformation equation*, Am. J. Phys. **47**, 50-51 (1979).

[59] Eriksen, E., Grøn, Ø., *The observed intensity of a radiating moving object*, Eur. J. Phys. **13**, 210-214 (1992).

[60] Stephani, H., *Relativity. An Introduction to Special and General Relativity*, 3ª Edición, (Cambrige Univ. Press, Cambridge UK, 2004).

[61] Ganley, W. P., *Forces and fields in Special Relativity*, Am. J. Phys. **31**, 510-516 (1963).

[62] Forrshaw, J. R., Smith, A. G., *Dynamics and Relativity*, (Wiley, Chichester, 2009).

[63] Robinson, F. N. H., *An Introduction to Special Relativity and its Applications*, (World Scientific,

Singapur, 1995).
[64] Rindler, W., *Relativity. Special, General, and Cosmological*, 2nd Ed. (Oxford University Press, New York, 2006).
[65] Brehme, R. W., *The Advantage of Teaching Relativity with Four-Vectors*, Am. J. Phys. **36**, 896-901 (1968).
[66] Shadowitz, A., *Special Relativity*, (Saunders, W. B., Company, Philadelphia, 1968).
[67] Cushing, J. T., *Vector Lorentz transformations*, Am. J. Phys. **35**, 858-862 (1967).
[68] Einstein, A., *The Meaning of Relativity*, (Princeton University Press, Princeton, 2005).