Modelo energético sobre la estabilidad estática de un cuerpo flotante en 2D

Manuel Alejandro Segura Delgado
Facultad de Ciencias y Educación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Carrera 3 No.26 A - 40, Bogotá, Colombia.

E-mail: masegurad@correo.udistrital.edu.co

(Recibido el 17 de Diciembre de 2010; aceptado el 17 de Marzo de 2011)

Resumen
Por excelencia los cuerpos flotantes más interesantes de describir son los barcos, los cuales son no homogéneos es decir, de densidad variable. Sin embargo, los cuerpos homogéneos brindan un acercamiento útil al comportamiento real de un sistema flotante. Este documento describe las posibles orientaciones asimétricas estables para un cuerpo triangular y de densidad constante en 2D, basado en el criterio de los valores críticos de la función de energía potencial, asociada al movimiento de rotación del mismo. Si encontramos la función de energía potencial de cualquier cuerpo podemos caracterizar su estabilidad, este criterio es importante en la construcción de embarcaciones.

Palabras clave: Cuerpo flotante homogéneo, Orientaciones asimétricas, Función de energía potencial.

Abstract
For excellence the most interesting floating bodies of describing are the ships, which are not homogeneous that is to say, of variable density. However, the homogeneous bodies offer an useful approach to the real behavior of a floating system. This document describes the possible stable asymmetric orientations for a triangular body and of constant density in 2D, based on the approach of the critical values of the function of potential energy, associated to the movement of rotation of the same one. If we find the function of potential energy of any body we can characterize its stability, this approach is important in the construction of crafts.

Keywords: Homogeneous floating body, Asymmetric orientations, Function of potential energy.

PACS: 02.30.Em, 47.15.K, 47.15.km **ISSN 1870-9095**

I. INTRODUCCIÓN

La estabilidad de sistemas flotantes es uno de los problemas clásicos que han sido de interés de la mecánica de fluidos, ya que desde hace siglos el hombre ha tenido la necesidad de solucionar el problema del transporte marítimo, ya sea por fines económicos, sociales e incluso por apoderamiento territorial. Sin embargo la pregunta primordial es: ¿Cuál es la mejor forma que nos permite obtener estabilidad y que el cuerpo no rote sobre algún eje? Sin lugar a dudas está pregunta es algo difícil de resolver, por ejemplo un cilindro puede flotar en equilibrio estable dependiendo de sus dimensiones, densidad y alrededor de que eje está girando. [1] o también existen equilibrios más complicados como el de una esfera [2], En general el criterio que define la estabilidad para este cuerpo y otros que cumplen una simetría especial con respecto al eje de rotación se denomina altura metacéntrica [1, 3].

$$MB = I / Vs, \tag{1}$$

$$\overline{CM} = \overline{CB} + \overline{MB}. \tag{2}$$

I es el momento de inercia de la sección horizontal tomada en la superficie del fluido y Vs es el volumen desplazado de fluido; de (2) Si la distancia $\overline{CM}$ resulta ser negativa entonces el cuerpo es inestable, si por el contrario es positiva será estable. [1, 3].

El problema anterior se considera válido siempre que las perturbaciones sean pequeñas, porque por ejemplo si colocamos un barco sobre un costado el sistema se volteará.

Los cuerpos que cumplen con este criterio de estabilidad se denominan cuerpos prismáticos [1, 3] Estos cuerpos guardan simetría con respecto al eje de rotación y la superficie libre. Sin embargo pueden existir otras direcciones en las cuales haya equilibrio estable y que el cuerpo no necesariamente sea simétrico.

En la sección II se presentan argumentos físicos sobre la función de energía potencial y algunas condiciones preliminares del problema, en la sección III se exponen la función de energía potencial y se encuentran las direcciones de equilibrio del cuerpo. Por último se hacen algunas conclusiones sobre la pertinencia de este modelo.

II. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

El cuerpo es un triangulo inscrito en el plano, y definido mediante el siguiente conjunto de funciones.

$$y = a, \tag{3}$$

$$y = x, \tag{4}$$

$$y = -x. \tag{5}$$

El sistema tendrá en consecuencia de su interacción con el fluido el centro de flotación que será designado por la letra *b*, su centro de masas *C* y la superficie del agua será definida por la recta

$$y = mx + b \; ; m \leq \frac{a-b}{a}. \tag{6}$$

La cual será orientada por un vector normal unitario a la superficie $\hat{n}$.

$$n = \frac{(-m\ ,1)}{\sqrt{1+m^2}}. \tag{7}$$

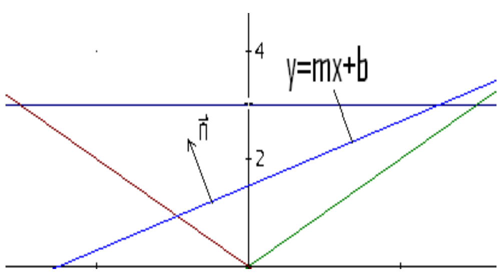

FIGURA 1. Cuerpo descrito por el sistema de Ecs. (3, 4, 5) en (3) *a* toma el valor 3, y la recta dirigida representa la superficie del fluido.

¿Cómo encontrar las posiciones estables de este sistema? Si asumimos que el cuerpo rota alrededor del punto de corte *b* de (6) y la perturbación es una función de la pendiente de la superficie libre original, entonces estos parámetros son suficientes para describir el sistema mecánico. (Estamos considerando que la superficie libre es la que rota y el cuerpo permanece fijo; esto es equivalente al movimiento real del sistema).

A. Función de energía potencial

Las fuerzas de carácter conservativo, como es sabido el trabajo que realizan no dependen de la trayectoria seguida para realizarlo. Se puede definir una función de energía potencial asociada a tal fuerza de modo que el trabajo realizado por esta fuerza represente una disminución de su energía potencial. [3, 4].

$U(n)$ representa el trabajo hecho para llevar el cuerpo de una posición estable donde $\hat{n}$ es ascendente a un nivel donde el cuerpo desplaza su propio peso en agua. [5] El trabajo realizado por el peso es: *mgc* donde c es el centro de masas; el trabajo realizado por la fuerza de flotación es: *mgb* donde *b* es el centroide de la parte del cuerpo sumergida. [2, 5, 6] De este modo podemos escribir $U(n)$ de la siguiente forma.

$$U\left(n\right) = mgn \cdot \left(C - b\right). \tag{8}$$

Una forma de visualizar éste cálculo más convenientemente es la siguiente. De [4] sabemos que el trabajo realizado por el momento de una fuerza está dado por:

$$W = \int \tau d\theta. \tag{9}$$

El peso del cuerpo es el campo que genera el momento y el vector de posición $\vec{r}$ que sufre un desplazamiento es el vector relativo entre *C* y *b*. de este modo.

$$\tau = \left|m\vec{g}\right|\left|\vec{r}\right| sen\left(\theta\right). \tag{10}$$

Haciendo la integral tenemos:

$$W = \int \left|m\vec{g}\right| \left|\vec{c}\right| - \left|\vec{b}\right| \mid sen(\theta)\ d\theta. \tag{11}$$

Y recordando que $\hat{n}$ es anti paralelo al peso del cuerpo, obtenemos la Ec. (8). Las direcciones de equilibrio estarán definidas en los puntos donde la función de energía potencial tenga un mínimo y habrá posiciones de equilibrio inestable, donde la función de energía potencial tenga un máximo y un punto silla [5 ,6].

En [6] se expone un tratamiento más completo sobre la condiciones del sistema, basado en el modelo energético.

B. Centroide sumergido

Los puntos de corte de la recta, con la figura están dados por:

$$P = \left\{\frac{-b}{1+m}, \frac{b}{1+m}\right\}, \tag{12}$$

$$Q = \left\{\frac{b}{1-m}, \frac{b}{1-m}\right\}. \tag{13}$$

El centroide vendrá dado por:

$$Bx = \frac{BxA1 - BxA2 - BxA3}{A1 - A2 - A3}, \tag{14}$$

$$By = \frac{ByA1 - CyA2 - ByA3}{A1 - A2 - A3}. \tag{15}$$

Donde $A1$ es el área bajo (6) entre P y Q, $A2$ es el área bajo (5) entre P y 0 y $A3$ es el área bajo (4) entre 0 y Q.
Después de un cálculo tedioso se encuentra:

$$Bx = \frac{2}{3} b \frac{m}{1-m^2} \; ; m \neq 1, \tag{16}$$

$$By = \frac{2}{3} \frac{b}{1-m^2} \; ; m \neq 1. \tag{17}$$

Por otro lado conocemos el centro de masas del cuerpo flotante, este centroide está dado por:

$$Cx = 0 \; ; Cy = \frac{2}{3} a. \tag{18}$$

El centroide corresponde con el centro de masas, ya que la densidad del cuerpo es constante. [6]

Entonces el vector (C - b) será:

$$\vec{r} = \frac{2}{3} \left\{ \frac{-bm}{1-m^2}, \frac{\left((a-b) - am^2\right)}{1-m^2} \right\}. \tag{19}$$

Para una dirección de equilibrio dada, el vector $\vec{r}$ debe ser paralelo a $\hat{n}$, si se cumple lo anterior entonces el producto vectorial vale 0 y existe un escalar K distinto de cero, tal que se pueda escribir $\vec{r}$ en términos de $\hat{n}$. Entonces:

$$\vec{r} = \mathrm{K} n. \tag{20}$$

Si escribimos esta ecuación vectorial en términos de sus componentes llegamos a una primera condición para el punto de giro del cuerpo (23).

$$K = \frac{3}{2} \frac{1-m^2}{\sqrt{1+m^2}}, \tag{21}$$

$$K = \frac{3}{2} \frac{1-m^2}{\sqrt{1+m^2}\,(a-b-am^2)}, \tag{22}$$

$$m \neq \sqrt{1-\frac{b}{a}}. \tag{23}$$

Ya que K debe ser único y se debe satisfacer (23) igualando (21) y (22) se llega a una segunda condición.

$$m = \sqrt{1-\frac{2b}{a}}. \tag{24}$$

(24) describe las direcciones asimétricas donde el cuerpo puede llegar a tener equilibrio estable, siempre que la función de energía potencial presente un mínimo en esa dirección.

III DIRECCIONES DE EQUILIBRIO

De las deducciones anteriores podemos escribir las direcciones de equilibrio para este cuerpo

$$n_1 = (0,1); m = 0, b = a/2, \tag{25}$$

$$n_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a-2b}{a-b}}, \sqrt{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a-b}} \right); m = \sqrt{1-\frac{2b}{a}}, \tag{26}$$

$$n_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); m = \pm 1, b = 0. \tag{27}$$

Ahora estamos interesados en conocer el comportamiento de la energía potencial, que define si las direcciones de equilibrio anteriores son estables o inestables, de esta forma de (8) y haciendo $mg = \rho a^2 g$ donde ρ es la densidad del cuerpo tenemos.

$$U(m) = \frac{2}{3} \frac{\rho g a^2 (a-b)}{\sqrt{1+m^2}}. \tag{28}$$

La energía potencial es función tanto del peso específico del cuerpo, de las dimensiones, del punto de giro y la perturbación. De la primera y segunda derivada obtenemos:

$$U'(m) = -\frac{2}{3} \frac{\rho g a^2 (a-b) m}{\sqrt{(1+m^2)^3}}, \tag{29}$$

$$U''(m) = \frac{2}{3} \frac{\rho g a^2 (a-b)(2m^2-1)}{\sqrt{(1+m^2)^5}}. \tag{30}$$

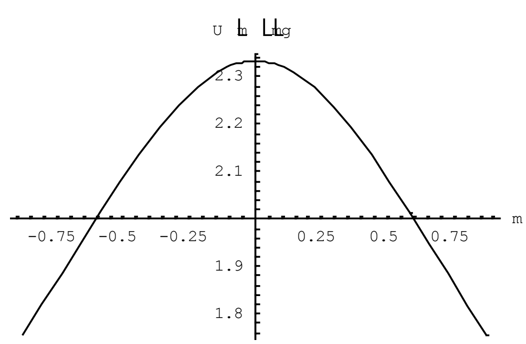

FIGURA 2. Gráfica que representa la energía potencial en función de la perturbación. Para este caso particular se tomaron a = 4 y b = 0.5.

De la dirección (25) si hacemos m = 0 entonces $U^{''}(m) < 0$ en consecuencia como se aprecia, m = 0 es un máximo y (25) es una dirección de equilibrio inestable siempre que $b < a$ esto implica que la única forma en que (25) sea una dirección de equilibrio estable es que el cuerpo este completamente sumergido; Desde luego este equilibrio solo puede ser indiferente.

Haciendo m = 1 entonces $U^{''}(m) = \frac{a}{3\sqrt{8}}$ como es mayor que cero, existe un mínimo local, y (27) es una dirección de equilibrio estable para el cuerpo.

Debe notarse que si m = 1 entonces b = 0 de (24) esto implica que el cuerpo prácticamente flota sin área sumergida; como esto no puede ser así decimos que $\rho \rightarrow 0$ de modo que su área sumergida sea lo suficientemente pequeña para que puede permanecer estable en la dirección (27).

Para estudiar el comportamiento de la energía potencial, en la dirección (26) escribimos energía en función de b de donde obtenemos.

$$U^{''}(b) = \frac{1}{3\sqrt{8}} \frac{\rho g a^2 (a-4b) a^{3/2}}{\sqrt{(a-b)^3}} .$$

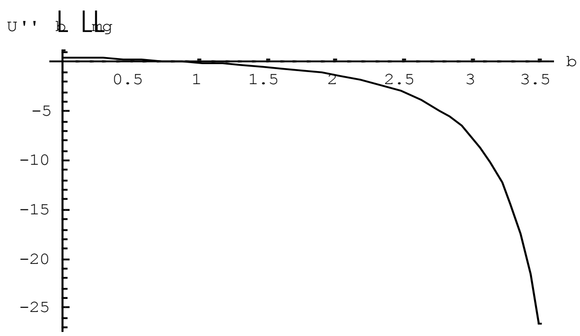

FIGURA 3. Gráfica que representa la energía potencial en función del punto de giro. Para este caso particular se tomó a = 4.

Para la dirección (26) de la Fig. 3 se puede visualizar que $U^{''}(m) > 0$ para $b < \frac{a}{4}$ para los puntos de giro que cumplen esto, (26) será una dirección de equilibrio estable.

A medida que la densidad del líquido se aproxima a uno es decir b se acerca a 4 en la Fig. 3 el sistema se hace cada vez más inestable en esa dirección. Para densidades comprendidas en $0.0625 < \rho < 0.1428$ el cuerpo flotará establemente en la dirección dada por (26); podemos notar también que para $\rho > 0.1428$ el cuerpo no flotará en ninguna de las direcciones de equilibrio, entonces será inestable.

IV CONCLUSIONES

Como el sistema presenta simetría con respecto al eje y, se podría pensar que existe estabilidad con respecto a la dirección ascendente para alguna densidad y dimensiones específicas, sin embargo no existe estabilidad en esa dirección. Por otro lado, cuando el sistema esta completamente sumergido, la estabilidad será indiferente, ya que en este caso el centro de flotación se encuentra en el centro de gravedad y no hay un par restaurador que equilibre el cuerpo. Se calculó las posiciones asimétricas estables para este cuerpo utilizando otro método diferente a la altura metacéntrica, ya que está no sirve para describir esas posiciones. Estas posiciones resultaron ser muy restringidas, solo se dan en un intervalo pequeño de densidades y para perturbaciones pequeñas. Si el sistema no está en ninguna de las posiciones encontradas adoptará una posición inestable.

La ventaja de utilizar un modelo energético es que podemos calcular posiciones de equilibrio en las que la altura metacéntrica no funciona, ya que está no sirve si el cuerpo es asimétrico. Además, el tratamiento energético que es escalar, evita las complicaciones con los momentos de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo que son vectoriales. Este modelo es una primera aproximación a la forma más usual que vemos en los barcos.

REFERENCIAS

[1] Shames, I., *Mecánica de fluidos,* 3a Ed, (McGraw Hill, Colombia, 1995).

[2] Auerbach, H., *Sur un problème de M. Ulam concernant l'èquilibre des corp flottants,* Studia Math **7**, 121-142 (1938).

[3] Streeter, V., *Mecánica de fluidos,* 4ta Ed, (McGraw Hill, México, 1972).

[4] Alonso, M., y Finn, E., *Mecánica,* Edición revisada, (Fondo educativo latinoamericano, México, 1971).

[5] Gilbert, E., *How things float,* Am. Math. Monthly **98**, 201-216 (1991).

[6] Várkonyi, P., *Floating body problems in two dimensions,* Studies Appl. Math **122**, 195-218 (2009).