

# Líneas de corriente y trayectorias en mecánica de fluidos



**E. J. López-Sánchez, G. Ruiz-Chavarría**

*Departamento de Física, Universidad Nacional Autónoma de México,  
Circuito exterior s/n. Ciudad Universitaria, CP 04510, México D. F.*

**E-mail:** lsej21@gmail.com

(Recibido el 22 de Enero de 2010; aceptado el 26 de Octubre de 2010)

## Resumen

El transporte de partículas en la mecánica de fluidos es un fenómeno poco estudiado en los cursos porque en la mayoría de ellos se usa la descripción euleriana, en donde cantidades como la velocidad o la presión son funciones de la posición y del tiempo. Cuando un flujo es estacionario las líneas de corriente coinciden con las trayectorias de las partículas de fluido, pero si hay una dependencia temporal esto ya no es así. En este trabajo se hace un estudio -mediante procedimientos numéricos- de las trayectorias de las partículas y de las líneas de corriente en flujos no estacionarios, resaltando la diferencia que hay entre ambas. Lo anterior se aplica para el seguimiento de partículas en la vecindad de un anillo de vorticidad, que es un caso de flujo no estacionario que se puede modelar con relativa facilidad y del que se disponen datos experimentales. Esta es la primera etapa en el estudio de transporte de contaminantes en la atmósfera o en el océano, que son fenómenos donde aparecen, además del fluido en movimiento, otro tipo de partículas (gases, líquidos y/o partículas sólidas).

**Palabras clave:** Descripción euleriana, anillos de vorticidad, seguimiento de partículas y trayectorias.

## Abstract

The transport of particles in fluid mechanics is a little studied phenomenon in the courses because most of them use the Eulerian description, where quantities such as velocity or pressure are functions of position and time. When a flow is steady streamlines coincide with the trajectories of fluid particles, but if there is a time dependence this is no longer the case. In this paper we make a study -by numerical procedures- of the particle paths and streamlines in unsteady flows, highlighting the difference between the two. This applies to the monitoring of particles in the vicinity of a ring of vorticity, which is a case of unsteady flow that can be modeled with relative ease and the experimental data that are available. This is the first step in the study of pollutants in the atmosphere or ocean, which are phenomena which appear in addition to the moving fluid, another kind of particles (gas, liquid and/or solid).

**Keywords:** Eulerian description, vortex rings, particles tracking and trajectories.

**PACS:** 47.11.-j, 47.11.Bc, 47.15.ki.

**ISSN 1870-9095**

## I. INTRODUCCIÓN

Existe una semejanza entre ciertos fenómenos de la mecánica de fluidos con otros de la teoría electromagnética. Las ecuaciones de la magnetostática son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}.$$

Por otra parte, 2 ecuaciones de la dinámica de fluidos en un flujo incompresible y rotacional son:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{u} = \vec{\omega}, \quad (1)$$

donde  $\omega$  es la vorticidad. Si se logra tener una distribución de vorticidad semejante a la densidad de corriente, entonces los resultados de una teoría tienen una contraparte en la otra. Este es el caso de una corriente constante circulando por una espira circular. El equivalente en Mecánica de Fluidos es un vórtice anular, en el que se puede suponer que la vorticidad está concentrada en una línea. De la ley de Biot-Savart (considerando  $\mu_0 = \text{cte}$ ), el campo magnético es:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3}.$$

Por un lado se tiene que la corriente eléctrica está dada por:

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} da.$$

Por otro lado, la circulación está definida como:

$$\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{l},$$

donde  $\vec{u}$  es la velocidad. Por el teorema de Stokes [11] y sustituyendo (1) se tiene:

$$\Gamma = \int_S \vec{\omega} \cdot \hat{n} da.$$

Esto nos da una equivalencia entre  $\mu_0 I$  y  $\Gamma$ . La ley de Biot-Savart para fluidos se convierte en:

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3}. \quad (2)$$

## II. CÁLCULO DE LAS EXPRESIONES DEL CAMPO DE VELOCIDADES

Se calculan las expresiones para el campo de velocidades (componentes de velocidad en coordenadas cilíndricas:  $r$ ,  $\theta$  y  $z$ ) a partir de la ley de Biot-Savart (ecuación (3)).  $d\vec{l}$  va dirigida a lo largo de la espira y  $a$  es el radio del anillo (figura 1).

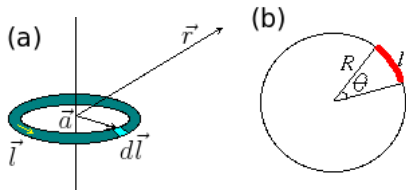


FIGURA 1. (a) Anillo de vorticidad. (b) Longitud de arco.

donde

$$\vec{a} = a \cos \theta \hat{i} + a \sin \theta \hat{j},$$

$$\vec{r} = r \cos \phi \hat{i} + r \sin \phi \hat{j} + z \hat{k}.$$

Los vectores unitarios son:

$$\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j},$$

$$\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}, \quad (3)$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}.$$

Según la figura 1 (b):

$$d\vec{l} = a d\theta \hat{\theta} = a(-\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}) d\theta.$$

Por otro lado:

$$\vec{r} - \vec{a} = (r \cos \phi - a \cos \theta) \hat{i} + (r \sin \phi - a \cos \theta) \hat{j} + z \hat{k},$$

siendo

$$|\vec{r} - \vec{a}|^3 = [r^2 + a^2 + z^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)]^{3/2}. \quad (4)$$

Así:

$$d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{a}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -a \sin \theta d\theta & a \cos \theta d\theta & 0 \\ r \cos \phi - a \cos \theta & r \sin \phi - a \cos \theta & z \end{vmatrix}$$

$$= az \cos \theta d\theta \hat{i} + az \sin \theta d\theta \hat{j} + k[a^2 - ra \cos(\theta - \phi)] d\theta. \quad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (2), el campo de velocidades debido a un anillo de vorticidad está dado por:

$$\vec{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \left[ \int \frac{az \cos \theta d\theta}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} \hat{i} + \int \frac{az \sin \theta d\theta}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} \hat{j} + \int \frac{[a^2 - ra \cos(\theta - \phi)] d\theta}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} \hat{k} \right], \quad (6)$$

en coordenadas cartesianas. Para transformar a coordenadas cilíndricas es necesario operar:

$$u_r = \vec{u} \cdot \hat{r}, \quad u_\phi = \vec{u} \cdot \hat{\phi}, \quad u_z = \vec{u} \cdot \hat{k}.$$

Haciendo un cambio de variable  $\alpha = \theta - \phi$ , y usando identidades trigonométricas, las expresiones para las componentes del campo de velocidades  $\vec{u}$  en coordenadas cilíndricas cuando el anillo pasa por el plano  $z = 0$ , son:

$$u_r = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\phi}^{2\pi-\phi} \frac{az \cos \alpha d\alpha}{[r^2 + a^2 + z^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)]^{3/2}},$$

$$u_\phi = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\phi}^{2\pi-\phi} \frac{az \sin \alpha d\alpha}{[r^2 + a^2 + z^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)]^{3/2}},$$

$$u_z = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\phi}^{2\pi-\phi} \frac{[a^2 - ra \cos \alpha] d\alpha}{[r^2 + a^2 + z^2 - 2ar \cos(\theta - \phi)]^{3/2}}. \quad (7)$$

En otro instante de tiempo hay que hacer una transformación galileana  $z \rightarrow z - vt$ , donde  $v$  es la velocidad de desplazamiento del anillo. Las expresiones no tienen una forma analítica, excepto cuando  $r = 0$ . Para ello se ha procedido a realizar una integración numérica utilizando el método de 3/8 de Simpson.

Se elabora un programa en fortran para integrar el campo de velocidades y se grafica con los siguientes datos: radio de la espira:  $a = 3$ .

Circulación:  $\Gamma = 4\pi$ .

La expresión analítica para el campo de velocidades cuando

$r = 0$ , es:

$$u_z = \frac{\Gamma a^2}{2[a^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (8)$$

Para verificar que el método numérico funciona bien se presentan curvas de  $u_z$  vs  $z$  cuando  $r = 0$  (eje de simetría), y ésta se compara con la obtenida a partir de la fórmula analítica (8), hecha en Mathematica 7. Las gráficas comparativas se muestran en la figura 2.

En la figura 3 se muestran las gráficas del campo de velocidades ( $u_r$  y  $u_z$ ) que se han obtenido en 3 tiempos

diferentes a partir de las ecuaciones (7), aunque la figura 3 muestra sólo la mitad del corte transversal del anillo de vorticidad.

Para el cálculo del campo de velocidades se ha supuesto que la vorticidad está concentrada en una línea.

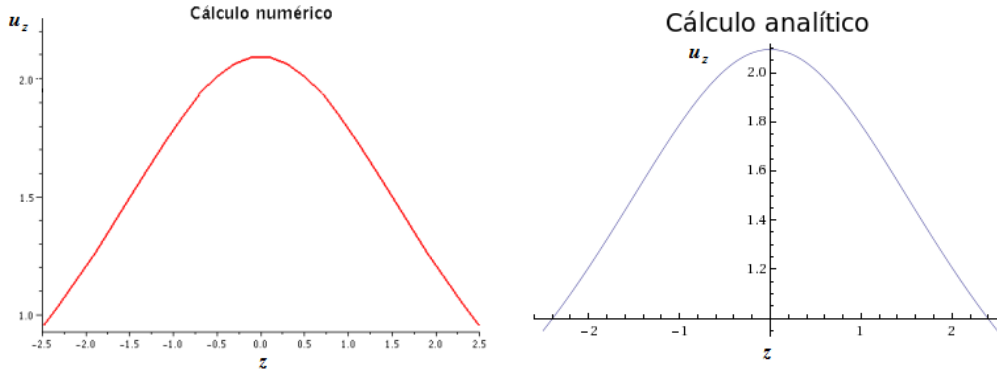


FIGURA 2. Comparación entre el resultado numérico (izquierda) y el analítico (derecha) para el campo de velocidades de un anillo de vorticidad sobre el eje  $z$ .

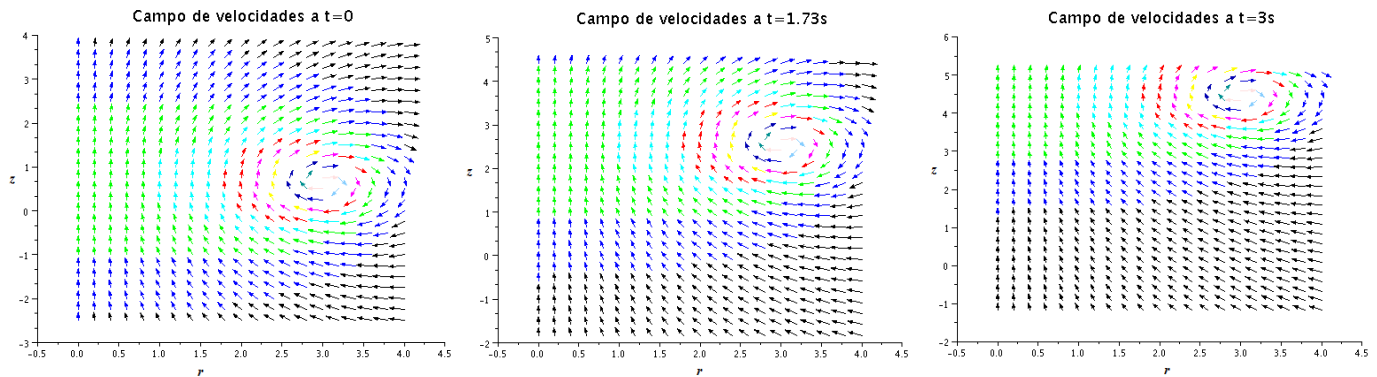


FIGURA 3. Campo de velocidades de la mitad de un anillo de vorticidad desplazándose hacia  $+z$  con velocidad  $v$ , a 3 tiempos.

En realidad esto no es así, la vorticidad se concentra en un toro, y el comportamiento dentro del toro es muy diferente que fuera de él. Además, para que el anillo de vorticidad subsista es necesario que se mueva, no es posible que permanezca estático.

Se define como *trayectoria* a la curva imaginaria trazada por una partícula de fluido en su movimiento. Las *líneas de corriente* son curvas que tienen la propiedad de que la tangente a ellas en cualquier punto indica la dirección de la velocidad en dicho punto, quedan determinadas por el siguiente sistema de ecuaciones (en coordenadas cilíndricas):

$$\frac{dr}{u_r} = \frac{rd\phi}{u_\phi} = \frac{dz}{u_z}. \quad (9)$$

En el caso de flujo estacionario las líneas de corriente no varían con el tiempo, coincidiendo con las trayectorias de las partículas fluidas. En el flujo no estacionario las tangentes a las líneas de corriente dan las direcciones de las velocidades de las partículas fluidas mientras que las

tangentes a las trayectorias indican las direcciones de las velocidades de las partículas de fluido dadas en distintos instantes de tiempo [8].

Para el caso aquí estudiado y de acuerdo a la ecuación (9) se utiliza la relación:

$$\frac{dr}{u_r} = \frac{dz}{u_z},$$

(ya que  $u_\phi=0$  para cualquier cambio  $d\phi$ ) de la cual se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{u_r}{u_z} = f(r, z), \quad (10)$$

que se resuelve numéricamente usando el método de Euler. La figura 4 muestra las líneas de corriente.

El reto ahora es ver qué pasa cuando el anillo se mueve con velocidad constante  $v$  a lo largo del eje  $z$ . Como se mencionó anteriormente, se hace una transformación galileana en las expresiones (7), cambiando  $z$  por  $z - vt$ .

En la referencia [9] se propone la velocidad  $v$  del desplazamiento del anillo como:

$$v = \frac{\Gamma}{4\pi a} \left( \log \frac{8a}{\rho} - \frac{1}{4} \right),$$

donde  $\rho$  es el radio de la sección transversal del toro. El campo de velocidades cuando el anillo se desplaza con velocidad  $v$  hacia  $+z$  se muestra en la figura 3.

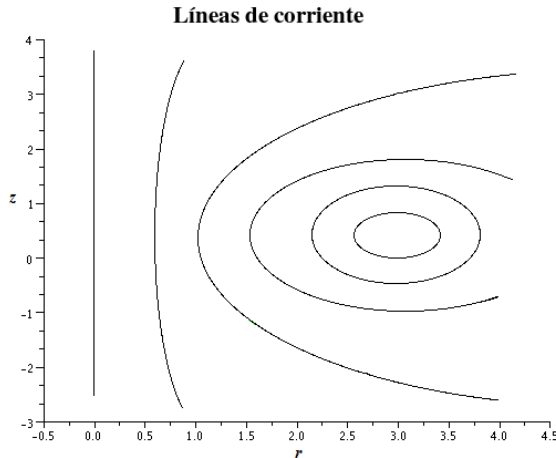


FIGURA 4. Líneas de corriente del campo de velocidades del anillo de vorticidad.

### III. TRAYECTORIAS

A partir del conocimiento del campo de velocidades (descripción euleriana) hay que determinar la trayectoria de las partículas (descripción lagrangiana). Para ello se elaboró un programa en fortran que calcula estas trayectorias. A partir de una posición inicial  $a$  de la partícula a un tiempo  $t_0$ , se usa la relación:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \int \vec{v}(t') dt',$$

en su forma vectorial, pero para cada coordenada  $q$  se tiene:

$$q_{i+1} = q_i + v_q \Delta t, \tag{11}$$

donde  $q_i$  es el punto conocido,  $v_q$  es la componente  $q$  de la velocidad en el campo de velocidades y  $\Delta t$  es el incremento en el tiempo, desde que la partícula está en  $q_i$  hasta que llega a  $q_{i+1}$ . Cabe aclarar que la fórmula (11) es una primera aproximación para la trayectoria de partícula, por lo pronto es la trayectoria de una partícula de fluido; para partículas sólidas se deben tomar en cuenta también efectos como la fricción.

Si el campo de velocidades tiene una expresión analítica, la forma de calcular la trayectoria es tomar la velocidad en un punto, efectuar la operación (11) para el siguiente punto y calcular la velocidad en ese siguiente punto para así seguir a la partícula hasta donde se desee estudiar.

Si no se conoce la expresión analítica del campo de velocidades, pero se tienen valores del campo en una malla, el cálculo sucesivo de la posición requiere de un valor de  $\bar{u}$  cada vez, valor que no necesariamente cae en los valores conocidos de la malla que se tiene. Para determinar el valor de  $u_q$  se usa un método de interpolación, en este caso fue bilineal. Este procedimiento es útil para cuando se tienen datos experimentales, la desventaja es que si el cálculo lleva a puntos fuera del dominio, la trayectoria queda “cortada” en el límite del dominio.

### IV. RESULTADOS

Los programas en fortran se probaron con el campo de velocidades para el anillo de vorticidad. Se presentan los casos en que se hace el cálculo de la trayectoria directamente del campo de velocidades y el caso en que se tiene la malla de datos del campo y se usa la interpolación bilineal para el cálculo de las trayectorias. El objetivo es seguir partículas en cualquier sistema de mecánica de fluidos, teniendo un sistema conocido, se generan datos numéricamente y se usa el programa de interpolación de datos para calcular las trayectorias. Después se calculan las trayectorias directamente para verificar que el programa de interpolación funcione adecuadamente.

Las figuras 5-7 muestran varias trayectorias, comparando los dos casos: el cálculo directo y el cálculo usando datos interpolados.

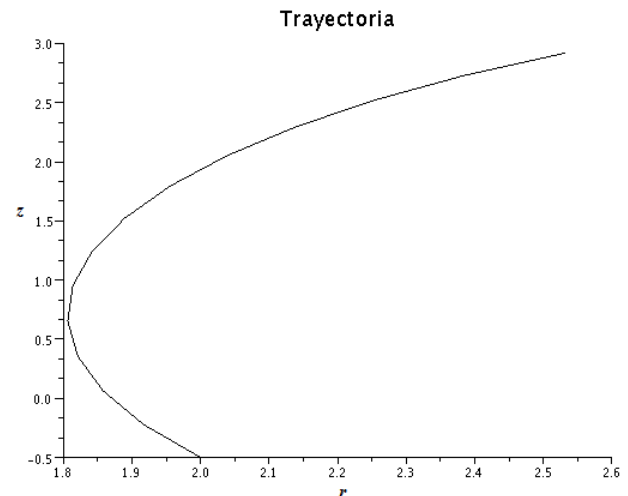


FIGURA 5. Trayectoria calculada directamente del campo de velocidades.

Para el cálculo de las líneas de corriente es necesario tener en cuenta los puntos en que la función  $f(r, z)$  (ecuación (10)) diverge, es decir, cuando  $u_z = 0$ . Un programa en fortran calcula las líneas de corriente, sin embargo en los puntos cercanos a  $r = 3$  la razón de velocidades en (10) queda indeterminada. Las líneas de corriente se cierran resolviendo la ecuación:

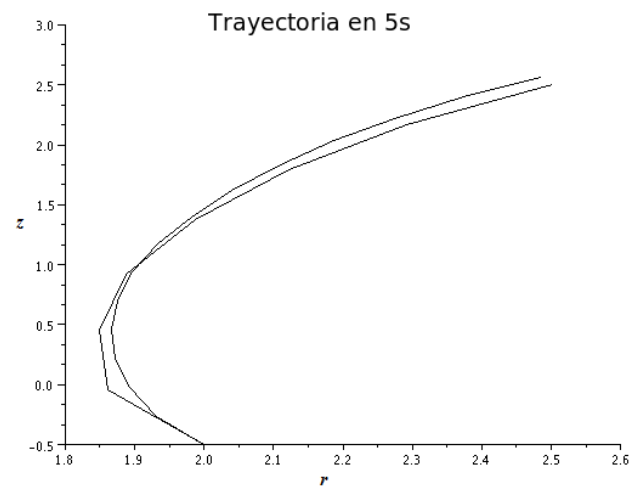
$$\frac{dz}{dr} = \frac{u_z}{u_r} = g(r, z).$$

El método de Euler tiene otro problema, si el punto inicial tiene implica el valor  $u_r = 0$ , ya que el cálculo consecutivo de puntos para la línea de corriente resultará en una línea vertical. Esto se puede solucionar utilizando una aproximación a mayor orden, es decir:

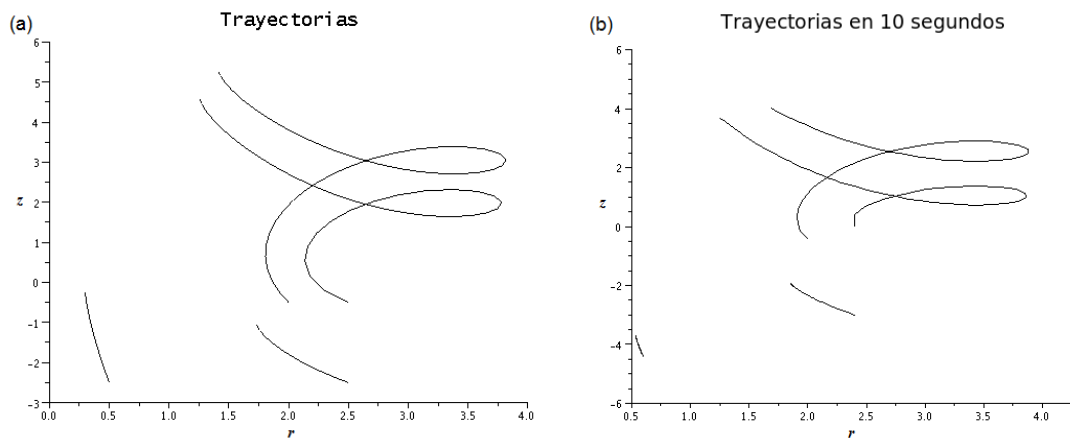
$$r_{i+1} = r_i + f\Delta z + f' \Delta z^2,$$

haciendo una aproximación de diferencias finitas para  $f'$ . En este caso, aunque  $f = 0$ , no necesariamente  $f' = 0$ .

En el anillo de vorticidad se conocen perfectamente las líneas de corriente, sin embargo cuando no se tiene el campo de velocidades de forma analítica, sino que se tienen simplemente datos obtenidos de alguna simulación numérica o de algún experimento se debe analizar con más detalle el procedimiento para calcular las líneas de corriente.



**FIGURA 6.** La misma trayectoria que la figura 5, pero usando datos interpolados. Se muestran 2 líneas, una correspondiente a 30 puntos y la otra a 60 puntos.



**FIGURA 7.** Comparación entre gráficas de trayectorias calculadas directamente del campo de velocidades (a) y trayectorias calculadas a partir de datos interpolados (b) para el mismo sistema, un anillo de vorticidad.

En cuanto a las trayectorias que siguen las partículas, se obtuvieron datos para el campo de velocidades en una malla de puntos, a partir de ahí se hizo una interpolación bilineal para calcular la trayectoria de las partículas fluidas; las figuras 6 y 7(b) muestran estos resultados.

Con otro programa se obtuvo directamente la trayectoria a partir de calcular el campo de velocidades en cada punto por el que iba pasando la partícula, ya que se tienen las expresiones de las componentes de la velocidad para este sistema: anillo de vorticidad. Las figuras 5 y 7 (a) muestran estos resultados.

## V. CONCLUSIONES

Como el anillo de vorticidad se está moviendo con velocidad constante a lo largo del eje  $z$  en dirección positiva, la figura 7 muestra cómo la partícula es atraída hacia el interior del anillo y cuando el anillo se aleja la trayectoria sigue a las líneas de corriente que “se van

quedando”, hasta que la partícula se detiene o ya no hay datos para seguirla.

En la figura 7(b) se observa una línea cerca del punto (0-4) la cual no se desplaza una gran distancia, es porque en esa posición la velocidad es muy pequeña y conforme el anillo se aleja, la velocidad en ese punto tiende a cero.

Estos hechos muestran que el programa de interpolación de datos para el cálculo de trayectoria funciona correctamente, y es útil para calcular trayectorias de partículas de fluidos, no partículas sólidas, ya que para éstas últimas es necesario considerar otros factores que intervienen, como la fricción, el peso de la partícula, la forma, etc. Así que se puede utilizar el programa para cualquier sistema de mecánica de fluidos, siempre y cuando los datos proporcionados al programa se acomoden adecuadamente; y a nivel de transporte de partículas fluidas es perfecto como tema para la enseñanza de la física.

Con esto se puede concluir:

a) Teniendo el campo de velocidades se puede modelar la trayectoria de la partícula en el caso no estacionario usando la descripción lagrangiana.

- b) Se observa que para el caso no estacionario las trayectorias no necesariamente coinciden con las líneas de corriente (figuras 4 y 7), que era lo que se quería probar.
- c) Se pueden tener datos de campos de velocidades, incluso experimentales y con los programas generados se puede tener una buena aproximación de las trayectorias que seguirían partículas que se mueven en dichos campos, y así poder comparar o predecir los movimientos, ya que seguir a muchas partículas al mismo tiempo es un procedimiento algo difícil.
- d) En este caso fue un anillo de vorticidad, pero para cualquier sistema con campo de velocidades puede ser un buen ejercicio para un curso de física computacional.
- e) Al no depender de las expresiones analíticas para el campo de velocidades, el programa es una herramienta útil también en la investigación. Este trabajo da la pauta para el estudio de transporte de partículas, un tema que ha despertado interés tanto en la enseñanza como en la investigación.

## REFERENCIAS

- [1] Arfken, G., *Mathematical methods for physicist*, (3th ed Academic Press. USA. 1985).
- [2] Batchelor, G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, (Cambridge University Press, UK 2000).
- [3] Burden, R. L., Faires J. D., *Análisis numérico*, (7<sup>a</sup> Ed. Thomson Learning, Bogotá, Colombia 2002).
- [4] Gerhart, P. M., Gross, R. J., Hchstein, J. I., *Fundamentos de Mecánica de Fluidos*, (Addison-Wesley Iberoamericana. E. U. A. 1995).
- [5] Halliday, D., Resnick, R., Krane K., *Física*. (2 Compañía editorial Continental, México, 1995).
- [6] Kundu P. K. and Cohen I.M., *Fluid Mechanics*, (Academic Press, 2<sup>nd</sup> Edition, USA, 2002).
- [7] Lamb, H., *Hydrodynamics*, (Dover Publications, 6th Edition, New York, 1932).
- [8] Landau, L. D. and Lifschitz, E. M., *Mecánica de Fluidos, Curso de Física Teórica*, 6 (Reverté, 2da Ed., Barcelona, España, 2001).
- [9] Lavrentiev, M. and Chabat, B., *Effets Hydrodynamiques et modèles mathématiques*, (Ed. Mir-Moscú, Moscu, 1980).
- [10] Matthews, J. H. and Fink, K. D., *Métodos numéricos con Matlab*, (Pearson-Prentice Hall, 3ra Ed., España (2007).
- [11] Purcel, E. J. and Varberg, D., *Cálculo con Geometría Analítica*, (Prentice Hall Hispanoamericana, 4ta ed., México, 1987).
- [12] Skiba, Y. N., *Métodos y esquemas numéricos, un análisis computacional*, (UNAM, México, 2005).
- [13] Vázquez de Gyves, A. F., *Impacto simétrico de un anillo de vorticidad con una pared*, (Tesis de licenciatura, UNAM, México, 2007).
- [14] White, F. M., *Mecánica de Fluidos* (Mc Graw Hill, 5<sup>a</sup> Ed., Madrid, España, 2004).
- [15] Young, D. D., Munson, B. R. and Okiishi, T. H., *A Brief Introduction to Fluid Mechanics*, (John Wiley & Sons Inc., 2nd Edition, New York, 2001).
- [16] Grossman, S. I., *Álgebra Lineal*, (Gpo. Editorial Iberoamericana, 2da. Ed., México 1995).
- [17] White, F. M., *Mecánica de Fluidos*, (McGraw Hill, 5ta. Ed., Madrid, España, 2004).