

Método de deflexión-pendiente para vigas estáticamente indeterminadas, considerando las deformaciones por cortante.

Deflection-slope method for statically indeterminate beams, considering the deformations by shear



Ing. Arnulfo Luévanos Rojas

Ingeniero Civil

Doctor en Ingeniería con Especialidad en Sistemas de Planeación y Construcción.

Profesor-Investigador

Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura de Universidad Juárez del Estado de Durango. México.

Teléfono: 871-7147119

E-mail: arnulfol_2007@hotmail.com

Recibido: 05-06-11

Aceptado: 20-07-11

RESUMEN:

En la presente investigación se propone un método para analizar vigas continuas, el cual considera las deformaciones por cortante, que es una innovación al método de deflexión-pendiente, el cual se utiliza para analizar toda clase de estructuras, en este caso se aplica a vigas continuas. Esta metodología toma en cuenta las deformaciones por cortante y se hace una comparación con el método clásico, que es el de despreciar las deformaciones por cortante como normalmente se hace, las diferencias entre ambos modelos son mayores, sobre todo en claros cortos, como se puede notar en las tablas de resultados de los problemas considerados y no todos están del lado de la seguridad. Por lo tanto, la práctica usual, despreciando las deformaciones por cortante en claros cortos entre sus apoyos, no será una solución recomendable y se propone el empleo de considerarlas y además se apega más a la realidad.

Palabras clave: Deformaciones por cortante, Coeficiente de Poisson, Módulo al cortante, Módulo de elasticidad, Área de cortante.

ABSTRACT:

In the present investigation a method sets out to analyze continuous beams, which consider the deformations by shear, which is an innovation to the deflection-slope method, which is used to analyze all class of structures, in this case is applied to continuous beams. This methodology takes into account the deformations by shear and a comparison with the classic method becomes, that is the despise the deformations by shear as normally is made, the differences between both models are majors, mainly in clear short, as it is presented in the tables of results of the considered problems and all are not of the side of the security. Therefore, the usual practice, despising the deformations by shear in short clear between

its supports, will not be a recommendable solution and the use set out to consider them and furthermore he is real.

Keywords: Shear deformations, Poisson coefficient, Shear module, Elasticity module, Shear area.

Introducción:

El análisis estructural es el estudio de las estructuras como sistemas discretos. La teoría de las estructuras se basa esencialmente en los fundamentos de la mecánica con los cuales se formulan los distintos elementos estructurales. Las leyes o reglas que definen el equilibrio y continuidad de una estructura se pueden expresar de distintas maneras, por ejemplo ecuaciones diferenciales parciales de un medio continuo tridimensional, ecuaciones diferenciales ordinarias que definen a una barra o las distintas teorías de vigas, o llanamente ecuaciones algebraicas para una estructura discretizada. Mientras más se profundiza en la física del problema, se van desarrollando teorías que son más apropiadas para resolver ciertos tipos de estructuras y que demuestran ser más útiles para cálculos prácticos. Sin embargo, en cada nueva teoría se hacen hipótesis acerca de cómo se comporta el sistema o el elemento. Por lo tanto, debemos estar siempre conscientes de esas hipótesis cuando se evalúan resultados, fruto de las teorías que aplicamos o desarrollamos [1].

En el análisis de sistemas estructurales ha sido estudiado por diversos investigadores en el pasado. En 1857, Benoit Paul Emile Clapeyron presentó a la Academia Francesa su "Teorema de los tres Momentos" para el análisis de las vigas continuas, en la misma forma que Bertot la había publicado dos años antes en las Memorias de la Sociedad de Ingenieros Civiles de Francia, pero sin darle crédito alguno. Puede decirse que a partir de este momento se inicia el desarrollo de una verdadera "Teoría de las Estructuras" [2 y 3]. En 1854 el Ingeniero francés Jacques Antoine Charles Bresse publicó su libro "Recherches Analytiques sur la Flexion et la Résistance de Pieces Courbés" en que presentaba métodos prácticos para el análisis de vigas curvas y arcos [2 y 3]. En 1867 fue introducida por el alemán Emil Winkler (1835-1888), la "Línea de Influencia". También hizo importantes contribuciones a la Resistencia de Materiales, especialmente en la teoría de flexión de vigas curvas, flexión de vigas apoyadas en medios elásticos [2 y 3]. James Clerk Maxwell (1830-1879) de la Universidad de Cambridge, publicó el que podríamos llamar el primer método sistemático de análisis para estructuras estáticamente indeterminadas, basado en la igualdad de la energía interna de deformación de una estructura cargada y el trabajo externo realizado por las cargas aplicadas; igualdad que había sido establecida por Clapeyron. En su análisis, presentó el Teorema de las Deformaciones Recíprocas, que por su brevedad y falta de ilustración, no fue apreciado en su momento. En otra publicación posterior presentó su diagrama de fuerzas internas para cerchas, que combina en una sola figura todos los polígonos de fuerzas. El diagrama fue extendido por Cremona, por lo que se conoce como el diagrama de Maxwell-Cremona [2 y 3]. El italiano Betti en 1872, publicó una forma generalizada del Teorema de Maxwell, conocida como el Teorema Recíproco de Maxwell-Betti [2 y 3]. El alemán Otto Mohr (1835-1918) hizo grandes aportes a la Teoría de Estructuras. Desarrolló el método para determinar las deflexiones en vigas, conocido como el método de las cargas elásticas o la Viga Conjugada. Presentó también una derivación más simple y más extensa del método general de Maxwell para el análisis de estructuras indeterminadas, usando los principios del trabajo virtual. Hizo aportes en el análisis gráfico de deflexiones de cerchas, con el complemento al diagrama de Williot, conocido como el diagrama de Mohr-Williot, de gran utilidad práctica. También obtuvo su famoso Círculo de Mohr, para la representación gráfica de los esfuerzos en un estado biaxial de esfuerzos [2 y 3]. Alberto Castigliano (1847-1884) presentó en 1873 el principio del trabajo mínimo, que había sido sugerido anteriormente por Menabrea, y que se conoce como el Primer Teorema de Castigliano. Posteriormente, presentó el denominado Segundo Teorema de Castigliano para encontrar deflexiones, como un corolario del primero. En 1879 publicó en París su famoso libro *Théoreme de l'Equilibre de Systèmes Elastiques et ses Applications*, destacable por su originalidad y muy importante en el desarrollo del análisis hiperestático de estructuras [2 y 3]. Heinrich Müller-Breslau (1851-1925), publicó en 1886 un método básico para el análisis de estructuras indeterminadas, aunque en esencia era una variación de los

Revista de Arquitectura e Ingeniería. 2011, vol.5 no.2.

presentados por Maxwell y Mohr. Le dio gran importancia al Teorema de Maxwell de las Deflexiones Recíprocas en la evaluación de los desplazamientos. Descubrió que la "Línea de Influencia" para la reacción o una fuerza interna de una estructura era, en alguna escala, la elástica producida por una acción similar a esa reacción o fuerza interna. Conocido como el teorema de Müller-Breslau, es la base para otros métodos indirectos de análisis de estructuras mediante modelos [2 y 3]. Hardy Cross (1885-1959) profesor de la Universidad de Illinois, publicó en 1930 su famoso método de Distribución de Momentos, que puede decirse revolucionó el análisis de las estructuras de marcos continuos de concreto reforzado y puede considerarse uno de los mayores aportes al análisis de estructuras indeterminadas.

Este método de aproximaciones sucesivas evade la resolución de sistemas de ecuaciones, como las presentadas en los métodos de Mohr y Maxwell. La popularidad del método decayó con la disponibilidad de los computadores, con los cuales la resolución de sistemas de ecuaciones dejó de ser un problema.

Los conceptos generales del método fueron extendidos posteriormente al estudio de flujo en tuberías. Posteriormente se hicieron populares los métodos de Kani y Takabeya, también de tipo iterativo y hoy en desuso [2 y 3]. En la década de los 50, Turner, Clough, Martin y Topp presentan lo que puede llamarse como el inicio de la aplicación a estructuras de los métodos matriciales de la rigidez, que han obtenido tanta popularidad en la actualidad. Posteriormente, se desarrollaron los métodos de elementos finitos, que han permitido el análisis sistemático de gran número de estructuras y la obtención de esfuerzos y deformaciones en sistemas complejos como las presas de concreto usadas en las hidroeléctricas. Entre sus impulsores están: Clough, Wilson, Zienkiewics y Gallagher [2, 3, 4].

El análisis estructural puede abordarse utilizando tres enfoques principalmente [5]: a) formulaciones tensoriales (mecánica newtoniana o vectorial), b) formulaciones basadas en los principios del trabajo virtual, y c) formulaciones basadas en la mecánica clásica [6].

Por lo que se refiere a las técnicas convencionales de análisis estructural de vigas continuas, la práctica común es despreciar las deformaciones por cortante.

En este documento se propone incluir las deformaciones por cortante y hacer una comparación cuando se desprecia el efecto de la deformación por cortante.

Desarrollo:

En el esquema de deformación de una viga que se ilustra en la Figura 1, muestra la diferencia entre la teoría de Timoshenko y la teoría de Euler-Bernouilli: en la primera θ_x y $\partial y/\partial x$ no tienen necesariamente que coincidir, mientras que en la segunda son iguales [6].

La diferencia fundamental entre la teoría de Euler-Bernouilli y la teoría de Timoshenko es que en la primera el giro relativo de la sección se aproxima mediante la derivada del desplazamiento vertical, esto constituye una aproximación válida sólo para piezas largas en relación a las dimensiones de la sección transversal, y entonces sucede que las deformaciones debidas al esfuerzo cortante son despreciables frente a las deformaciones ocasionadas por el momento flexionante. En la teoría de Timoshenko, donde no se desprecian las deformaciones debidas al cortante y por tanto es válida también para vigas cortas, la ecuación de la curva elástica viene dada por el sistema de ecuaciones más complejo:

$$G \left(\frac{dy}{dx} - \theta_z \right) = \frac{V_y}{A_c} \quad (1)$$

$$E \left(\frac{d\theta_z}{dx} \right) = \frac{M_z}{I_z} \quad (2)$$

Donde: G = módulo al cortante del material
 θ_z = rotación alrededor del eje "z"
 V_y = fuerza cortante en dirección "y"
 A_c = área de cortante de la sección transversal
 E = modulo de elasticidad del material
 M_z = momento flexionante alrededor del eje "z"
 I_z = momento de inercia de la sección transversal alrededor del eje "z"

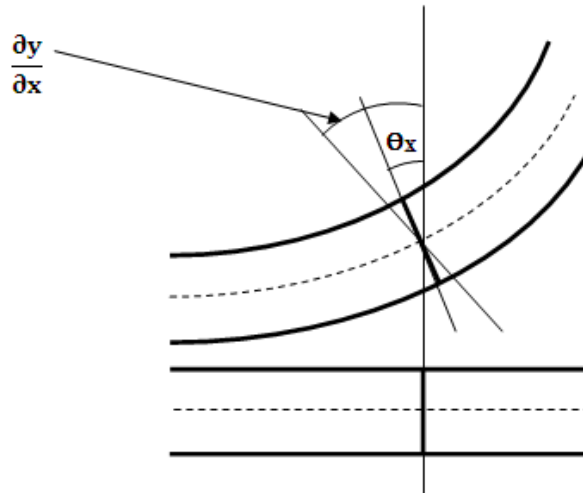


Figura 1.
viga.

Deformación de un elemento de

Derivando la ecuación (1) y substituyéndola en la ecuación (2), llegamos a la ecuación de la curva elástica incluyendo el efecto del esfuerzo cortante:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{GA_c} \frac{dV_y}{dx} + \frac{M_z}{EI_z} \quad (3)$$

Integrando la ecuación (3), nos da lo siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{V_y}{GA_c} + \int \frac{M_z}{EI_z} dx \quad (4)$$

Este método puede ser usado para análisis de todo tipo de vigas estáticamente indeterminadas. Se consideran que todas las juntas son rígidas, es decir que los ángulos entre miembros en las juntas no cambian en valor, cuando es aplicada la carga. Entonces las juntas en apoyos interiores de vigas estáticamente indeterminadas pueden ser consideradas juntas rígidas de 180°. Cuando las vigas son deformadas, las juntas rígidas son consideradas rotaciones, es decir que la tangente permanece recta antes y después de la aplicación de la carga.

Otra consideración es por equilibrio en las juntas, la suma de los momentos flexionantes debe ser cero.

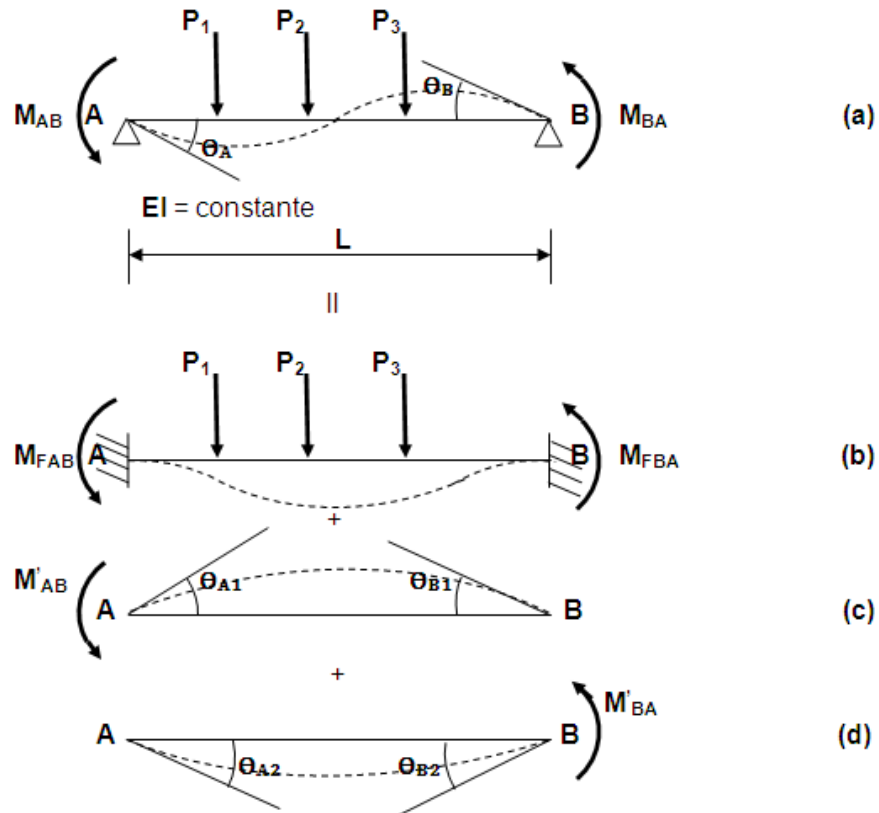


Figura 2. Derivación de las ecuaciones de deflexión-pendiente.

En las ecuaciones de deflexión-pendiente, los momentos que actúan en los extremos de los miembros son expresados en términos de las rotaciones y de las cargas sobre los miembros. Entonces la barra AB mostrada en la Figura 2(a), serán expresados en términos de θ_A y θ_B y las cargas aplicadas P_1 , P_2 y P_3 . Los momentos se consideran positivos, cuando giran en contra de las manecillas del reloj y negativo cuando giran a favor. Ahora, con las cargas aplicadas sobre el miembro, los momentos en los extremos son M_{FAB} y M_{FBA} , es decir, se consideran como empotramiento perfecto, se presenta en la Figura 2(b). Adicionalmente en los momentos en los extremos, M'_{AB} y M'_{BA} , son causados por θ_A y θ_B , respectivamente. Si θ_{A1} y θ_{B1} son causados por M'_{AB} , según la Figura 2(c), y en cuanto a θ_{A2} y θ_{B2} son causados por M'_{BA} , se observan en la Figura 2(d), las condiciones de geometría son [7, 8, 9, 10, 11]:

$$\theta_A = -\theta_{A1} + \theta_{A2} \quad (5)$$

$$\theta_B = \theta_{B1} - \theta_{B2} \quad (6)$$

Por superposición:

$$M_{AB} = M_{FAB} + M'_{AB} \quad (7)$$

$$M_{BA} = M_{FBA} + M'_{BA} \quad (8)$$

Analizaremos la viga de la Figura 2(c) para encontrar θ_{A1} y θ_{B1} en función de M'_{AB} :
Por equilibrio:

$$V_A = V_B = \frac{M'_{AB}}{L}$$

$$M'_{AB} = V_A L$$

Por lo tanto la fuerza cortante y el momento a una distancia "x" son:

$$V_x = V_A = \frac{M'_{AB}}{L}$$

$$M_x = M'_{AB} - V_A x = V_A L - V_A x = V_A (L - x) = \frac{M'_{AB}}{L} (L - x)$$

Sustituyendo M_x y V_x en función de M'_{AB} en la ecuación (2), luego separando la deformación por cortante y por flexión para obtener la rigidez, queda de la siguiente manera:

Deformación por cortante:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M'_{AB}}{GA_c L}$$

Integrando nuevamente la ecuación anterior, se presenta:

$$y = \frac{M'_{AB}}{GA_c L} x + C_1$$

Considerando las condiciones de frontera, cuando $x = 0$; $y = 0$; es $C_1 = 0$.

$$y = \frac{M'_{AB}}{GA_c L} x$$

Deformación por flexión:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M'_{AB}}{EI_z L} \int (L - x) dx$$

Desarrollando la integral, se muestra:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M'_{AB}}{EI_z L} \left(Lx - \frac{x^2}{2} + C_2 \right)$$

Integrando nuevamente, se obtiene:

$$y = \frac{M'_{AB}}{EI_z L} \left(\frac{L}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} + C_2 x + C_3 \right)$$

Considerando las condiciones de frontera, cuando $x = 0$; $y = 0$; es $C_3 = 0$.

$$y = \frac{M'_{AB}}{EI_z L} \left(\frac{L}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} + C_2 x \right)$$

Ahora considerando las condiciones de frontera, cuando $x = L$; $y = 0$; se da:

$$C_2 = -\frac{L^2}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{M'_{AB}}{EI_z L} \left(Lx - \frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{3} \right)$$

$$y = \frac{M'_{AB}}{EI_z L} \left(\frac{L}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} - \frac{L^2}{3} x \right)$$

Sustituyendo $x = 0$, en la ecuación dy/dx , para encontrar el giro en el apoyo A, se muestra como sigue:

$$\theta_{A1F} = -\frac{M'_{AB} L}{3EI_z}$$

Luego se sustituyendo $x = L$, en la ecuación dy/dx , para encontrar el giro en el apoyo B, según se obtiene lo siguiente:

$$\theta_{B1F} = \frac{M'_{AB} L}{6EI_z}$$

Si consideramos que tienen su radio de curvatura en la parte inferior, entonces los giros son positivos:

$$\theta_{A1F} = +\frac{M'_{AB} L}{3EI_z}$$

$$\theta_{B1F} = +\frac{M'_{AB} L}{6EI_z}$$

La rotación por cortante, tomando en cuenta el radio de curvatura es:

$$\theta_{A1C} = \frac{dy}{dx} = \frac{M'_{AB}}{GA_c L}$$

$$\theta_{B1C} = \frac{dy}{dx} = -\frac{M'_{AB}}{GA_c L}$$

Sumando la rotación por cortante y por flexión en el nudo A, se obtiene:

$$\theta_{A1} = \theta_{A1F} + \theta_{A1C}$$

$$\theta_{A1} = +\frac{M'_{AB} L}{3EI_z} + \frac{M'_{AB}}{GA_c L}$$

$$\theta_{A1} = +\frac{M'_{AB} L}{12EI_z} \left(4 + \frac{12EI_z}{GA_c L^2} \right)$$

Luego se sustituye [12]:

$$\varnothing = \frac{12EI_z}{GA_c L^2} \quad (9)$$

$$\theta_{A1} = \frac{M'_{AB} L}{12EI_z} (4 + \varnothing) \quad (10)$$

Sumando la rotación por cortante y por flexión en el nudo B, se obtiene:

$$\theta_{B1} = \theta_{B1F} + \theta_{B1C}$$

$$\theta_{B1} = + \frac{M'_{AB} L}{6EI_z} - \frac{M'_{AB}}{GA_c L}$$

$$\theta_{B1} = + \frac{M'_{AB} L}{12EI_z} \left(2 - \frac{12EI_z}{GA_c L^2} \right)$$

Luego se sustituye la ecuación (9) en la ecuación anterior, se presenta:

$$\theta_{B1} = \frac{M'_{AB} L}{12EI_z} (2 - \varnothing) \quad (11)$$

Analizaremos la viga de la Figura 2(d) para encontrar θ_{A2} y θ_{B2} en función de M'_{BA} de la misma manera que se realizó en la Figura 2(c), se obtiene lo siguiente:

$$\theta_{A2} = \frac{M'_{BA} L}{12EI_z} (2 - \varnothing) \quad (12)$$

$$\theta_{B2} = \frac{M'_{BA} L}{12EI_z} (4 + \varnothing) \quad (13)$$

Sustituyendo las rotaciones en la ecuación (5) para el apoyo A y la ecuación (6) para el apoyo B, se obtiene lo siguiente:

$$\theta_A = - \frac{M'_{AB} L}{12EI_z} (4 + \varnothing) + \frac{M'_{BA} L}{12EI_z} (2 - \varnothing) \quad (14)$$

$$\theta_B = \frac{M'_{AB} L}{12EI_z} (2 - \varnothing) - \frac{M'_{BA} L}{12EI_z} (4 + \varnothing) \quad (15)$$

Desarrollando las ecuaciones (14) y (15), para encontrar M'_{AB} y M'_{BA} en función de θ_A y θ_B , queda como sigue:

$$M'_{AB} = \frac{EI_z}{L} \left[- \left(\frac{4 + \varnothing}{1 + \varnothing} \right) \theta_A - \left(\frac{2 - \varnothing}{1 + \varnothing} \right) \theta_B \right] \quad (16)$$

$$M'_{BA} = \frac{EI_z}{L} \left[- \left(\frac{4 + \varnothing}{1 + \varnothing} \right) \theta_B - \left(\frac{2 - \varnothing}{1 + \varnothing} \right) \theta_A \right] \quad (17)$$

Finalmente sustituyendo las ecuaciones (16) y (17) en las ecuaciones (7) y (8), respectivamente, se obtiene las ecuaciones de deflexión-pendiente para vigas estáticamente indeterminadas:

$$M_{AB} = M_{FAB} + \frac{EI_z}{L} \left[-\left(\frac{4 + \phi}{1 + \phi}\right) \theta_A - \left(\frac{2 - \phi}{1 + \phi}\right) \theta_B \right] \quad (18)$$

$$M_{BA} = M_{FBA} + \frac{EI_z}{L} \left[-\left(\frac{4 + \phi}{1 + \phi}\right) \theta_B - \left(\frac{2 - \phi}{1 + \phi}\right) \theta_A \right] \quad (19)$$

Aplicación

Desarrollando el análisis estructural de la siguiente viga de acero, según se muestra en la Figura 3, despreciando y considerando las deformaciones por cortante, en base con los siguientes datos:

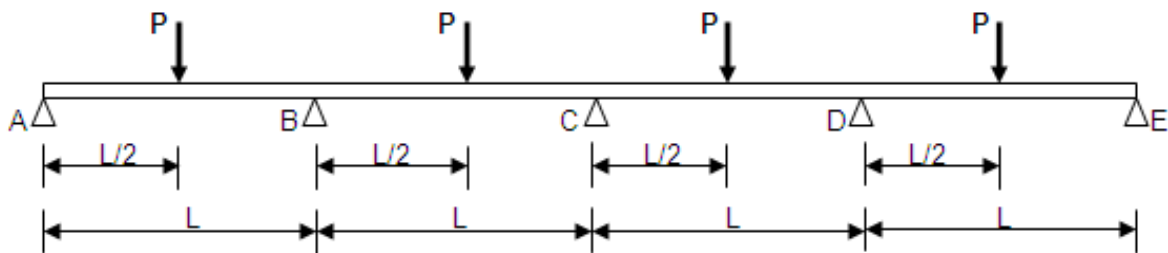


Figura 3. Viga continua.

$P = 20000.00\text{kg}$
 $L = 10.00\text{m}; 5.00\text{m}; 3.00\text{m}$
 $E = 2,040,734\text{kg/cm}^2$
 Propiedades de la viga W24X94
 $A = 178.71\text{cm}^2$
 $A_c = 80.83\text{cm}^2$
 $I = 111,966\text{cm}^4$
 $\nu = 0.32$

Las ecuaciones de deflexión-pendiente, despreciando las deformaciones por cortante, son:

$$M_{AB} = M_{FAB} + \frac{EI}{L} [-4\theta_A - 2\theta_B]$$

$$M_{BA} = M_{FBA} + \frac{EI}{L} [-4\theta_B - 2\theta_A]$$

Las ecuaciones de deflexión-pendiente, considerando las deformaciones por cortante, son:

$$M_{AB} = M_{FAB} + \frac{EI}{L} \left[-\left(\frac{4 + \phi}{1 + \phi}\right) \theta_A - \left(\frac{2 - \phi}{1 + \phi}\right) \theta_B \right]$$

$$M_{BA} = M_{FBA} + \frac{EI}{L} \left[-\left(\frac{4 + \phi}{1 + \phi}\right) \theta_B - \left(\frac{2 - \phi}{1 + \phi}\right) \theta_A \right]$$

Para $L = 10.00\text{m}$

$$\phi_{AB} = \phi_{BC} = \phi_{CD} = \phi_{DE} = 0.0438832473$$

Para $L = 5.00\text{m}$

$$\phi_{AB} = \phi_{BC} = \phi_{CD} = \phi_{DE} = 0.1755329892$$

Para $L = 3.00\text{m}$

$$\theta_{AB} = \theta_{BC} = \theta_{CD} = \theta_{DE} = 0.4875916368$$

Condición de equilibrio de momentos en los nodos son:

Nodo A:

$$M_{AB} = 0 \quad (I)$$

Nodo B:

$$M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad (II)$$

Nodo C:

$$M_{CB} + M_{CD} = 0 \quad (III)$$

Nodo D:

$$M_{DC} + M_{DE} = 0 \quad (IV)$$

Nodo E:

$$M_{ED} = 0 \quad (V)$$

A continuación se presentan las siguientes tablas con los resultados obtenidos:

Tabla # 1. Rotaciones en cada uno de los apoyos en radianes.

Giro	Caso # 1 L = 10.00m			Caso # 2 L = 5.00m			Caso # 3 L = 3.00m		
	DDC	CDC	$\frac{DDC}{CDC}$	DDC	CDC	$\frac{DDC}{CDC}$	DDC	CDC	$\frac{DDC}{CDC}$
θ_A	+0.00313	+0.00320	0.9781	+0.00078	+0.00085	0.9176	+0.00028	+0.00035	0.8000
θ_B	-0.00078	-0.00077	1.0130	-0.00020	-0.00019	1.0526	-0.00007	-0.00006	1.1667
θ_C	0	0	0	0	0	0	0	0	0
θ_D	+0.00078	+0.00077	1.0130	+0.00020	+0.00019	1.0526	+0.00007	+0.00006	1.1667
θ_E	-0.00313	-0.00320	0.9781	-0.00078	-0.00085	0.9176	-0.00028	-0.00035	0.8000

θ_i = El ángulo que forma la tangente debido a la deformación que sufre el nodo i.

DDC = Despreciando las deformaciones por cortante.

CDC = Considerando las deformaciones por cortante.

Tabla # 2. Fuerzas cortantes finales en kilogramos.

Fuerza cortante	Caso # 1 L = 10.00m			Caso # 2 L = 5.00m			Caso # 3 L = 3.00m		
	DDC	CDC	$\frac{DDC}{CDC}$	DDC	CDC	$\frac{DDC}{CDC}$	DDC	CDC	$\frac{DDC}{CDC}$
V_{AB}	+6786	+6815	0.9957	+6786	+6896	0.9840	+6786	+7053	0.9620
V_{BA}	-13214	-13185	1.0022	-13214	-13104	1.0084	-13214	-12947	1.0207
V_{BC}	+11071	+11016	1.0050	+11071	+10868	1.0188	+11071	+10597	1.0447
V_{CB}	-8929	-8984	0.9938	-8929	-9132	0.9777	-8929	-9403	0.9496
V_{CD}	+8929	+8984	0.9938	+8929	+9132	0.9777	+8929	+9403	0.9496
V_{DC}	-11071	-11016	1.0050	-11071	-10868	1.0188	-11071	-10597	1.0447
V_{DE}	+13214	+13185	1.0022	+13214	+13104	1.0084	+13214	+12947	1.0207
V_{ED}	-6786	-6815	0.9957	-6786	-6896	0.9840	-6786	-7053	0.9620

V_{ij} = Fuerza cortante de la barra ij en el extremo i.

V_{ji} = Fuerza cortante de la barra ij en el extremo j.

Tabla # 3. Se muestran los momentos finales en kilogramos-metro.

Momento	Caso # 1 L = 10.00m			Caso # 2 L = 5.00m			Caso # 3 L = 3.00m		
	DDC	CDC	$\frac{DDC}{CDC}$	DDC	CDC	$\frac{DDC}{CDC}$	DDC	CDC	$\frac{DDC}{CDC}$
M_{AB}	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$M_{\phi_{AB}}$	+33929	+34076	0.9957	+16964	+17240	0.9840	+10179	+10580	0.9621
M_{BA}	-32143	-31848	1.0093	-16071	-15519	1.0356	-9643	-8840	1.0908
M_{BC}	-32143	-31848	1.0093	-16071	-15519	1.0356	-9643	-8840	1.0908
$M_{\phi_{BC}}$	+23214	+23232	0.9992	+11607	+11650	0.9963	+6964	+7056	0.9870
M_{CB}	-21429	-21688	0.9881	-10714	-11181	0.9583	-6429	-7048	0.9121
M_{CD}	-21429	-21688	0.9881	-10714	-11181	0.9583	-6429	-7048	0.9121
$M_{\phi_{CD}}$	+23214	+23232	0.9992	+11607	+11650	0.9963	+6964	+7056	0.9870
M_{DC}	-32143	-31848	1.0093	-16071	-15519	1.0356	-9643	-8840	1.0908
M_{DE}	-32143	-31848	1.0093	-16071	-15519	1.0356	-9643	-8840	1.0908
$M_{\phi_{DE}}$	+33929	+34076	0.9957	+16964	+17240	0.9840	+10179	+10580	0.9621
M_{ED}	0	0	0	0	0	0	0	0	0

M_{ij} = Momento flexionante negativo de la barra ij en el extremo i.

$M_{\phi_{ij}}$ = Momento flexionante positivo de la barra ij.

M_{ji} = Momento flexionante negativo de la barra ij en el extremo j.

Conclusiones:

De acuerdo a la Tabla 1, que presenta las rotaciones en cada uno de los apoyos, se observa que la diferencia del método de deflexión-pendiente, despreciando y considerando las deformaciones por cortante, es bastante considerable para elementos cortos. Por ejemplo para el claro de 3.00m, existen diferencias hasta de un 20%, aproximadamente, unas están del lado de la seguridad y otras están fuera.

En cuanto a la Tabla 2, que muestra las fuerzas cortantes en los extremos de las barras entre ambos métodos, siendo las diferencias mayores, cuando la longitud del elemento es corto. Estos resultados para el claro de 3.00m, tienen variantes alrededor del 5%, unas están del lado no conservador y otra existen reducciones.

En lo que respecta a la Tabla 3, donde se ilustran los momentos flexionantes, tanto los negativos como los positivos, también existen grandes diferencias cuando se reduce el claro, entre ambos métodos y no todas están del lado de la seguridad. Ya que existen diferencias hasta un 9%.

Por lo tanto, la práctica usual de considerar el método de deflexión-pendiente (Despreciando las deformaciones por cortante), no será una solución recomendable, cuando tenemos claros cortos entre apoyos. Por lo que tomando en cuenta la aproximación numérica, el método de deflexión-pendiente (Considerando las deformaciones por cortante), resulta ser el método más adecuado para análisis estructural y además se apega más a condiciones reales.

Referencias:

[1] Tena Colunga, Arturo. (2007). Análisis de Estructuras con Métodos Matriciales. Limusa. México.

- [2] Nacimiento del análisis estructural. Disponible en: <http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/sedes/manizales/4080020/Lecciones/Capitulo%201/NACIMIENTO%20DEL%20ANALISIS%20ESTRUCTURAL%20.htm> (Consulta: noviembre 23 del 2010).
- [3] Franjul Sánchez A. Disponible en: <http://andreafranjul.blogspot.com/2009/06/nacimiento-del-analisis-estructural.html> (Consulta: diciembre 13 del 2010).
- [4] Clough, Ray W. y Penzien, J. (1975). Dynamics of Structures. Mc Graw-Hill. E. U. A.
- [5] Przemieniecki, J. S. (1985). Theory of Matrix Structural Analysis. Mc Graw-Hill. E. U. A.
- [6] Flexión mecánica. Disponible en: [http://es.wikipedia.org/wiki/Flexi%C3%B3n_mec%C3%](http://es.wikipedia.org/wiki/Flexi%C3%B3n_mec%C3%BA) (Consulta enero 18 del 2011).
- [7] Jaramillo Jiménez, José Oscar. (2004). Análisis clásico de estructuras. Disponible en: http://books.google.com.mx/books?id=mwohfYq9zC8C&pg=PA30&lpg=PA30&dq=nacimiento+del+analisis+estructural&source=bl&ots=TqTI5avuMY&sig=dgomgcVJ8CKm1HZSfrKV2sOEIs8&hl=es&ei=FNluTYbSNZSksQPz54nSCw&sa=X&oi=book_result&ct=result&resnum=6&ved=0CDkQ6AEwBQ#v=onepage&q&f=false (Consulta: febrero 22 del 2011).
- [8] Luthe Garcia, Rodolfo. (1998). Análisis Estructural. Alfaomega. México.
- [9] West, Harry H. (1984). Analysis of Structures. E. U. A.
- [10] Mc Cormac, Jack C. (2007). Structural Analysis: using classical and matrix methods. John Wiley & Sons. E. U. A.
- [11] Laible, Jeffrey P. (1988). Análisis Estructural. Mc Graw-Hill. México.
- [12] Appendix. Formulario de Teoría de Estructuras. Matrices de Rigidez Elementales, de Masa Congruentes, y de Rigidez Geométrica. Disponible en: http://www.esiold.us.es/php/infgen/aulav/teorestructurasind/Matrices_de_rigidez_elementales.pdf (Consulta: marzo 15 del 2011).