Expansiones no rosáceas del cuerpo de los reales

Walther Muete[1]

Escuela de Matemáticas
Universidad Sergio Arboleda, Bogotá

Estudiamos las estructuras $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, 2^{\mathbb{Z}})$ *y* $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, \mathcal{S})$, *donde* $2^{\mathbb{Z}}$ *es el subgrupo multiplicativo de los números reales positivos que consiste en las potencias enteras de 2 y* $\mathcal{S}$ *es el conjunto* $\{(e^t \cos(t), e^t \mathrm{sen}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$, *y demostraremos que no son rosáceas. En general demostraremos que cualquier expansión del cuerpo de los números* $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, \mathcal{A})$ *con* $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}$, *un conjunto contable de puntos con un punto de acumulación, no es rosácea.*

Palabras claves: Teorías rosáceas, teorías d–minimales.

We study the structures $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, 2^{\mathbb{Z}})$ *and* $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, \mathcal{S})$, *where* $2^{\mathbb{Z}}$ *is the multiplicative subgroup of positive real numbers consisting of integer powers of 2 and* $\mathcal{S}$ *is the set* $\{(e^t \cos(t), e^t \sin(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$, *showing that they are not rosy. In general we show that every superstructure of real numbers* $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, \mathcal{A})$, *with* $\mathcal{A} \cap \mathbb{R}$ *a countable set of points with an acummulation point, is not rosy.*

Keywords: Rosy theories, d–minimal theories.

MSC: 03C50, 03C68

1. Introducción

El estudio de las expansiones de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ha sido de gran interés en Teoría de Modelos. Tarski, en el año 1930, estudió la teoría $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$, conocida como la teoría de los cuerpos ordenados reales cerrados, cuyo acrónimo en inglés es $RCOF$. Tarski demostró la decibilidad de esta teoría y junto con Seindenberg demostró que $RCOF$ admite la eliminación de cuantificadores. Por lo tanto obtenemos que los subconjuntos definibles en una variable en $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ son uniones finitas de puntos e intervalos.

[1] `waltheraml@gmail.com`

En el año 1986, Pillay y Steinhorn fueron precursores del estudio de estructuras ordenadas cuyos conjuntos definibles en una variable son uniones finitas de puntos e intervalos; a estas estructuras las denominamos o–minimales. Sea $\mathcal{M} \models T$ donde T extiende DLO. Decimos que $\mathcal{M}$ es o–minimal si todo subconjunto definible en una variable es unión finita de puntos e intervalos. Gracias al trabajo de Tarski y Seindenberg podemos establecer que $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ es o–minimal. Otros ejemplos de estructuras o–minimales son $(\mathbb{Q}, <)$ y $(\mathbb{Q}, +, -, 0, 1, <)$. En [14], Pillay y Steinhorn demostraron la propiedad de intercambio para el par $(\wp(\mathcal{M}), acl)$ siendo $\mathcal{M}$ una estructura o–minimal. Por lo tanto tenemos pregeometrías en estructuras o–minimales.

Estudiaremos las estructuras $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, 2^{\mathbb{Z}})$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, \mathcal{S})$, donde $2^{\mathbb{Z}}$ es el subgrupo multiplicativo de los números reales positivos que consiste en las potencias enteras de 2 y $\mathcal{S}$ es el conjunto

$$\{(e^t \cos(t),\, e^t \operatorname{sen}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

La estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, 2^{\mathbb{Z}})$ fue inicialmente estudiada por van den Dries, quien describió, por medio de la eliminación de cuantificadores, los conjuntos definibles en una variable. Posteriormente, Miller estudió la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, \mathcal{S})$, y demostó que los subconjuntos definibles en una variable en las estructuras $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, 2^{\mathbb{Z}})$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, \mathcal{S})$ poseen la misma caracterización: son uniones finitas de conjuntos discretos o con interior no vacío. Dicho comportamiento motivó la definición de estructura d–minimal.

Por otra parte Onshuus, en [11], demostró que las estructuras o–minimales son rosáceas. Así que podríamos preguntarnos si las estructuras d–minimales también son rosáceas. En este escrito empleamos el teorema de caracterización de teorías rosáceas presentado en [7, Teorema 5.3] para dar un contraejemplo, y demostró que las estructuras $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, 2^{\mathbb{Z}})$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, \mathcal{S})$ no son rosáceas.

Sea T una teoría completa en un lenguaje de primer orden. La función espectro de T es la función $I(\cdot, T)$ tal que para cualquier cardinal λ, $I(\lambda, T)$ es el número módulo isomorfismo de modelos de T con cardinal λ. A finales de los años 60, Morley conjeturó que la función $I(\lambda, T)$ es creciente para cardinales no contables, es decir si $\aleph_0 < \lambda < \kappa$, entonces $I(\lambda, T) \leq I(\kappa, T)$.

El estudio de las teorías estables comenzó con la demostración del teorema de categoricidad de Morley y continuó con el trabajo de Shelah, quien demostró la conjetura de Morley. En este proceso Morley desarrolló rangos y definió una noción de bifurcación $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}$ que dió origen a una relación de independencia para las teorías estables.

Posteriormente Onshuus desarrolló la noción de bifurcación þ y definió una relación de independencia þ, $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{\text{þ}}$, que enunciaremos más adelante. Esta coincide con la no bifurcación para teorías estables y con la independencia geométrica en teorías *o*–minimales. Las teorías en las cuales la relación þ satisface la simetría que enunciamos más adelante se denominan rosáceas.

2. Preliminares

A continuación presentamos algunos hechos y definiciones. En este proceso asumimos que el lector posee conocimientos básicos en teoría de modelos. A lo largo de este artículo nos referiremos a $\mathcal{L}$ como un lenguaje de primer orden, T una teoría en el lenguaje $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ una estructura $\mathcal{L}$.

Definición 1. *Sea $\mathcal{M} \models T$. Decimos que $A \subseteq M^n$ es un* **conjunto definible** *si existe una fórmula $\psi(x_1, \cdots, x_n)$ posiblemente con parámetros en M tal que:*

$$A = \{(m_1, \cdots, m_n) \in M^n \mid \mathcal{M} \models \psi(m_1, \cdots, m_n)\}.$$

La eliminación de cuantificadores para una teoría T posee consecuencias importantes, entre ellas, la caracterización de los conjuntos definibles en una variable en los modelos de T.

Definición 2. *Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario con un símbolo de relación binaria $<$ y T una teoría $\mathcal{L}$ que extiende la teoría de órdenes lineales densos sin extremos. Decimos que T es o*–**minimal** *si los conjuntos definibles en todo modelo de T en una variable son uniones finitas de puntos e intervalos.*

Ejemplo 3. Por el Teorema 3.3.15 en [8] tenemos que $RCOF$ admite eliminación de cuantificadores. Un resultado inicialmente demostrado por Tarski y Seidenberg. Por lo tanto tenemos que los subconjuntos definibles en una variable de $\mathbb{R}$ son uniones finitas de puntos e intervalos.

Definición 4. *Sea $\mathcal{L}$ un vocabulario con un símbolo de relación binario $<$ y sea T una teoría $\mathcal{L}$ que extiende a DLO. Decimos que T es d*–**minimal** *si los subconjuntos definibles en una variable en todo modelo de T son uniones finitas de conjuntos discretos y de conjuntos con interior no vacío.*

Ejemplo 5. Un resultado interesante demostrado por Miller en [9] es que las estructuras $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<,\mathcal{S})$ son d–minimales, donde

$$\mathcal{S} := \{(e^t \cos(t),\, e^t \operatorname{sen}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}\,,$$

y $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<,2^{\mathbb{Z}})$, donde $2^{\mathbb{Z}}$ es interpretado como el grupo multiplicativo de las potencias enteras de 2. Es fácil notar que estas estructuras no son o–minimales.

A continuación establecemos definiciones que generalizan conceptos algebraicos como independencia lineal, independencia algebraica, dimensión, grado de trascendencia, entre otros.

Definición 6. *Sea $\mathcal{M}$ un modelo de una teoría y sea $A \subseteq M$. La* **clausura algebraica** *de A, denotada como $acl(A)$, es la unión de los conjuntos finitos definibles con parámetros en A. La* **clausura definible** *de A consiste en la unión de los conjuntos unitarios definibles con parámetros en A, denotada por $dcl(A)$.*

Una consecuencia para cualquier subconjunto A de $\mathcal{M}$ modelo de T es que $dcl(A) \subseteq acl(A)$. Si el lenguaje $\mathcal{L}$ contiene la relación de orden $<$ y T extiende la teoría de órdenes lineales la noción de clausura algebraica y definible coinciden.

Así podemos concluir que en las estructuras $(\mathbb{Q},<)$, $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<)$, $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<,\mathcal{S})$ y $(\mathbb{R},+,\cdot,0,1,<,2^{\mathbb{Z}})$ estas nociones coinciden.

Definición 7. *Sea $\mathcal{M}$ un modelo de una teoría y sea $A \subseteq M$. Decimos que A es* **algebraicamente cerrado** *si $acl(A) = A$.*

Definición 8. *Sea X un conjunto. Un operador $cl : \wp(X) \to \wp(X)$ se denomina un* **operador de clausura** *si*

1. *$A \subseteq cl(A)$;*

2. *$A \subseteq cl(B)$ implica que $cl(A) \subseteq cl(B)$ y además $cl(A) = cl(cl(A))$;*

3. *$a \in cl(A)$ implica que $a \in cl(A_0)$ para algún $A_0 \subseteq A$ finito;*

El par (X, cl) donde cl es un operador de clausura, es una **pregeometría** *si:*

4. *$b \in cl(A \cup \{a\}) \setminus cl(A)$ implica que $a \in cl(A \cup \{b\})$.*

La propiedad **1** y **2** son conocidas como propiedades de monotonía del operador cl. La propiedad **3** es conocida como carácter finito. La última propiedad de esta definición es conocida como la propiedad de intercambio de Steinitz.

En general las propiedades **1**, **2** y **3** son verdaderas en cualquier modelo de una teoría T. La propiedad de intercambio de Steinitz no es válida en general.

Un hecho importante debido a Pillay y Steinhorn es que en la estructura $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <)$ el par $(\wp(\mathcal{R}), acl)$ conforma una pregeometría. Un resultado más reciente en esta línea de estudio, debido a Miller, es que las estructuras $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, \mathcal{S})$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, 2^{\mathbb{Z}})$ junto con la noción de clausura algebraica acl también conforman dos pregeometrías.

Definición 9. *Sea T una teoría donde acl tiene la propiedad de intercambio y A un conjunto. Decimos que A es* **algebraicamente independiente** *si para todo $a \in A$, $a \notin acl(A \setminus \{a\})$. Decimos que A es* **independiente** *sobre C si $a \notin acl(C \cup (A \setminus \{a\}))$ para todo $a \in A$.*

Las siguientes definiciones, tomadas de [15], están relacionadas con bifurcación y las teorías simples.

Definición 10.

1. *Sea $k < \omega$. Una fórmula $\phi(\bar{x}, \bar{a})$ k–**divide sobre** A si existe una sucesión $(\bar{a}_i \mid i < \omega)$ tal que para cada $i < \omega$, $\bar{a}_i \models tp(\bar{a}/A)$ y el conjunto $\{\phi(\bar{x}, \bar{a}_i)\}_{\bar{a}_i \models tp(\bar{a}/A)}$ es k–inconsistente. Es decir, cualquier subconjunto de tamaño k es inconsistente;*

2. *Un tipo parcial $\pi(\bar{x})$ k–**divide** sobre A si existe una fórmula $\phi(\bar{x})$ implicada por $\pi(\bar{x})$ que k–divide sobre A;*

3. *Una fórmula o un tipo parcial* **divide sobre** *A si k–divide para algún $k < \omega$;*

4. *Un tipo parcial $\pi(\bar{x})$ bifurca sobre A si existe $n < \omega$ y fórmulas $\phi_0(\bar{x}), \cdots, \phi_n(\bar{x})$ tales que $\pi(\bar{x})$ implica $\bigvee_{i \leq n} \phi_i(\bar{x})$ y cada $\phi_i(\bar{x})$ divide sobre A.*

Definición 11. *Un conjunto A* **es independiente de** *C* **sobre** *B, denotada $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}_B C$ si $tp(\bar{a}/BC)$ no divide sobre B para todo $\bar{a} \in A$ finito. Una teoría completa de primer orden es* **simple** *si la relación $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}$ es simétrica.*

Las definiciones presentadas a continuación son tomadas de [7] y de [11].

Definición 12.

1. *Una fórmula* $\delta(\bar{x}, \bar{a})$ **þ–divide fuertemente sobre** A *si* $tp(\bar{a}/A)$ *es no algebraico y* $\{\delta(x, \bar{a}')\}_{\bar{a}' \models tp(\bar{a}/A)}$ *es* k *inconsistente para algún* $k \in \mathbb{N}$*. Es decir, la conjunción* $\bigwedge_{1 \leq i \leq k} \delta(x, \bar{a}'_i)$ *es inconsistente, donde* $\bar{a}'_i \models tp(\bar{a}/A)$ *con* $1 \leq i \leq k$ *son diferentes.*

2. *Decimos que* $\delta(x, \bar{a})$*,* **þ–*divide sobre*** A *si podemos encontrar una tupla* $\bar{c}$ *tal que* $\delta(x, \bar{a})$ *divide fuertemente sobre* $A\bar{c}$*.*

3. *Una fórmula* **þ–*bifurca sobre*** A *si ésta implica una disyunción de fórmulas que* þ*–dividen sobre* A*.*

4. *El tipo* $p(x)$ **þ–*divide sobre*** A *si hay una fórmula en* $p(x)$ *que* þ*–divide sobre* A *y* $p(x)$ **þ–*bifurca*** *sobre* A *si hay una fórmula en* $p(x)$ *que* þ*–bifurca sobre* A*.*

5. *Decimos que* $\bar{a}$ *es* **þ–*independiente*** *de* $\bar{b}$ *sobre* A *si* $tp(\bar{a}/A\bar{b})$ *no* þ*–bifurca sobre* A*. Este hecho lo denotaremos* $\bar{a} \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\text{þ}}_{A} \bar{b}$*.*

6. *Una teoría es rosácea si* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\text{þ}}$ *es simétrica. En tal caso* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\text{þ}}$ *es una relación de independencia. Se prueba en [7, corolario 3.4] que una teoría es rosácea si y sólo si* $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\mid}^{\text{þ}}$ *tiene carácter local.*

Las siguiente definición permite presentar una caracterización de las teorías rosáceas.

Definición 13. *bf*þ*–rango es la mínima función que toma valores en* $On \cup \{\infty\}$ *que satisface lo siguiente:*

1. þ $-$ *rango* $(\phi(\bar{x}, \bar{b})) \geq 0$ *si* $\phi(\bar{x}, \bar{b})$ *es consistente;*

2. þ $-$ *rango* $(\phi(\bar{x}, \bar{b})) \geq \alpha + 1$ *si existe* $\psi(\bar{x}, \bar{c})$ *que* þ*–divide sobre* $\bar{b}$*, tal que* $\psi(\bar{x}, \bar{c}) \vdash \phi(\bar{x}, \bar{b})$ *y* þ*–rango* $(\psi(\bar{x}, \bar{c})) \geq \alpha$*.*

3. *Para* λ *un ordinal límite,*

$$i - rango\,(\phi(\bar{x}, \bar{b})) \geq \lambda\,,$$

si þ*–rango* $(\phi(\bar{x}, \bar{b})) \geq \alpha$ *para todo* $\alpha < \lambda$*.*

Para un tipo parcial π, definimos þ–rango $(\pi) = \text{mín}\{\text{þ} - \text{rango}(\phi) \mid \phi \in \pi\}$.

En [11] se establece que una teoría es rosácea si þ–rango de todo tipo p en el lenguaje de la teoría posee þ–rango ordinal.

A continuación definimos el rango de un tipo parcial $\pi(x)$ mediante relaciones de equivalencia definidas sobre una fórmula $\delta \in \Delta$.

Definición 14. *Sea $\pi(x)$ un tipo parcial, y sea Δ un conjunto finito de fórmulas. Definimos Eqdef–rango$_\Delta$, rango de una relación de equivalencia definida sobre una fórmula del tipo parcial Δ como sigue:*

1. *Eqdef–rango$_\Delta(\pi(x)) \geq 0$ si y sólo si $\pi(x)$ es consistente*;
2. *Eqdef–rango$_\Delta(\pi(x)) \geq \alpha + 1$ si y sólo si existen c y $\delta \in \Delta$ tal que $E(x, y) = \delta(x, y, c)$ es una relación de equivalencia, y existen $\{b_i : i < \omega\}$ representantes de diferentes clases de equivalencia, tales que Eqdef–rango$_\Delta(\pi(x) \wedge E(x, b_i)) \geq \alpha$;*
3. *Para λ un ordinal límite,Eqdef–rango$_\Delta(\pi(x)) \geq \lambda$ si y sólo si Eqdef–rango$_\Delta(\pi(x)) \geq \alpha$ para todo $\alpha \leq \lambda$.*
4. *Eqdef–rango$_\Delta(\pi(x)) \geq \infty$ si y sólo si Eqdef–rango$_\Delta(\pi(x)) \geq \alpha$ para todo α ordinal.*

Un criterio para decidir si una teoría es rosácea está dado por [7, teorema 5.3]:

Teorema 15. (Teorema de caracterización de teorías rosáceas). *Dada T una teoría, T no es rosácea si existe Δ y π tales que Eqdef–rango$_\Delta(\pi(x)) = \infty$.*

3. Las estructuras $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, 2^{\mathbb{Z}})$ y $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, \mathcal{S})$ no son rosáceas

Aplicamos en la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, 2^{\mathbb{Z}})$, el criterio anterior.

Teorema 16. *La teoría de la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, 2^{\mathbb{Z}})$ no es rosácea.*

Demostración. Consideremos en el teorema de caracterización de teorías rosáceas las siguientes condiciones: como tipo $\pi_{ab}(x) \equiv a \leq x < b$, $\Delta := \{\delta(x, y, z)\}$ donde $\delta(x, y, z) \equiv \forall t \in 2^{\mathbb{Z}}(t \leq x + z \Leftrightarrow t \leq y + z)$.

La relación definida por $\delta(x, y, z)$ la denotamos $E_0(x, y, z)$.

Lema. *Para cada $c \in \mathbb{R}$, la relación $E_0(x, y, c)$ es una relación de equivalencia.*

Demostración. Verificamos las siguientes propiedades:

- Reflexividad y Simetría: son claras por definición.
- Transitividad: corresponde ver que si se cumplen $E_0(x, y, c)$ y $E_0(y, w, c)$, entonces $E_0(x, w, c)$.

  Dado que tenemos $E_0(x, y, c) \equiv \forall t \in 2^{\mathbb{Z}}(t \leq x + c \Leftrightarrow t \leq y + c)$ y $E_0(y, w, c) \equiv \forall t \in 2^{\mathbb{Z}}(t \leq y + c \Leftrightarrow t \leq w + c)$, luego $\forall t \in 2^{\mathbb{Z}}(t \leq x + c \Leftrightarrow t \leq y + c \Leftrightarrow t \leq w + c)$. Por lo tanto $\forall t \in 2^{\mathbb{Z}}(t \leq x + c \Leftrightarrow t \leq w + c)$, es decir se cumple $E_0(x, w, c)$.

Empleando inducción transfinita veamos si *Eqdef–rango*$_\Delta(\pi_{ab}(x)) \geq \infty$.

1. *Es claro que Eqdef–rango*$_\Delta(\pi_{ab}(x)) \geq 0$.

2. *Supongamos que para todo $a < b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que*

$$Eqdef - -rango_\Delta(\pi_{ab}(x)) \geq \alpha\,.$$

Veamos que Eqdef–rango$_\Delta(\pi_{ab}(x)) \geq \alpha + 1$. *La idea es obtener a partir del intervalo $[a, b)$ infinitos subintervalos, cada uno correspondiente a una clase de equivalencia de la relación $E_0(x, y, c)$. Primero consideremos una traslación del intervalo $[a, b)$ hacia el origen obteniendo así $[0, b-a)$. Observemos que para un $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $k \geq N$ los intervalos $\left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right)$ están contenidos en el intervalo $[0, b - a)$. Cada uno de los intervalos $\left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right)$ corresponde a clases de equivalencia de la relación $E_0(x, y, 0)$. Nuestro objetivo es dividir el intervalo $[a, b)$, por lo tanto trasladamos las anteriores divisiones obteniendo así*

$$\left[\frac{1}{2^{k+1}} + a, \frac{1}{2^k} + a\right)\,,$$

y definimos $c_k = \frac{1}{2^{k+1}} + a$ y $d_k = \frac{1}{2^k} + a$. Notemos que los elementos del conjunto $\{c_k \mid k > N\}$ son representantes de distintas clases de equivalencia de la relación E_0, definimos:

$$\pi_{c_k d_k}(x) \equiv \pi_{ab}(x) \wedge E_0(x,\, c_k,\, a)\,.$$

Es claro que $d_k - c_k > 0$. *Por hipótesis de inducción tenemos que Eqdef–rango*$_\Delta(\pi_{c_k d_k}(x)) \geq \alpha$, *lo cual nos permite concluir que Eqdef–rango*$_\Delta(\pi_{ab}(x)) \geq \alpha + 1$.

3. *Sea* λ *un ordinal límite supongamos que Eqdef–rango*$_\Delta(\pi_{ab}(x)) \geq \alpha$, *para* $\alpha \leq \lambda$, *entonces por definición Eqdef–rango*$_\Delta(\pi_{ab}(x)) \geq \lambda$. *Por lo tanto queda demostrado el resultado.*

De manera análoga tenemos que la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, \mathcal{S})$, donde el predicado $\mathcal{S}$ es interpretado como $\{(e^t \cos(t), e^t \mathrm{sen}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ no es rosácea. Sólo basta considerar en el argumento anterior como tipo $\pi_{ab}(x) \equiv a \leq x < b$, $\Delta := \{\delta(x, y, z)\}$ donde

$$\delta(x, y, z) \equiv \forall t \in \mathbb{Z}(e^{t\pi} \cos(t\pi) \leq x + z \Leftrightarrow e^{t\pi} \cos(t\pi) \leq y + z)\,.$$

En general reemplazamos 2^k por $e^{2k\pi} \cos(2k\pi)$ en la demostración anterior.

Observemos que el argumento anterior puede ser aplicado a $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, A)$, donde A es un conjunto contable con un punto de acumulación. Es decir, la estructura $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1, <, A)$ no es rosácea.

Agradezco al profesor Alexander Berenstein por sus valiosas observaciones.

Referencias

[1] A. Berenstein, C. Ealy and A. Gánaydin. *Thorn independence in the field of real numbers with a small multiplicative group*, Ann. Pure Applied Logic. **150**, 1 (2007).

[2] C. C. Chang and H. J. Keisler, *Model Theory* (North–Holland, Amsterdam, 1990).

[3] Z. Chatzidakis and A. Pillay. *Generic structures and simple theories*, Ann. Pure Applied Logic **95**, 71 (1998).

[4] L. van den Dries, *Tame Topology and o–minimal Structures*, Lecture Notes Series **248** (London Mathematical Society, 1998).

[5] L. van den Dries. *The field of reals with a predicade for the powers of two*, Manuscripta Mathematica **54**, 187 (1985).

[6] A. Dolich, C. Miller and C. Steinhorn, *Structures having o–minimal open core*, submitted April 4, 2008.

[7] C. Ealy and A. Onshuus, *Characterizing Rosy Theories*, J. Symb. Logic **72**, (2007).

[8] D. Marker, *Model Theory: An introduction* (Springer–Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2002).

[9] C. Miller, *Tameness in Expansions of the Real Field*, Logic Colloquium'01 (Vienna), Lecture Notes in Logic **20** (Association of Symbolic Logic, 2005).

[10] C. Miller, *D–minimal expansions of the real field have the exchange property*, Notes (2003).

[11] A. Onshuus, *Properties and consequences of Thorn–Independence*, J. Symb. Logic. **71**, 1 (2006).

[12] A. Onshuus, *Thorn–Forking, algebraic independence and examples of Rosy theories*,

[13] Y. Peterzil and S. Starchenko, *A Trichotomy theorem for o–minimal structures*, Proc. London Math. Soc. **77**, 481 (1998).

[14] A. Pillay and C. Steinhorn, *Definable sets in ordered structures. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **259**, 565 (1986).

[15] F. O. Wagner, *Simple Theories, Mathematics and its Applications* (Kluwer, 2000).