Bol. Mat. **17**(1), 27–36 (2010)

Una mirada histórica a la derivación de sucesiones

Fabio Andrés Vallejo[1]

Departamento de Matemáticas
Universidad Nacional de Colombia

Andrés Chaves Beltrán[2]

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño

Se considera un problema abierto acerca de la extensión de una propiedad surgida en el marco de las clases de Baire. Se considera la adecuación de la convergencia uniforme de sucesiones como herramienta para pasar de funciones diferenciables a funciones diferenciables a tramos con puntos de no diferenciabilidad, y luego a funciones no diferenciables en ninguna parte. Entonces, se estudia la diferenciabilidad de las funciones límites de las sucesiones uniformemente convergentes de funciones diferenciables.

Palabras claves: funciones puntualmente no diferenciables, convergencia uniforme, sucesión de derivadas.

We consider the open problem concerning the extension of aproperty appearing in the context of Baire classes. We consider the adaptation of uniform convergence of sequaences as a tool to go from differential functions to piecewise differential functions with points of non differentiability and then nowhere differentiable functions. Then, we consider the differentiability of the limit functions for uniformly convergent sequencies of differentiable functions.

Keywords: pointwise non differentiable functions, uniform convergence, derivative sequences.

MSC: 26A21, 01A55, 40A30

[1] `favallejon@unal.edu.co`
[2] `ancbel@yahoo.es`

1 Introducción histórica

Este artículo surge en el marco del trabajo de grado [11], del cual emergen algunas preguntas abiertas, entre ellas se aborda una que plantea la posibilidad de generar una clasificación de funciones análoga a la propuesta por René Baire en [3] en la que la jerarquización no esté basada en el grado de discontinuidad sino en el grado de diferenciabilidad. El tratar de plantear la analogía conlleva a preguntas que se intentan responder y que por ahora han llevado a estudiar la sucesión de derivadas de una sucesión uniformemente convergente de funciones diferenciables.

En 1821 el matemático francés Louis Augustin Cauchy plantea y "demuestra" en [4] un resultado que se ha conocido como el primer teorema falso de Cauchy:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge a* f *y si cada* f_n *es continua entonces* f *es continua.*

Sin embargo se conocen series de funciones que contradicen este enunciado, tales como las series de Fourier del tipo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n},$$

que converge a la función $f(x) = \frac{1}{2}x$, para $x \in (-\pi, \pi)$ y $f(\pi) = 0$. Ampliando el dominio, la función es periódica, de periodo 2π y discontinua en los puntos $(2n-1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Esta función se representa gráficamente en la figura 1.

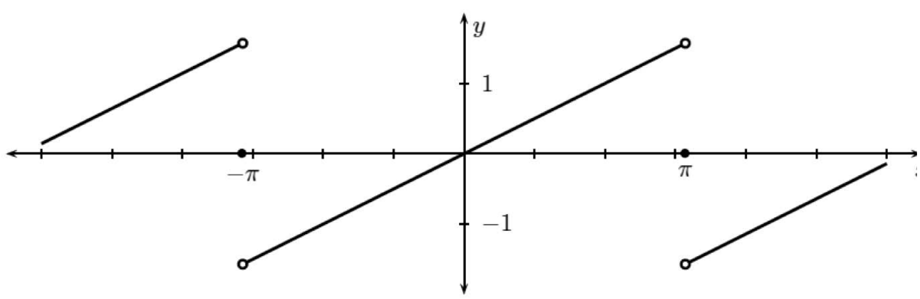

Figura 1.

El resultado anterior condujo a la comunidad matemática de mediados de siglo XIX a indagar sobre el defecto de la demostración de Cauchy. No fue si no hasta 1847 que Seidel presentó una respuesta satisfactoria en torno a este problema. De su respuesta se sigue que la convergencia de la serie no era suficiente, sino que se necesitaba fortalecer esta condición hacia la denominada *convergencia uniforme*, que en esencia plantea que el valor de N no puede depender de la variable x, como ocurre en el caso de la convergencia puntual.

El análisis del siglo XIX en Francia se dedicaba casi que exclusivamente al estudio de las funciones continuas, o a lo más con discontinuidades aisladas. Así en el auge de la continuidad y de la representación de funciones a través de series trigonométricas, la convergencia uniforme se convirtió en una potente herramienta para asegurar la continuidad de las funciones límite (o funciones que se dejaban expresar como serie trigonométricas). En este sentido, René Baire, matemático francés que tuvo su producción a finales del siglo XIX e inicios del Siglo XX, fue contrario a la tendencia continuista de los franceses y se interesó en el estudio de las funciones con alto grado de discontinuidad, en esencia, Baire investigó las condiciones bajo las cuales se generan funciones con grado de discontinuidad cada vez mas alto a través de la convergencia puntual de sucesiones de funciones. Es así, que en 1899 en su tesis doctoral plantea la siguiente clasificación de funciones de variable real:

$$\begin{aligned}
C_0 &= \{f \in F / f \text{ es continua}\}, \\
C_1 &= \{f \in F / f \notin C_0 \text{ y existe } \{f_n\} \subset C_0 \text{ tal que } f_n \to f\}, \\
C_2 &= \{f \in F / f \notin C_0 \cup C_1 \text{ y existe } \{f_n\} \subset C_0 \cup C_1 \text{ tal que } f_n \to f\}, \\
&\vdots \\
C_n &= \left\{ f \in F / f \notin \bigcup_{k=0}^{n-1} C_k \text{ y existe } \{f_n\} \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} C_k \text{ tal que } f_n \to f \right\}, \\
&\vdots \\
C_\omega &= \left\{ f \in F / f \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \text{ y existe } \{f_n\} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \text{ tal que } f_n \to f \right\},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_{\omega+1} \;&=\; \Bigg\{ f \in F / f \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \cup C_\omega \text{ y existe } \{f_n\} \subset \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \cup C_\omega \\
&\qquad \text{tal que } f_n \to f \Bigg\}, \\
&\vdots \quad .
\end{aligned}
$$

De la misma forma se definen $C_{\omega+2}, C_{\omega+3}, \cdots, C_{2\omega}, \cdots$.[3]

Baire caracterizó las funciones de C_1 a través de un teorema que necesita una definición previa:

Definicion 1. Una función de variable real se dice *puntualmente discontinua* si en cada subintervalo $(a,b) \subseteq Dom f$ existe $c \in (a,b)$ tal que f es continua en c.

Teorema 1. *$f \in C_1$ si y sólo si no es continua y es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto.*[4]

Es importante resaltar que a partir de la clase C_1, todas están constituidas por funciones discontinuas, con la característica de que el grado de discontinuidad es mayor a medida que se aumenta de clase. Nótese además que la convergencia puntual es la que permite pasar de una clase a la siguiente.

Lo anterior sugiere la posibilidad de generar una clasificación de funciones dependiendo del grado de diferenciabilidad, también se plantearía la pregunta de verificar si la convergencia puntual [5](a diferencia de la uniforme) es la que permitiera obtener funciones cada vez menos diferenciables.

Para abordar lo anterior, debe tenerse en cuenta que el primer nivel de una jerarquía de funciones caracterizadas por su grado de diferenciabilidad y análogo a las Clases de Baire, debe estar conformado por las funciones diferenciables y el segundo nivel, por funciones no diferenciables que se pueden expresar como el límite de una sucesión de funciones

[3] ω representa el primer ordinal trasfinito de la teoría de conjuntos.

[4] Los detalles de esta demostración pueden verse en [11], Capítulo 3.

[5] La convergencia puntual no siempre es uniforme, así en este artículo, siempre que se hable de convergencia puntual de sucesiones o series, se debe excluir la posibilidad de la convergencia uniforme, a no ser que se indique lo contrario.

diferenciables, sin embargo, en ese segundo nivel cabrían funciones discontinuas, teniendo que la diferenciabilidad se restringiría al caso de los puntos de continuidad. En ese sentido, este estudio se acotará al universo de funciones continuas, y para ello se asumirá la convergencia uniforme de las sucesiones.

2 Sucesión de derivadas y convergencia

Considérese la clase de la funciones diferenciables D_0, es factible pensar, siguiendo una analogía con las clases de Baire, que una sucesión de funciones[6] de D_0 $\{f_n\}$ que converge uniformemente, lo hará hacia una función diferenciable. Al respecto, en [1][p. 278] se enuncia el siguiente teorema en el cual se presentan condiciones suficientes para que esto ocurra

Teorema 2. *Supongamos que cada término de* $\{f_n\}$ *es una función real con derivada finita en cada punto de un intervalo abierto* (a, b)*. Supongamos que para un punto* x_0*, por lo menos, de* (a, b) *la sucesión* $\{f_n(x_0)\}$ *converge. Supongamos además que existe una función* g *tal que* $f'_n \to g$ *uniformemente en* (a, b)*. Entonces:*

1. *Existe una función* f *tal que* $f_n \to f$ *uniformemente en* (a, b)*.*
2. *Para cada* x *de* (a, b) *la derivada* $f'(x)$ *existe y es igual a* $g(x)$*.*

Considerando nuevamente una sucesión de funciones diferenciables f_n que converge uniformemente a f, entonces existe un punto x_0 para el cual la sucesión $f_n(x_0)$ converge. De acuerdo a esto y al teorema anterior se puede plantear la siguiente proposición:

Proposición 1. *Sea* f_n *una sucesión de funciones diferenciables que converge uniformemente a* f *en el intervalo* (a, b)*, si* f'_n *converge uniformemente entonces* f *es diferenciable en* (a, b)*.*

Sin embargo no siempre una sucesión de funciones de D_0 converge a otra función de D_0, la siguiente es una una serie de funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}$ que converge a una función cuyo conjunto de puntos de no diferenciabilidad es $\{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$. Esta función se representa gráficamente en la figura 2.

[6] En adelante se trabajará indistintamente entre sucesiones y series. Estas ltimas, de hecho se pueden ver como sucesiones de sumas parciales.

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(n\pi) - 2}{\pi n^2} \cos(n\,x)\,. \tag{2.1}$$

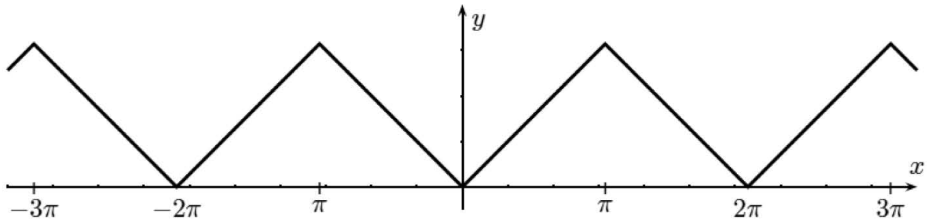

Figura 2.

Si se define D_1 como la clase de las funciones no diferenciables que son límite de sucesiones o series uniformemente convergentes de funciones diferenciables, entonces el ejemplo presentado guarda analogía con la generación de las funciones de C_1, en este sentido se podría pensar en extender el Teorema 1 al caso de la no diferenciabilidad tomando como base la noción de función puntualmente discontinua para definir *función puntualmente no diferenciable.*

Definición 2. Una función de variable real se dice *puntualmente no diferenciable* si en cada subintervalo $(a, b) \subseteq Dom f$ existe $c \in (a, b)$ tal que f es diferenciable en c.

Sin embargo existen funciones que contrastan la analogía correspondiente a la extensión de T_1, por ejemplo:[7]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \operatorname{sen}((k+1)!\,\pi\,x)\,. \tag{2.2}$$

Esta es una serie de funciones diferenciables en todo $\mathbb{R}$ que converge a una función diferenciable en ningn punto, por lo cual no posee la propiedad de ser puntualmente no diferenciable. Por lo tanto el ser puntualmente no diferenciable no es condición necesaria para ser representable a través de sucesiones de D_0.

[7] Esta serie es extraída de [12], que corresponde a una función trabajada por Gastón Darboux en 1875 en su obra [6].

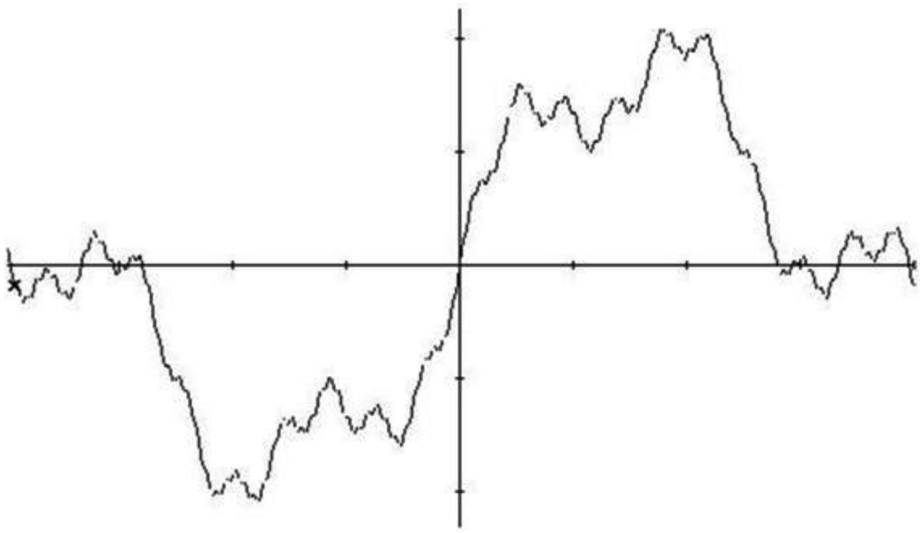

Figura 3.

En general a la clase D_1 anteriormente definida pertenecerían tanto funciones puntualmente diferenciables como totalmente no diferenciables, pero resulta perturbador que dos tipos de funciones tan diferentes estén contenidas en una misma clase, será necesario entonces buscar alguna condición que permita distinguir entre las sucesiones uniformemente convergentes de funciones diferenciables que convergen a funciones no derivables y puntualmente no diferenciables (tipo (2.1)) y las las sucesiones uniformemente convergentes de funciones diferenciables que convergen a funciones diferenciables en ninguna parte (tipo (2.2)).

A partir de la proposición 1 se puede intuir que la condición podría buscarse en la sucesión de derivadas correspondiente a la sucesión de funciones dada, puesto que como se mostró al inicio de la sección, la convergencia uniforme de la sucesión de derivadas asegura la diferenciabilidad de la función límite.

De acuerdo a esto véase que la series de derivadas de (2.1) y (2.2) son

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cos(\pi n) - 2}{\pi n} \operatorname{sen}(n\,x)\,, \tag{2.3}$$

y

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\,\pi\,\cos((k+1)!\,\pi\,x)\,, \tag{2.4}$$

respectivamente.

Nótese que (2.3) converge puntualmente, mientras que la serie original (2.1) converge a una función puntualmente no diferenciable. De forma análoga, (2.4) diverge, mientras que la serie original (2.2) converge a una función diferenciable en ninguna parte.

Los dos ejemplos anteriores sugieren la siguiente conjetura:

Conjetura 1. *Sea f_n una sucesión de funciones diferenciables que converge uniformemente,*

1. *si f_n' converge puntualmente entonces* $\lim f_n$ *es una función no derivable pero puntualmente no diferenciable.*
2. *si f_n' diverge entonces* $\lim f_n$ *es una función diferenciable en ninguna parte.*

No obstante la sucesión $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$ converge uniformemente a la función nula que es diferenciable, pese a que la sucesión de derivadas $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx)$ diverge. En consecuencia la parte 2 de la conjetura anterior es falsa.

De otro lado, considérese la sucesión

$$f_n(x) = \frac{\arctan(\sqrt{n}x)}{\sqrt{n}} \tag{2.5}$$

la cual converge uniformemente, mientras que la sucesión de sus derivadas $f_n'(x) = \dfrac{1}{nx^2+1}$ converge puntualmente a la función:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

cuyo punto de discontinuidad es $x = 0$, en consecuencia, de acuerdo a la parte 1 de la conjetura, se esperaría que $\lim \dfrac{\arctan(\sqrt{n}x)}{\sqrt{n}}$ no sea diferenciable en este punto, no obstante $\dfrac{\arctan(\sqrt{n}x)}{\sqrt{n}}$ converge a la función nula que es diferenciable en todo punto por lo que la parte 1 de la conjetura también es falsa.

Respecto a este ltimo ejemplo, nótese que la función nula conserva la propiedad de ser puntualmente no diferenciable, esto sugiere que si en la parte 1 de la conjetura sólo se exige que $\lim f_n$ sea puntualmente no diferenciable omitiendo la condición de la no derivabilidad de $\lim f_n$ entonces la conjetura podría ser cierta.

Lo anterior conduce a conjeturar lo siguiente:

Conjetura 2. *Sea f_n una sucesión de funciones diferenciables que converge uniformemente, si f'_n converge puntualmente entonces* $\lim f_n$ *es una función puntualmente no diferenciable.*

3 Comentarios

1. La conjetura con la que se ha finalizado no sólo está basada en los ejemplos (2.1) y (2.5), sino en la presentación que se ha hecho del artículo. De hecho, la proposición 1 se acoge bajo esta conjetura puesto que la convergencia uniforme implica la puntual (como se señaló en el pie de página 2) y el hecho de que una función sea diferenciable conlleva a que esta sea puntualmente no diferenciable (pero no al contrario).

2. Este artículo ha sido motivado en un problema surgido en el marco del desarrollo del trabajo de grado [11], en el que se plantea reconocer los puntos de diferenciabilidad de una función que se representa por una serie uniformemente convergente de funciones diferenciables. al respecto varios textos de análisis determinan relaciones entre las convergencias y la continuidad y entre las convergencias y la integrabilidad. No obstante la documentación en torno a la relación entre diferenciabilidad y las convergencias se ha reducido al teorema 9.13 de [1]. Mientras que en textos como [10], se presentan varios ejemplo que permiten abordar esta inquietud, pero no hay generalizaciones al respecto.

3. La convergencia uniforme es condición suficiente para que el límite de una sucesión de funciones continuas sea una función continua, sin embargo no es una condición necesaria, para ello se puede ver el ejemplo 2 de la sección 9.2 de [1]. En ese sentido se puede pensar en debilitar la hipótesis de la conjetura 2 y no exigir la convergencia uniforme de la sucesión f_n, la cual podría ser reemplazada por la condición de que $\lim f_n$ sea continua.

References

[1] T. Apostol, *Análisis Matemático* (Reverté, Barcelona, 1977).

[2] L. Arboleda y L. Recalde, *El concepto de semicontinuidad de Baire*, Matemáticas. Enseñanza Universitaria **13**, 63 (2005).

[3] R. Baire, *Sur les Fonctions de variables reélles*, Ann. Mat. Pura Appl. **3**, 1 (1899). *Œuvres Scientifiques* (Gauthier–Villars, Paris, 1990), pp. 49–173.

[4] A. L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'école Royale Polytechnique* (Imprimérie Royale, Paris, 1821). Traducción al español *Curso de Análisis* (Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1994).

[5] A. Chaves, *Las Clases de Baire en el surgimiento de los conjuntos analíticos.* Tesis de Maestría (Universidad del Valle, 2006).

[6] G. Darboux, *Mémorie sur les fonctions discontinues*, Annales Sci. Ècole Normale Sup. **4**(2), 57 (1875).

[7] T. Jech, *Set theory* (Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2003).

[8] N. Lusin, *Les ensembles analytiques et leurs applications* (Paris, 1930; Chelsea, New York, 1972).

[9] L. Recalde, *La teoría de funciones de Baire: La constitución de los discontinuo como objeto matemático* (Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle, Cali, 2004).

[10] Y. Takeuchi, *Sucesiones y series* (Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 1971).

[11] F. Vallejo, *Clases de Baire y el concepto de semicontinuidad*, Tesis de pregrado (Universidad de Nariño, 2008).

[12] E. Zambrano, *El aporte de Darboux a la teoría de funciones*, Tesis de pregrado (Universidad del Valle, 2005).