

EL CONOCIMIENTO DEL HORIZONTE MATEMÁTICO: MÁS ALLÁ DE CONECTAR EL PRESENTE CON EL PASADO Y EL FUTURO

HORIZON CONTENT KNOWLEDGE: BEYOND CONNECTING PRESENT WITH PAST AND FUTURE

Martínez, M.¹, Giné, C.², Fernández, S.², Figueiras, L.², Deulofeu, J.²

¹Secretaría de Educación del Estado de Nuevo León

²Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen. *Este trabajo se inscribe en el contexto de un estudio longitudinal dirigido a investigar factores relacionados con el conocimiento del profesor que intervienen en la adquisición de la competencia matemática desde la educación primaria a la secundaria. Partimos de la conceptualización del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) y concretamente el Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK), cuya caracterización en términos de conexiones es una de las aportaciones teóricas de nuestro trabajo. Las Trayectorias Hipotéticas en el Horizonte Matemático que hemos construido a partir del análisis de la práctica del aula han resultado ser una herramienta metodológica adecuada para conceptualizar teóricamente el Conocimiento del Horizonte Matemático.*

Palabras claves: Transición primaria secundaria, horizonte matemático, MKT, conexiones matemáticas.

Abstract. *This work is embedded in the context of a longitudinal study focused on investigating the factors related to teacher's professional knowledge that have an effect on the progressive acquisition of mathematical competence from Primary to Secondary school. Our starting point is the conceptualization of Mathematical Knowledge for Teaching ((MKT) and, more specifically the Horizon Content Knowledge (HCK), whose characterization in terms of connections becomes one of the theoretical contributions of this work. Non-participant observations - carried out during two have lead to the development of Hypothetical Trajectories in the Mathematical Horizon, which have become a useful methodological tool to conceptualise the Horizon Content Knowledge.*

Keywords: Primary-Secondary transition; Mathematical Horizon; MKT; Mathematical connections.

INTRODUCCIÓN

La transición entre etapas educativas ha sido una problemática que la investigación educativa ha estudiado desde perspectivas muy diversas, atendiendo a la influencia de

factores tanto internos como externos a la escuela (Kajander and Lovric, 2005; Coad and Jones, 1999; Ferguson and Fraser, 1998). Algunos resultados concluyen que los factores relacionados con la práctica docente y el aprendizaje tienen una gran influencia en el rendimiento del estudiante a largo plazo. Interesados en el estudio de esta problemática, hemos trabajado durante dos años en un proyecto de investigación cuya finalidad es diagnosticar y analizar aquellos factores que, desde la instrucción, facilitan una mejora de la continuidad en la competencia matemática de los estudiantes desde la educación primaria a la secundaria. Consideramos que este tipo de investigaciones puede contribuir a minimizar efectos derivados de procesos de transición tales como el fracaso académico o el abandono del interés por el conocimiento matemático.

El problema de investigación al que nos referimos en este trabajo tiene que ver con la búsqueda de una definición del conocimiento profesional del profesor que permita abordar la problemática de la transición. En último término nuestro objetivo es informar sobre qué conocimiento profesional es importante para atender el crecimiento intelectual de los estudiantes, matemáticamente hablando, desde la educación primaria a la secundaria.

Hemos tomado como marco de referencia conceptual de partida el modelo del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, por sus siglas en inglés) desarrollado por Ball et al. (2008, 2005), y utilizado en algunos trabajos sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas (Sosa y Carrillo, 2010; Ribeiro, Carrillo y Monteiro, 2008). Uno de los subdominios de dicho modelo, el Conocimiento del Horizonte Matemático, nos parece particularmente vinculado a nuestro problema de investigación. Esta es la razón por la cual hemos profundizado en el estudio de esta componente tratando de identificar manifestaciones de la presencia o ausencia de este conocimiento a través de la observación y análisis de la práctica de profesores de primaria y secundaria.

En concreto, en esta comunicación tomamos en consideración las conexiones matemáticas como un elemento para la caracterización del Conocimiento del Horizonte Matemático. Partiendo del análisis de Episodios de clase, desarrollamos trayectorias hipotéticas en el horizonte matemático (THH) con el fin de identificar aquellas conexiones que nos muestran la presencia del Conocimiento del Horizonte Matemático en la práctica del profesor.

CONOCIMIENTO DEL HORIZONTE MATEMÁTICO

Para Ball, Thames y Phelps (2008), el Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK) es un subdominio del Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) que se refiere a la conciencia del profesor sobre los conocimientos matemáticos previos y futuros presentes en el currículum de matemáticas. Fernández y Figueiras (2011, 2010) sugieren que el HCK requiere una visión global de la educación matemática de los estudiantes, de manera que pueda ser utilizada por el profesor al enseñar matemáticas en el aula. Por esta razón lo consideran como un conocimiento matemático mucho más amplio, que da forma al MKT desde un punto de vista de continuidad de la educación matemática.

De las investigaciones llevadas a cabo por nuestro equipo se ha concluido una caracterización del Conocimiento del Horizonte Matemático en términos de conexiones matemáticas que parecen fundamentales desde el punto de vista de la construcción del

El Conocimiento del Horizonte Matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro

significado de los contenidos matemáticos escolares en términos de continuidad. El análisis de los datos que ilustramos en detalle más adelante ha concluido en la definición de tres categorías de conexiones en el Conocimiento del Horizonte Matemático y que constituyen la principal aportación teórica de este trabajo. Estas conexiones son de diferente naturaleza e implican enlaces hacia el interior de un mismo concepto (intraconceptuales), entre ideas o conceptos matemáticos diferentes (interconceptuales) y entre conocimientos previos y futuros (temporales):

Conexiones intraconceptuales. Tienen lugar en la proximidad de un único concepto: equivalencia entre caracterizaciones de un concepto; prueba de la equivalencia entre dos definiciones; distinción entre una condición suficiente de una necesaria, o la expresión de un concepto en un caso particular.

Conexiones interconceptuales. Los conectores son ideas matemáticas que permiten vincular diferentes representaciones del mismo concepto o diferentes conceptos que los estudiantes afrontan en el mismo momento.

Conexiones temporales. Se dan entre conocimientos previos y futuros. Derivan del conocimiento del profesor sobre los conocimientos previos y futuros de los estudiantes. Estas conexiones posibilitan estudiar otras propiedades de un concepto o procedimiento, o aplicar el conocimiento aprendido a situaciones nuevas y/o más complejas.

Más allá de contribuir teóricamente a la conceptualización del Conocimiento del Horizonte Matemático, nos interesa profundizar en los mecanismos que bloquean o potencian dichas conexiones y, para lograr este fin, identificar y analizar cómo se manifiestan en la práctica del aula.

EPISODIOS CLAVE Y TRAYECTORIAS HIPOTÉTICAS EN EL HORIZONTE MATEMÁTICO

Durante los dos últimos años escolares se han realizado observaciones no participativas y grabaciones en vídeo de las clases de matemáticas en aulas de sexto de primaria y primero de secundaria en centros educativos públicos de la ciudad de Barcelona. El primer paso en la selección de los datos ha sido la identificación de fragmentos extraídos de la práctica del profesor en el aula que nos aportan información sobre el Horizonte Matemático. A estos fragmentos los hemos denominado *Episodios Clave en el Horizonte Matemático* (ECH). Estos episodios son reproducciones de fragmentos breves de la práctica reconstruidos por el investigador a partir de su diario de observaciones o la visualización de las grabaciones, en las cuales el propio investigador identifica cierto potencial para profundizar en el conocimiento del profesor del Horizonte Matemático. Generalmente, los episodios presentan una situación problemática en la cual aparecen intervenciones tanto del profesor como de sus estudiantes. Si bien nuestra preocupación inicial era identificar episodios en los que se pusieran de manifiesto conexiones matemáticas, nos encontramos en general con la situación contraria: episodios marcados en su mayoría por el bloqueo o débil presencia de dichas conexiones. En consecuencia, la mayoría de los ECH identificados narran situaciones en las que la intervención de alguno de los estudiantes genera una respuesta poco adecuada o insuficiente por parte del profesor en términos de la continuidad del aprendizaje. Este hecho nos exigió generar herramientas metodológicas que permitan hacer visible la ausencia o bloqueo de tales conexiones.

A partir de la identificación y descripción de los episodios clave construimos lo que hemos denominado *Trayectorias Hipotéticas en el Horizonte Matemático (THH)*: Una THH es una representación de alguna de las diferentes formas en las que podría haberse conducido el episodio modificando puntualmente una intervención del profesor.

Las THH tratan de explorar diferentes rutas de actuación del profesor y son una herramienta útil para caracterizar y afinar conceptualmente el Conocimiento del Horizonte Matemático del profesor en términos de conexiones matemáticas, ya que nos permiten: a) visualizar dónde se ha producido un bloqueo para la conexión y preparar los datos para investigar posibles fuentes; b) comprender los mecanismos que permiten al profesor desplegar en la práctica tales conexiones; c) describir el contenido matemático que se construye en la clase mediante las conexiones matemáticas que pudieran establecerse.

Es importante señalar que estas trayectorias hipotéticas no tienen como objetivo convertirse en propuestas de un modelo de intervención o de actuación del profesor, sino plantear diferentes alternativas para profundizar en la conceptualización del conocimiento del profesorado del Horizonte Matemático.

CONSTRUCCIÓN DE TRAYECTORIAS HIPOTÉTICAS A PARTIR DE EPISODIOS CLAVE

En cada uno de los ECH se señalaron puntos críticos en los que se hacía evidente el bloqueo (no manifestación) de alguna conexión matemática. A partir de estos puntos se continuó narrando la práctica del aula de manera hipotética, pero potenciando dichas conexiones (THH). Ilustramos cómo se llevó a cabo este proceso a partir del episodio real que se narra en la Figura 1. Para este episodio, la THH correspondiente se muestra en la Figura 2. El episodio está tomado de las observaciones de una clase de matemáticas de primero de secundaria. El instituto divide a los estudiantes en dos grupos según el nivel y el grupo observado es el que se considera de nivel alto. La mayoría de los estudiantes proceden de un mismo centro educativo de primaria. El profesor tiene formación universitaria en matemáticas y una experiencia de más de treinta años como profesor de bachillerato.

El profesor corrige ejercicios rutinarios de cálculo de perímetros y áreas. En este caso, de un rectángulo de lados 22 y 28 cm. En la pizarra, dibuja el rectángulo y dicta en voz alta mientras escribe:

$$\text{Perímetro} = 2 \cdot 22 + 2 \cdot 28 = 100$$

A continuación, se establece el siguiente diálogo:

Anna: *¿Por qué cien?*

Profesor: *Haz esta operación de aquí y verás cómo te sale a 100.*

Marc: *¡Ah! Es como si el 28 le da 3 al 22 y tienes cuatro lados de 25, o sea 100.*

Profesor: *Vale. Ahora el área.*

Marc: *Pues 25 por 25.*

Profesor: *¡No! El área es 22 por 28. [Resuelve la operación en la pizarra]. 616 centímetros cuadrados.*

A continuación se pasa a la corrección del siguiente ejercicio.

Figura 1. Narración del episodio “Perímetros y áreas”

El Conocimiento del Horizonte Matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro

En el episodio de la Figura 1 se detectaron tres momentos críticos. El primero de ellos se inicia con la pregunta que formula una de las estudiantes: “¿Por qué 100?” y el profesor le contesta “Haz esta operación y verás por qué te sale a 100”. El segundo momento crítico lo encontramos cuando otro de los estudiantes interviene reformulando el procedimiento de cálculo del perímetro del rectángulo “¡Ah! Es como si el 28 le da 3 al 22 y tienes cuatro lados de 25, o sea 100.” El tercer momento se inicia con la respuesta errónea del estudiante atribuyendo a un rectángulo no cuadrado de perímetro 100 el área del cuadrado de lado 25. A partir de estos puntos críticos se construyeron las THH que se muestran en la Figura 2, resaltando vías plausibles de intervención del profesor. El análisis de estas trayectorias nos ofrece la oportunidad de analizar la actuación del profesorado en relación a la gestión de las aportaciones o preguntas de los estudiantes, sus errores y, particularmente, las conexiones matemáticas que se realizan en el aula.

Las figuras elípticas de la Figura 2 identifican los momentos en los que encontramos evidencia de conexión matemática; los recuadros de texto con fondo gris describen esta conexión en términos de la acción profesional del profesor y que representarían acciones efectivas desde una perspectiva de continuidad. En los otros cuadros de texto con fondo blanco se recogen el resto de las intervenciones del profesor y los estudiantes, tanto reales como hipotéticas.

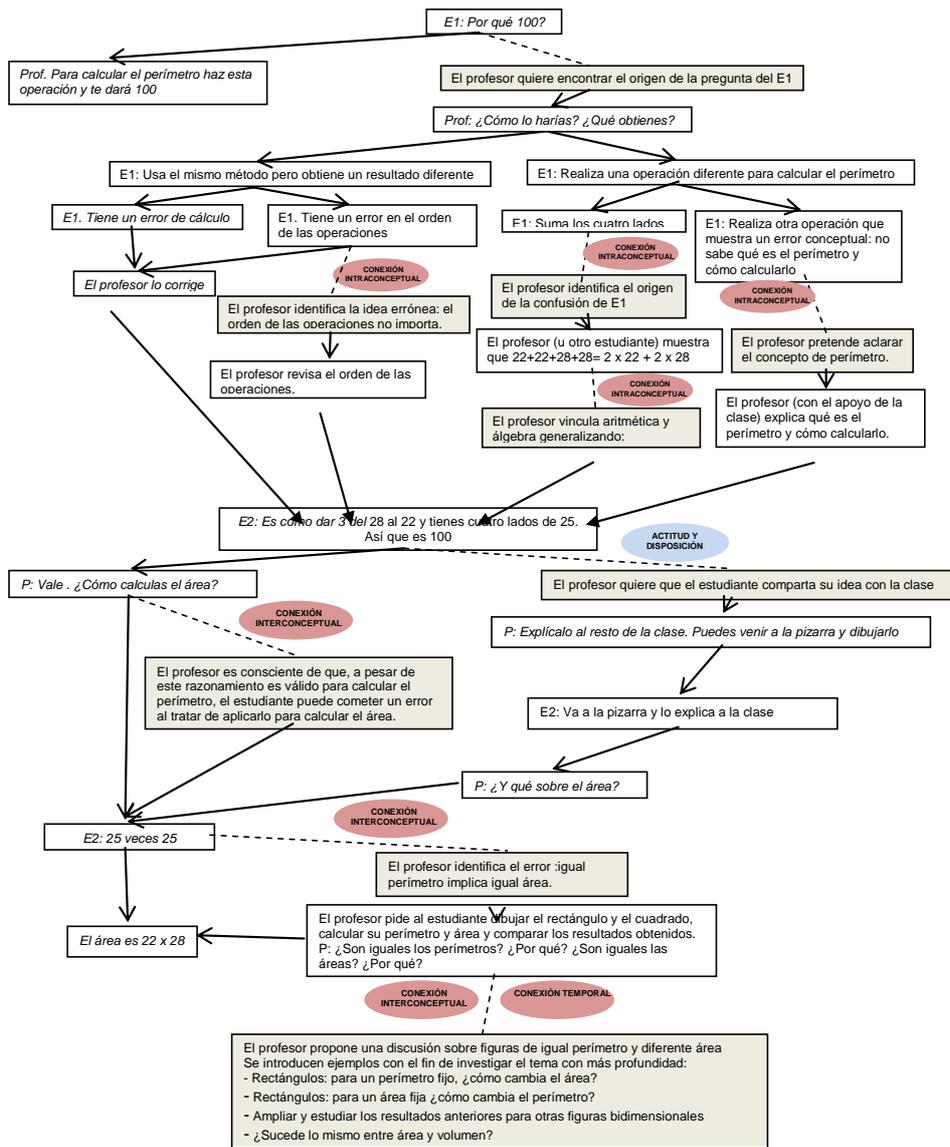


Figura 2. Trayectoria Hipotética en el Horizonte Matemático

En este ejemplo de THH podemos identificar las siguientes manifestaciones del Conocimiento del Horizonte Matemático, que organizamos de acuerdo a los diferentes tipos de conexiones matemáticas que hemos definido previamente:

El Conocimiento del Horizonte Matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro

1. Conexiones intraconceptuales

1.1 Identificar una idea errónea: el orden de las operaciones no importa cuando se realizan operaciones combinadas.

1.2 Mostrar la relación de igualdad entre dos expresiones aritméticas: $(22+22+28+28=2 \times 22+2 \times 28)$.

1.3 Generalizar mediante la vinculación de aritmética y álgebra: $a+a+b+b=2a+2b$.

1.4 Relacionar una intervención [la de Anna] que cuestiona una operación aritmética con un error conceptual sobre el perímetro.

2. Conexiones interconceptuales

2.1 Hacer explícito para el estudiante que un razonamiento es válido para calcular el perímetro de la figura $(22+22+28+28 = 25 + 25 +25+25)$ pero no para calcular el área de la misma.

2.2 Identificar una idea errónea: figuras del mismo perímetro tienen la misma área.

2.3 Relacionar las medidas del perímetro y el área de figuras en casos particulares, como por ejemplo triángulos de la misma base y altura y diferente perímetro.

3. Conexiones entre conocimientos previos y futuros:

3.1 Ampliar y estudiar los resultados anteriores en figuras semejantes.

3.2 Extender el estudio a las relaciones entre área y volumen.

Del análisis realizado se desprende que parece existir una relación directa entre las intervenciones de los estudiantes y la manifestación de las conexiones matemáticas en la clase. Dicho de otra manera, son las intervenciones de los estudiantes lo que el profesor debe recoger y analizar con el fin de desarrollar su capacidad para establecer conexiones matemáticas, y, consecuentemente, poner en evidencia su Conocimiento del Horizonte Matemático. La forma en que interviene el profesor ante las intervenciones de los estudiantes está en el origen del bloqueo de oportunidades para la conexión.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

La construcción y análisis de THH a partir de episodios ha resultado ser una herramienta metodológicamente útil para identificar conexiones alrededor de los contenidos matemáticos de la práctica escolar. El análisis conjunto de las conexiones matemáticas que se revelan importantes y las intervenciones de los profesores, aportan información acerca del conocimiento profesional que el profesorado pone en evidencia, fomentando o bloqueando dichas conexiones. En ningún caso estamos diciendo que en situaciones en las que no se manifiesta una determinada conexión sea porque el profesor, que es nuestro sujeto de análisis, carezca de dicho conocimiento (por ejemplo, el que figuras del mismo perímetro tienen distinta área, o que los estudiantes concluyen habitualmente que figuras del mismo perímetro tiene igual área). La investigación en educación matemática ha evidenciado cómo las creencias que los profesores tienen

sobre la naturaleza de las matemáticas, el aprendizaje y enseñanza o las restricciones que impone el contexto de desarrollo curricular al profesor, son determinantes en su práctica. Nuestro interés no es obviar la relevancia de estos aspectos para la práctica profesional, sino caracterizar un conocimiento profesional que, si no existe, bloquea situaciones potencialmente ricas para conectar el contenido matemático que se construye en el aula. Este conocimiento profesional es al que nos venimos refiriendo como Conocimiento del Horizonte Matemático. Entendemos que este conocimiento permitiría al profesor establecer conexiones matemáticas antes y durante la clase, abriéndole un abanico de posibilidades de gestión del aula que potencie las conexiones dentro de los contenidos matemáticos escolares desde una perspectiva de continuidad.

Agradecimientos

Este trabajo de investigación se ha llevado a cabo en el contexto del proyecto: EDU2009-07298 “Factores de influencia en la discontinuidad del aprendizaje matemático entre primaria y secundaria”

Referencias

- Ball, D.L.; Hill, H.C.; Rowan, B. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42 (2), 371-406.
- Ball, D.L.; Thames, M.H.; Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.
- Coad, J.; Jones, K. (1999). *Curriculum continuity in mathematics: a case study of the transition from primary to secondary school*. University of Southampton, Southampton: Center for Research in Mathematics Education.
- Ferguson, P.D.; Fraser, B.J. (1998). Student gender, school size and changing perceptions of science learning environment during transition from primary to secondary school. *Research in Science Education*, 28(4), 387-397.
- Fernández, S.; Figueiras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M.M. Moreno, A Estrada, J. Carrillo & T. A Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 291-301). Lleida: SEIEM.
- Fernández, S.; Figueiras, L. (2011). Re defining HCK to approach transition. Comunicación presentada en el *Séptimo Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática (CERME-7)* Rzeszów, Poland.
- Kajander, A.; Lovric, M. (2005). Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 36 (2-3), 149-160.
- Ribeiro, C.M.; Carrillo, J.; Monteiro, R. (2008). Uma perspectiva cognitiva para a análise de uma aula de matemática no 1º ciclo: um exemplo de apresentação de conteúdo tendo como recurso o desenho no quadro. En L. Blanco et al. *XII Simposio de la Sociedad española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 545-555). Badajoz: SEIEM.

El Conocimiento del Horizonte Matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro

Sosa, L.; Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A Estrada, J. Carrillo & T. A Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 569-580). Lleida: SEIEM.

