DIFICULTADES EN EL RAZONAMIENTO DEL ALUMNADO DE 2º DE ESO RELACIONADAS CON EL CONCEPTO DE VOLUMEN Y SU MEDIDA

Sanmiguel Suárez, M., Salinas Portugal, M. J.

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen. *La presente comunicación está integrada dentro de un proyecto de investigación más amplio realizado en relación con el concepto de medida de las magnitudes geométricas longitud, área y volumen de un grupo de alumnado de 2º de ESO. Presentamos en este informe lo relativo al caso del volumen: proceso realizado, análisis de los resultados y conclusiones obtenidas. Nos proponemos conocer de qué manera se enfrenta nuestro alumnado ante diversas situaciones de medida del volumen: qué dificultades se le presentan, qué tipo de estrategias emplea y qué grado de madurez en el concepto de volumen reflejan los razonamientos y técnicas empleados.*

Palabras clave: Educación Secundaria, Medida, Volumen, Dificultades de razonamiento.

Abstract. *This communication is integrated into a wider research project related to study the concept of measure of geometric measurements length, area and volume, that had a group of students from Second Level of ESO. We present here the results related to the Volume´s case: the process that we followed as well as the analysis of the results and the conclusions obtained. We aim to know the way our group of students try to solve different situations of volume measurement: what difficulties they have, what types of strategies they use and what is their volume´s conception, attempting to the reasonings and techniques that they use.*

INTRODUCCIÓN

El informe que presentamos en esta comunicación forma parte de un trabajo más amplio en el que se han estudiado las dificultades del alumnado de 2º de ESO, relacionadas con el concepto de medida de las magnitudes geométricas.

La importancia del trabajo de la geometría a partir del espacio y los sólidos es señalado por autores como Guillén, quien expresa su acuerdo con las afirmaciones de Freudenthal, en que "el espacio con sus sólidos es más concreto que el plano con sus figuras" (Guillén, 2010: 25). Por otra parte, también debemos destacar cómo la comprensión del volumen y su conexión con la realidad permiten al alumnado un mayor entendimiento de su entorno, y, por tanto está relacionado con la adquisición de las competencias básicas por parte de los estudiantes, tal como se demanda desde los informes PISA de la OCDE (2007).

Sin embargo continúan existiendo dificultades del profesorado para afrontar la enseñanza de conceptos geométricos y de medida. De ello se hacen eco diversos autores; por ejemplo Guillén (2010) señala la influencia de las creencias y experiencias previas del profesor. Alsina, Burgués, Fortuny (1987), Guzmán (1993), Torre (2001) o Sánchez (2004), destacan dificultades debidas tanto a la inexistencia de una formación didáctica adecuada, como a la pervivencia de cierto rechazo de origen histórico hacia la enseñanza de la propia Geometría. Vecino (2003: 302) explica: "Los intentos emprendidos por diversos colectivos institucionales para mejorar la enseñanza de la Geometría, de manera que se recuperase del olvido intencional al que la comunidad didáctica la había relegado en la década de los sesenta, no parecen haber dado los resultados didácticos apetecidos". En particular respecto de la geometría espacial y según señala Guillén (2010: 59): "El gran reto sigue siendo que la geometría de los sólidos vuelva a *todas* las clases".

De acuerdo a la clasificación realizada por Gutiérrez (1998) incluimos el trabajo dentro del estudio de los Procesos de Razonamiento que emplea el alumnado de 2º ESO en relación a diversos aspectos de Geometría Espacial.

El objetivo del presente informe se focaliza en: "Conocer procesos de razonamiento y en particular las dificultades, que un grupo de alumnado de 2º ESO presenta ante cuestiones relacionadas con el concepto de volumen y su medida". Nos centraremos por tanto, en el análisis y clasificación de dichas dificultades.

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En los currículos oficiales referidos a la ESO se señala que en torno a la edad en que se cursa 2º ESO se inicia el razonamiento hipotético-deductivo; por lo que se recomienda en esta etapa dar prioridad al trabajo práctico, manipulativo e intuitivo así como a la capacidad de estimar resultados y magnitudes (M.E.C., 2006). Las orientaciones del NCTM (2000) para el alumnado de nuestra etapa educativa, instan a interrelacionar y resaltar las conexiones existentes entre el Estándar de Medida y el Estándar de Geometría; tratando de que el alumnado vaya desarrollando e intuyendo las fórmulas adecuadas para el cálculo de medidas. El desarrollo de este tipo de estrategias y habilidades está en coherencia, tal como expone Rico (2007) con el actual enfoque por competencias que la OCDE evalúa a través del informe PISA. Para evaluar la Competencia Matemática, dicho Informe establece una serie de ítems basados en tres variables: el contenido matemático, el contexto del problema y los procesos específicos del problema.

Tratamos a continuación dificultades en la enseñanza-aprendizaje de los contenidos geométricos y de medida, que hemos agrupado en torno a cuatro grandes núcleos:

Dificultades derivadas del devenir histórico de la Geometría y aquellas que suponen un paralelismo entre la historia y la didáctica de la Medida.

Si bien desde antiguo la Geometría ocupó un destacado puesto en la enseñanza, siendo la recopilación de los "Elementos" de Euclides una obra de enorme influencia didáctica durante siglos, imprime un carácter de tipo lógico y deductivo que según Alsina, Burgués, Fortuny (1987) acentúa su divorcio con la Aritmética y en cierto modo, con la Medida práctica. A pesar de que la aparición en el s. XVI de la Geometría Analítica conlleva una nueva tendencia a unir ambas vertientes, los mismos autores señalan que a nivel educativo no es totalmente aceptada. Posteriormente la reforma formalista de la

"Matemática Moderna" en el siglo XIX, tendrá según los citados autores unas negativas consecuencias en la enseñanza. De hecho Guzmán (1993: 3) afirma que bajo este movimiento "la geometría elemental y la intuición espacial sufrieron un gran detrimento".

En el caso de la Medida, Chamorro (2003) fundamenta dificultades de su didáctica, a través de hechos históricos. El largo tiempo que históricamente se ha tardado en llegar a un sistema universal de medida es semejante a la fuerte resistencia que durante mucho tiempo ofrece el alumnado hacia el empleo de las unidades convencionales.

Dificultades debidas a la metodología empleada. Las englobamos en cuatro apartados:

a) Derivadas de una presentación ostensiva (Chamorro, 2003). Se caracterizan por una introducción precoz de las nociones matemáticas y de un modo meramente perceptivo. En consecuencia el alumnado presenta errores ligados a una presentación estática de figuras (con frecuencia siempre en la misma posición) y a un uso abusivo del dibujo que fomenta la identificación de figura con su contorno; Castelnuovo (1963) y Chamorro (2001) critican el uso del dibujo como técnica predominante en el caso de la medida. Actividades prácticas de estimación de la medida no suelen enfatizarse suficientemente en la práctica docente, según afirma el NCTM (2000). Investigaciones recientes como la realizada por Towers y Hunter (2010) proponen cambios en la actitud del profesor: la interrelación en la clase, así como la atención a ciertas "señales": vocabulario matemático empleado, estrategias que emplean y discusiones sobre su idoneidad por parte del propio alumnado, reflexión sobre las argumentaciones incorrectas que ofrecen.

b) Derivadas de una temprana introducción del lenguaje algebraico. Según Martínez y Rivaya (1989) se tiende a construir la Geometría a partir del lenguaje algebraico en detrimento de una Geometría de "búsqueda intuitiva", término acuñado por Alsina y otros (1987: 43). Conlleva una falta de variedad de técnicas de resolución y la tendencia del alumnado a "emplear fórmulas memorísticamente" (Dickson y otros, 1984). Esta tendencia es corroborada por estudios como el realizado con alumnado de 12 años por Kordaki y Potari (1998: 305) quien para evitarla y "no permitirles usar las fórmulas del cálculo de áreas y otras herramientas de medida convencionales" se decide proponer al alumnado cuestiones de medida menos tradicionales.

c) Originadas por una aritmetización de la Geometría y de la Medida. En el caso de la Geometría se trata de la tendencia a identificarla con el cálculo de áreas de figuras en el plano y con el cálculo de volúmenes en el espacio, tal como señala Vecino (2003). Para el caso de la Medida, Chamorro (2003) explica que consiste en tender a sustituir magnitudes por números, con falta de suficientes experiencias necesarias para la conceptualización del sentido de magnitud y de su medida. Profundizando un poco más, aparecen estudios que además demuestran la tendencia del alumnado entre 12-15 años a emplear mecánicamente modelos lineales en la resolución del cálculo de longitudes y áreas, sin atender a su idoneidad o no. (Bock, D. y otros, 1998)

d) Derivadas de una algoritmización de la Medida. Chamorro (2003) las describe como metodologías de carácter abstracto debido a un trabajo exclusivamente formal del cambio de unidades. Conlleva errores como que el alumnado no explicite las unidades al expresar resultados o las confunda. La mayoría de los libros de texto empleados, según exponen Olmo y otros (1993) sobreentienden que el alumno ya descubrió por sí mismo el concepto de magnitud y suelen pasar a su medida. Análogamente en su investigación, Boulton-Lewis y otros (1996) ponen en entredicho la eficacia de las metodologías y secuencias curriculares propuestas para la adquisición de la medida de la longitud.

Obstáculos ontogenéticos

Adquisición de la conservación de las magnitudes. Su adquisición para cada tipo de magnitud no parece ir ligada a una edad fija, sino que también influyen las experiencias respecto de ellas (Lovell, 1984). La autora K. Hart (citada por Olmo y otros, 1993) a través de sus experiencias, cuestiona la secuencia propuesta por Piaget de que primero se adquiere para la longitud, luego para el área y por último para el volumen. Sí existe acuerdo en general con el carácter tardío de la comprensión de la conservación del volumen.

Obstáculos de origen epistemológico. Los agrupamos en dos apartados:

a) Confusión entre área y volumen. Para Castelnuovo (1963) se trata de una tendencia natural a confundir el volumen de un sólido con su superficie.

b) El paso de las estructuras aditivas a las multiplicativas. En el caso de la comprensión de la estructura multiplicativa del volumen, Vergnaud (1983) realiza un estudio sobre la concepción del volumen en estudiantes entre 11 y 15 años analizando qué estrategias emplean. Explica que el volumen puede ser estudiado como magnitud unidimensional o como magnitud tridimensional; este último caso corresponde a la estructura multiplicativa, que puede verse obstaculizada por la estructura aditiva previamente adquirida, llevándole a errores. Las estrategias erróneas van asociadas, según el autor señala, a diversas nociones de volumen. Destacamos las estrategias de tipo perimétrico: componen aditivamente las dimensiones lineales, razonando sobre las aristas del cuerpo y las de tipo superficie: calculan el área de las caras y las suman. Vergnaud afirma que las primeras se dan en los niveles más bajos y desaparecen en los más elevados, pero las de tipo superficie “perduran más en los niños, lo que provoca que la confusión superficie-volumen sea bastante duradera” según corroboran Olmo y otros (1993: 136). La estructura multiplicativa supone un pensamiento formal que muchos alumnos aún no alcanzaron.

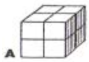
METODOLOGÍA

Puesto que nuestro objetivo es obtener información sobre las dificultades en el razonamiento que presenta respecto a la medida del volumen un grupo de alumnado de 2ºESO, se decide llevar a cabo un estudio descriptivo de carácter cualitativo. Se trabaja con un total de 47 estudiantes (28 chicos y 19 chicas) pertenecientes a tres clases de 2ºESO de un Instituto de Enseñanza Secundaria.

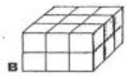
Se elabora una prueba cuyos ítems permitan descubrir y clasificar los razonamientos y estrategias que emplean. Para el caso del volumen se desea asimismo conocer, partiendo de los estudios ya mencionados de Vergnaud la noción de volumen que presentan nuestros estudiantes. Para la elección de los ítems se realiza un estudio bibliográfico, buscando que estén ya baremados y que atiendan a las cuestiones que acabamos de mencionar. De este modo para el estudio de lo relativo a la magnitud volumen, se escogen tres ítems que nos resultan más clarificadores, procedentes de Hart (1981) y de Vergnaud (1983), autores mencionados en la fundamentación de la presente investigación.

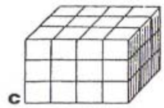
Los tres ítems seleccionados para el estudio del volumen son los siguientes:

a) Ítem nº 5 de la prueba, obtenido de Hart (1981), con dos subapartados

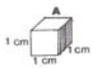
El **bloque A**: 

nstruido empleando 8 cubitos como éste: 

a) Cuántos cubitos forman el **bloque B**? (No hay huecos dentro) 

b) Y cuántos forman el **bloque C**? (Tampoco hay huecos dentro) 

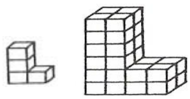
b) Ítem nº 6 de la prueba, empleado por Vergnaud (1983)

¿Cuántos cubitos de 1cm. de lado: 

son necesarios para construir una caja llena (como una caja de zapatos), de 3 cm. de largo, 4 cm. de ancho y 2 cm. de alto?

c) Ítem nº 7 de la prueba, obtenido de Vergnaud (1983)

Aquí tienes dos **L** fabricadas con cubitos. Hemos construido la **L pequeña** con 4 cubitos, y para construir la **L** más **grande**, doblamos el largo, el ancho y la altura. ¿Cuántos cubitos forman la **L grande**?



ANÁLISIS DE RESULTADOS

a) Análisis global de los ítems relacionados con el volumen

Realizamos una primera lectura de los resultados presentando los porcentajes de acierto y error de cada ítem a través de la siguiente tabla:

	Llegan a la solución		No llegan a la solución		En blanco	
	F_i	%	F_i	%	F_i	%
Ítem nº5	25 **(*)**	53%	19 **(**)**	40%	3	6%
Ítem nº6	22	47%	21	45%	4	9%
Ítem nº7	19	40%	25	53%	3	6%

Tabla 1: Porcentajes globales de la prueba en los ítems referidos al volumen

(*) En este Ítem se considera que "Llegan a la solución" aquellos alumnos que responden correctamente los dos apartados del ítem

(**) En este Ítem se considera que "No llegan a la solución" aquellos alumnos que responden incorrectamente uno o los dos apartados del ítem.

Vemos cómo los resultados no son muy dispares entre los distintos ítems; los alumnos que respondieron correctamente al ítem nº 5 apenas superan la mitad del total, y en los restantes ya no llegan a ese porcentaje. Sin embargo, a pesar de las dificultades que han aparecido para resolverlos adecuadamente, la mayoría del alumnado ha intentado resolverlos, de lo que deducimos que estas cuestiones referidas al volumen no han sido consideradas muy difíciles.

Por cuestiones de espacio vamos a centrarnos en presentar un análisis más detallado del ítem nº 5, que nos aporta mucha información a través de los dos apartados que lo componen.

b) Análisis del Ítem nº 5

En este Ítem tratamos de conocer dificultades en el concepto de volumen que presenta nuestro alumnado, y cómo se enfrenta a su cálculo en situaciones sencillas como es el caso de los ortoedros. Se les plantean dos cuestiones que aumentan en grado de complejidad, puesto que el ortoedro del apartado "b)" tiene unas dimensiones mayores que las del ortoedro del apartado "a)", y ninguno de ellos es ya un cubo.

En cuanto a las estrategias empleadas en cada apartado, la mayoría usó el mismo procedimiento en ambos; sólo 6 alumnos (un 14% de los que contestaron) cambiaron su estrategia para resolver el apartado "b)"

DESCRIPCIÓN Y CLASIFICACIÓN DE LAS RESPUESTAS

Se realiza un análisis descriptivo de los resultados atendiendo al conjunto de dificultades mencionado en la fundamentación teórica y tomando como punto de partida las concepciones de volumen mencionadas por Vergnaud, las cuales están vinculadas a diversas estrategias o razonamientos empleados por el alumnado. En cuanto a la clasificación de los razonamientos del alumnado, una parte son descritos por dicho autor mientras que los otros son motivados por el análisis bibliográfico expuesto en el apartado de dificultades metodológicas.

1. Concepciones del volumen que aparecen en el grupo de alumnos cuyas estrategias les llevaron a la solución correcta

En la tabla 2 presentamos una clasificación de las respuestas correctas

SOLUCIÓN	CONCEPTO DE VOLUMEN	TIPO DE RAZONAMIENTO QUE EMPLEA	Apdo. "a)"	Apdo. "b)"	Total	%
1. Da la solución **correcta**	**1.1.** Basado en la trilinealidad (Tipo Volumen)	Multiplica razonadamente las tres dimensiones, explicando lo que hace, incluso completando con varios procedimientos	8	8	16	29%
	1.2. Basado en la bilinealidad (Tipo Superficie)	**1.2.1.** Multiplicativo: (calcula 1 capa) x (nº de capas)	14	14	28	50%
		1.2.2. Aditivo: (calcula 1 capa) y suma esa cantidad tantas veces como capas haya	1	3	4	7%
	1.3. Basado en la linealidad (Tipo Perimétrico)	Emplea el recuento (o conteo) de cubitos	2	1	3	5%
	1.4. Tipo Algebraico	Aplica la fórmula del volumen, memorísticamente, comparándola con el recuento	1	1	2	4%
	1.5. Basado en la Comparación	Por descomposición y comparación con la figura inicial	2	1	3	5%
			28	28	56	

Tabla 2: Estrategias que llegan a la solución correcta en el Ítem nº 5

1.1. Se observa que casi la tercera parte emplean la concepción "Tipo Volumen", es decir, multiplican las tres dimensiones. Es el caso de Miguel F., que fue probando hasta encontrar una estrategia correspondiente con la estructura multiplicativa:

1.2. Sin embargo la estrategia más utilizada es la que va unida a la concepción del volumen como Tipo Superficie, es decir, lo calculan por capas: primero obtienen el nº de cubitos de una capa para luego multiplicarlo por el nº de capas.

Otros casos en los que encontramos la concepción del volumen como "Tipo Superficie", pero en sentido aditivo, son aquellos en los que suman los cubitos de una capa, tantas veces como capas hay.

1.3. Sólo dos de los alumnos que resolvieron correctamente el Ítem, presentan la concepción de Volumen "tipo Perimétrico", manifestada a través del conteo o recuento de cubitos. La mayoría de alumnado que empleó esta estrategia, no consiguieron resolver el Ítem. Aún así, ambos alumnos se refieren a los cubitos como “cuadrados”. Es el caso de David que, en cada apartado explica que contó los “cuadrados” e incluso, en el apartado b) los numeró sobre la propia figura

1.4. y 1.5. Entre el alumnado que llegó a la solución correcta, apenas aparece el empleo de la fórmula del volumen sin más explicación, ni tampoco métodos de descomposición.

2. Concepciones del volumen que aparecen en el grupo de alumnado que no consigue obtener la solución correcta:

En la tabla 3 se hace una clasificación de las estrategias erróneas

SOLUCIÓN	CONCEPTO DE VOLUMEN	TIPO DE RAZONAMIENTO QUE EMPLEA	Apdo. “a)”	Apdo. “b)”	Total	%
2. Da una solución **incorrecta**	**2.1.** Basado en la bilinealidad (Tipo Superficie), pero presenta problemas con la estructura multiplicativa	Calculan bien los cubitos de una capa, pero mal el nº total de capas.	1	1	2	6%
		Calculan mal los cubitos de una capa (problema del “Cubo de la Esquina”), y el nº total de capas	1	0	1	3%
	2.2. Basado en la linealidad (Tipo Perimétrico). Emplean el conteo o recuento.	**2.2.1.** Problemas con los cubitos que no se ven	2	1	3	9%
		2.2.2. Confusión área-volumen: cuentan las caras de los cubitos, casi todos erróneamente	10	12	22	69%
	2.3. Basado en la Comparación de figuras	**2.3.1.** Descomponen en figuras, pero cuentan mal los cubitos	0	1	1	3%
		2.3.2. Intuición errónea: piensan que tiene el ”doble” o “triple” de cubitos que la figura anterior, incluso usan expresión matemática	2	1	3	10%
			16	16	32	

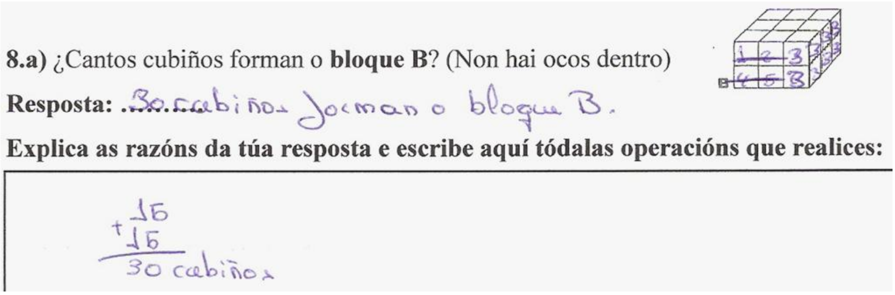
Tabla 3: Estrategias que llegan a una solución incorrecta en el Ítem nº 5

Resaltamos cómo en este grupo nunca aparece el concepto de trilinealidad, de lo que deducimos un menor grado de comprensión.

2.1. La concepción del volumen “Tipo Superficie”, calculándolo por capas, aparece unido a dificultades de cálculo y a una escasa asimilación del paso a la estructura multiplicativa en tres dimensiones.

2.2. Las estrategias más empleadas (más de las tres cuartas partes) van unidas al “Concepto Perimétrico” del volumen: conteo de cubitos. Hemos distinguido dos tipos de dificultades:

a) Recuento erróneo causado por “El problema de los cubitos que no se ven” Por ejemplo:

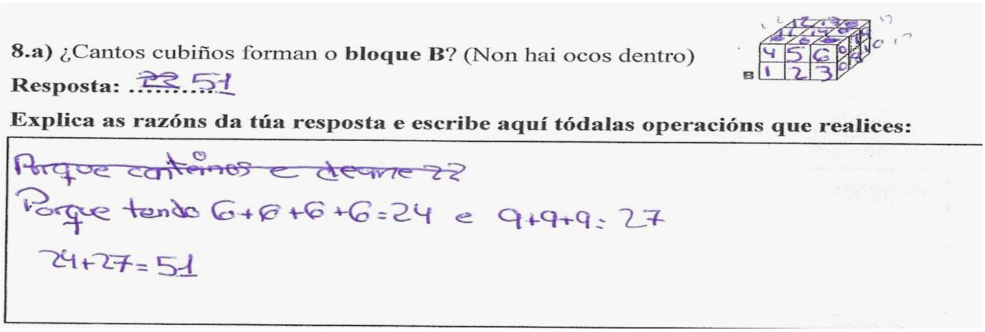

8.a) ¿Cantos cubiños forman o **bloque B**? (Non hai ocos dentro)

Resposta: ...30 cubiños forman o bloque B.

Explica as razóns da túa resposta e escribe aquí tódalas operacións que realices:

+16
16
30 cubiños

b) Recuento erróneo causado por la confusión área-volumen: Aparece en más de las dos terceras partes. Lo que hacen es contar las caras de los cubitos en vez de los propios


8.a) ¿Cantos cubiños forman o **bloque B**? (Non hai ocos dentro)

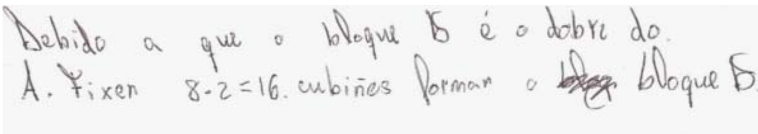
Resposta: ...~~22~~ 51

Explica as razóns da túa resposta e escribe aquí tódalas operacións que realices:

~~Porque contamos e deume 22~~
Porque tendo 6+6+6+6=24 e 9+9+9: 27
24+27=51

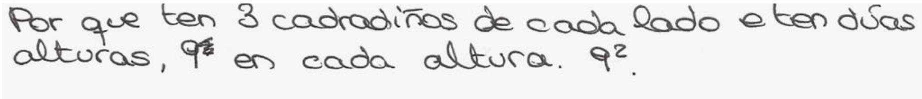
cubitos. Además, la mayoría se refiere a los cubitos como “cuadrados”, lo que potencia más esa confusión de magnitudes. (Como ya habíamos mencionado, esta terminología también la habían empleado algunos alumnos que obtuvieron la solución correcta).

2.3. Aparecen apenas estrategias de descomposición, sugiriéndonos que no han adquirido la comprensión de la estructura multiplicativa. Básicamente realizan comparaciones erróneas entre las figuras, como Gabriel que sólo la emplea en una dimensión.


Debido a que o bloque B é o dobre do A. Fixen 8·2=16. cubiños forman o ~~bloq~~ bloque B.

Y en el apartado b) afirma que la figura es el triple de la dada inicialmente.

Por último debemos destacar que, ya a nivel general, en bastantes razonamientos empleados han aparecido dificultades con la comprensión del significado de las operaciones y confusión de términos como “doble de” y “cuadrado de”. Es el caso de Antonio quien, aún llegando a la solución correcta del apartado a), se expresa de este modo:


Por que ten 3 cadradiños de cada lado e ten dúas alturas, 9^2 en cada altura. 9^2.

CONCLUSIONES

La adquisición del concepto de volumen es una cuestión tardía y los resultados corroboran el desarrollo evolutivo en el que se encuentra la mayoría de nuestro alumnado, pero también se resalta la necesidad de afrontar la noción de volumen a través de una ingeniería didáctica rica y variada que les aporte nuevas estrategias de resolución.

Se obtienen malos resultados en torno a la medida de esta magnitud (como mucho el 52% del alumnado consigue resolverlos correctamente) y el porcentaje de acierto en cada uno de los tres ítems va decreciendo a medida que aumenta la abstracción requerida para resolverlo. La mayoría de este alumnado tiende a emplear estrategias de tipo aritmético (recuento o conteo) bien para calcular el volumen por capas, o cubito a cubito; frente a la escasez de otro tipo de estrategias unidas a un razonamiento más abstracto, como la estimación, la comparación (descomposición-recomposición de figuras; homotecia entre figuras) o la aplicación del concepto tridimensional del volumen.

La dificultad más destacada en estos ítems ha sido el problema de la confusión área-volumen, que se manifiesta muchas veces a través del propio vocabulario que emplean muchos alumnos: en vez de utilizar la palabra “cubitos”, los denominan “cuadrados”. Ello también denota poca familiarización con situaciones de auténtica medida y de comparación de volúmenes de cuerpos diversos.

Resaltamos por último, el hecho de que la mayoría del alumnado no ha adquirido la noción de trilinealidad ni la estructura multiplicativa del volumen, presentando fundamentalmente la noción de volumen “tipo superficie” (calculado a partir de capas). Los niveles más bajos de comprensión del volumen emplean estrategias de recuento de cubitos. A mayor abstracción del ítem, mayor índice de fracaso.

A partir del estudio realizado se plantean retos como el estudio de metodologías adecuadas para trabajar la noción de volumen en este nivel educativo, que permita subsanar errores detectados y proporcionar al alumnado variedad de estrategias de carácter inductivo y materiales de cara a una manipulación más directa de esta magnitud.

Referencias

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J.M. (1987). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Assessment of performance unit (APU). (1980). *Mathematical Development. Secondary Survey Report.* London: HMSO.

Bock, D. De, VerschaffeL, L. y Janssens, D. (1998). "The predominance of the linear model in secondary school student´s solutions of word problems involving length and area of similar plane figures", en *Educational Studies in Mathematics*, vol 35, p. 65-83

Boulton-lewis, G.M., Wilss, L.A., Mutch, S.L. (1996). "An analysis of young children´s strategies and use of devices for length measurement", en *The journal of Mathematical Behaviour,* vol 15, p. 329-347.

Castelnuovo, E. (1963). *Didáctica de la matemática moderna*. México: Trillas.

Chamorro, C. (2001). "Las dificultades en la enseñanza-aprendizaje de las magnitudes en educación primaria y ESO", en Chamorro (ed.) *Dificultades del Aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid: MEC, p. 81-124

Chamorro, C. (2003). "Las magnitudes multilineales: la superficie y el volumen", en Chamorro (ed.) *Didáctica de las matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación, p. 221-272

Dickson, L., Brown, M. e Gibson, O. (1984). *El aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Labor.

Guillén, G. (2010). "¿Por qué usar los sólidos como contexto de enseñanza-aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación?". En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* . Lleida: SEIEM, p. 11-68.

Gutiérrez, A. (1998). "Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización", en *Ponencia en* TIEM-98.

Guzmán, M. de (1993), *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. Madrid: Editorial Popular.

Hart, K.M. (1981), "Measurement", en K.M. Hart ed. *Children´s Understanding of Mathematics: 11-16.* London: John Murray, p. 9-22

Kordaki, M., Potari, D. (1998), "Children´s approaches to area measurement through different contexts", en *The journal of Mathematical Behaviour, vol 17,* p. 303-316.

Lovell, K. (1984). *Desarrollo de los conceptos matemáticos y científicos en los niños*. Madrid: Morata.

Martinez, A., Rivaya, F.J. y otros (1989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la Geometría*. Madrid: Síntesis.

M.E.C. (2006), Lei Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. (BOE nº106, 4/5/2006).Disponible_en:_http://www.boe.es/aeboe/consultas/bases_datos/doc.php?coleccion=iberlex&id=2006/07899

N.C.T.M. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston VA. USA. (Traducción al castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática

THALES (2003) . *Principios y estándares para la Educación Matemática.* Granada)

O.C.D.E. (2007) "El programa PISA de la OCDE: ¿Qué es y para qué sirve?". Publicado polo centro da OCDE para América Latina, na web: http://www.oecd.org/document/51/0,3343,en_32252351_32235731_39732595_1_1_1_1,00.html_Disponible_en:_http://www.oecd.org/dataoecd/58/51/39730818.pdf

Olmo, M.A. del, Moreno, M.F. e Gil, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?*. Madrid: Síntesis

Rico, L. (2007), "La competencia matemática en PISA", en *PNA:Revista de Investigación en Didáctica de la Matemáticas, 1(2*), p. 47-66. Disponible en: http://www.pna.es/Numeros/pdf/Rico2007La.pdf

Sanchez, J.C. (2004) "¿Por qué las matemáticas básicas cambian? Claves para entender las renovaciones curriculares", en *Educación y futuro: revista de investigación aplicada y de experiencias educativas,* nº 11, p.161-170

Torre, E. de la (2001) "Que xeometría queremos para a educación primaria e que xeometría queremos para os mestres", en *Gamma nº1,* p.21-26

Towers, J., Hunter, K. (2010) "An ecological reading of mathematical language in a Grade 3 classroom: A case of learning and teaching measurement estimation", en *The journal of Mathematical Behaviour,* vol 29, p. 25-40.

Vecino, F. (2003) "Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria" , cap 11, en Chamorro, Mª. C (coord), Llinares, S., Ruiz Higueras, Mª.L., Belmonte, J.M., Vecino Rubio, F. *Didáctica de las matemáticas para primaria*. Madrid: Pearson Education.

Vergnaud, G. (1983) "Representation du volume et arithmetisation entretiens individuels avec des eleves de 11 a 15 ans", en *Reserches en didactique des mathématiques Vol. 4, nº1.,* p. 27-69