

**ESTUDIO EXPLORATORIO SOBRE EL SENTIDO ESTRUCTURAL EN
TAREAS DE SIMPLIFICACIÓN DE FRACCIONES ALGEBRAICAS**

**AN EXPLORATORY STUDY ON STRUCTURAL SENSE IN THE CONTEXT
OF SIMPLIFYING ALGEBRAIC FRACTIONS**

Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E.

Universidad de Granada

Resumen: *Analizamos el sentido estructural que estudiantes de entre 16 y 18 años de edad ponen de manifiesto al trabajar con expresiones algebraicas, en el contexto de la simplificación de fracciones algebraicas que involucran las igualdades notables cuadrado de la suma, cuadrado de la diferencia, diferencia de cuadrados y propiedad distributiva/factor común. La identificación y clasificación de las estrategias empleadas por los estudiantes nos permite diferenciar tres modos de actuación que evidencian diferentes niveles de sentido estructural. Este análisis nos permite distinguir un amplio espectro de niveles de sentido estructural y avanzar en la comprensión del constructo sentido estructural que informa sobre las habilidades necesarias para hacer un uso eficiente de las técnicas algebraicas en tareas escolares.*

Palabras clave: igualdades notables, sentido estructural, estrategias, expresiones algebraicas, simplificación.

Abstract. *We analyze the structural sense evidenced by 16-18 years old students when working on algebraic expressions within the context of simplifying algebraic fractions that involve the algebraic identities square of a sum, square of a difference, difference of squares and distributive property/common factor. The identification and classification of the strategies employed by the students allow us to differentiate three actuation modes that evidence different levels of structural sense. This analysis let us to distinguish a wide spectrum of levels of structural sense and to progress in the understanding of the structural sense construct which informs about the needed skills for an efficient use of algebraic techniques in school tasks.*

Key words. algebraic expressions; algebraic identities, simplification, strategies structural sense.

Existe gran coincidencia entre diversos autores (Cerdán, 2010; Nortes y Nortes, 2010; Novotná y Hoch, 2008) en destacar la falta de capacidad de los estudiantes de educación secundaria para aplicar las técnicas algebraicas básicas en contextos distintos de los que han experimentado. En especial cabe destacar las dificultades que manifiestan para

reconocer y generar formas equivalentes de expresiones algebraicas y comprender su significado; ambas capacidades se corresponden con objetivos de aprendizaje de la educación matemática en educación secundaria (NCTM, 2000; Ministerio de Educación y Ciencia, 2006). La reiterada percepción de éstas y otras dificultades puestas de manifiesto por los estudiantes al trabajar con expresiones algebraicas de diferentes tipos, ha ocasionado un interés creciente en la investigación en Educación Matemática por conocer cuál y cómo es el conocimiento que sobre el Álgebra escolar poseen o desarrollan los estudiantes de educación secundaria (Kieran, 2007; Ruano, Socas y Palarea, 2008; Trujillo, Castro y Molina, 2009; Vega-Castro, Castro y Molina, 2010). Esta misma preocupación ha dado lugar al surgimiento del constructo *sentido estructural*, que persigue precisar las habilidades necesarias para hacer un uso eficiente, en las tareas escolares, de las técnicas algebraicas aprendidas.

En esta línea de trabajo se enmarca el estudio que aquí presentamos en el que analizamos la aplicación que de las igualdades notables hacen alumnos de primer curso de Bachillerato en la simplificación de fracciones algebraicas. Centramos nuestra atención en las igualdades notables debido a su destacada presencia en los programas de estudio de matemáticas a nivel de educación secundaria y bachillerato como consecuencia de sus frecuentes aplicaciones en otros contenidos matemáticos (ej., la simplificación de expresiones, operaciones con fracciones algebraicas, límites), en otras áreas como la física, y en estudios superiores o de nivel universitario.

SENTIDO ESTRUCTURAL

En la última década Hoch y colaboradores (Hoch, 2003; Hoch y Dreyfus, 2004, 2005, 2006; Novotná y Hoch, 2008) han avanzado significativamente en el análisis de las habilidades que intervienen en el trabajo con expresiones algebraicas, y han realizado varios estudios centrados en la noción de *sentido estructural*. Dicha noción surge del análisis del trabajo con expresiones algebraicas, al distinguir entre las posibles actuaciones aquellas que hacen un uso efectivo de la estructura particular de las expresiones y de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. El término sentido estructural refiere, de forma general, a una colección de habilidades relacionadas con transformar expresiones algebraicas, que permite hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas (Linchevski y Livneh, 1999). No se trata de un concepto nuevo, sino que enfatiza cierta forma de “poseer” el conocimiento. Se manifiesta a través de unos signos externos cuando el sujeto trabaja con expresiones aritméticas y, sobre todo algebraicas.

En 2006, Hoch y Dreyfus presentaron una definición operacional de sentido estructural, por medio de tres descriptores, que permite identificar si un alumno está utilizando sentido estructural en el contexto del álgebra de educación secundaria. La Tabla 1 recoge la definición y un ejemplo de cada uno de dichos descriptores.

Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas

Descriptor	Definición de Hoch y Dreyfus (2006)	Ejemplos (Igualdad notable: Diferencia de Cuadrados)
SS1	Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.	Al factorizar $81 - x^2$, <ul style="list-style-type: none"> reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e identificar los factores.
SS2	Tratar un término compuesto como una única entidad y reconocer una estructura familiar en una forma más compleja.	Al factorizar $(x - 3)^4 - (x + 3)^4$ <ul style="list-style-type: none"> tratar los binomios $(x - 3)^2$ y $(x + 3)^2$ como una sola entidad, reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e identificar los factores implicados.
SS3	Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.	En las tareas anteriores, <ul style="list-style-type: none"> aplicar la igualdad notable diferencia de cuadrados $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ para factorizar dichas expresiones.

Tabla 1. Definición y ejemplos de los descriptores del Sentido Estructural.

ESTUDIOS PREVIOS SOBRE EL SENTIDO ESTRUCTURAL Y EL TRABAJO CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Las dificultades que los estudiantes manifiestan con las estructuras algebraicas fueron inicialmente estudiadas por Booth (1982), Wagner, Rachlin y Jensen (1984) y por Steinberg, Sleeman y Ktorza (1990) quienes pusieron de manifiesto que alumnos de educación secundaria tenían dificultades para concebir una expresión compleja como un todo y reconocer semejanzas en las estructuras de ecuaciones equivalentes, pese a mostrar facilidad para resolver dichas ecuaciones siguiendo procedimientos estándares. Booth (1982) investigó el tipo de expresiones algebraicas que los alumnos consideraban equivalentes y observó que interpretaban las expresiones de manera diferente según el contexto aplicando la siguiente regla: “Una expresión algebraica se resuelve siempre de izquierda a derecha, a menos que el contexto especifique que debe realizarse otra operación previamente”. Según esta regla un par de expresiones pueden ser equivalentes en un contexto y no serlo en otro.

Herscovics y Linchevski (1994) y Ruano, Socas y Palarea (2008) señalan dificultades y errores concretos que manifiestan los estudiantes al transformar expresiones algebraicas tales como la necesidad de clausura que muestran, la particularización de expresiones algebraicas dándoles valores numéricos al no encontrar sentido en el uso del lenguaje algebraico en algunos contextos, el uso inadecuado o no uso de paréntesis, la concatenación de igualdades, el fallo en la percepción de la cancelación de expresiones, falta de aceptación del signo igual como expresión de una equivalencia, un orden incorrecto de las operaciones y la separación de un número del signo operacional que le precede.

Trabajos más recientes que analizan específicamente el sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2004; 2005, 2006) destacan el escaso uso que hacen del mismo estudiantes de entre 16 y 17 años al resolver ecuaciones algebraicas especialmente diseñadas para facilitar su resolución a partir de la apreciación de estructuras dentro de la ecuación o de

uno de sus miembros, y de relaciones entre ellas (ej. $\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 5 + (\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1})$). El uso del sentido estructural fue algo mayor en el caso de alumnos de un curso previo que habían trabajado más recientemente la resolución de ecuaciones lineales, lo cual sugiere que la enseñanza tiene efecto en el desarrollo del mismo. Los autores citados identificaron la presencia de la variable en ambos miembros de la igualdad así como la presencia de paréntesis como elementos facilitadores de la percepción de estructuras por parte de los estudiantes. También observan un bajo sentido estructural en tareas de factorización de expresiones complejas utilizando la igualdad notable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ en las que los estudiantes mostraron falta de capacidad para aplicar una fórmula conocida cuando los términos implicados eran compuestos (Hoch y Dreyfus, 2005). También detectaron cierta correlación entre el sentido estructural y la habilidad para la manipulación de expresiones algebraicas, en especial en niveles bajos de ambos, y observaron que los alumnos que utilizan sentido estructural cometen menos errores de manipulación (Hoch y Dreyfus, 2006; Novotná y Hoch, 2008).

DISEÑO DEL ESTUDIO EMPÍRICO

El trabajo que hemos realizado es un estudio exploratorio cuyo objetivo es analizar el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de 1º de Bachillerato al simplificar fracciones algebraicas que involucran igualdades notables, y paralelamente avanzar en la comprensión y caracterización del constructo sentido estructural.

La recogida de datos se realizó durante el curso académico 2009-2010 en un centro de educación secundaria de Granada. Los alumnos objeto de estudio fueron un grupo de 1º de bachillerato, formado por 33 estudiantes de entre 16 y 18 años, los cuales nos permitieron recoger los datos empíricos sobre los que realizamos el análisis que aquí presentamos. Previo al trabajo con este grupo se realizó una recogida de datos piloto en la que participaron dos grupos de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria, con edades comprendidas entre 15 y 17 años. Esta primera recogida de datos permitió poner a punto el instrumento e identificar la necesidad de trabajar con alumnos de un curso posterior para que proporcionara más cantidad de información.

Diseño y aplicación del instrumento

Elaboramos una prueba escrita compuesta por cuatro tareas. Cada una de ellas presentaba una fracción algebraica (ver Tabla 2) que los alumnos tenían que “modificar para obtener una expresión equivalente más sencilla”. Además debían explicar lo que habían hecho.

El diseño de la prueba estuvo guiado por los descriptores de sentido estructural que señalan Hoch y Dreyfus (2006) (ver Tabla 2). El tercero de dichos descriptores nos condujo a seleccionar la simplificación de fracciones algebraicas como contexto en el cual tiene un propósito explícito plantear la manipulación de expresiones algebraicas. En este contexto la aplicación de las igualdades notables era necesaria para simplificar las fracciones propuestas. Los otros dos indicadores, SS1 y SS2, se consideran

Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas

adicionalmente, de forma separada, en el diseño de las tareas. La fracción considerada en la primera tarea está compuesta por términos simples (SS1) y las correspondientes a las tres tareas restantes están compuestas por términos compuestos, en concreto potencias y productos (SS2).

Una de las variables considerada en el diseño de las tareas fue las igualdades notables incluidas (ver Tabla 2). Las tres primeras fracciones algebraicas involucran una de dichas igualdades, mientras que la cuarta fracción algebraica involucra dos igualdades, aunque sólo una de ellas es de utilidad para simplificar la fracción.

Tarea		1	2	3	4
Igualdades Notables		Cuadrado de una diferencia	Propiedad distributiva / Factor común	Suma por diferencia	Suma por diferencia Cuadrado de una suma
Fracción Algebraica		$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x - 7)^2(x - 7)}$	$\frac{2m(2m - 1)}{4m^5 - 2m^4}$	$\frac{(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)}{(2x + 1)(2x - 1)}$	$\frac{(5a^2 - 1)(5a^2 + 1)}{25a^4 + 1 + 10a^2}$
Descriptor del Sentido Estructural	SS 1	X			
	SS 2		X	X	X
	SS 3	X	X	X	X

Tabla 2. Descriptores del SS utilizados en cada fracción algebraica.

RESULTADOS

Detallamos tres modelos de actuación que se detectan al analizar las estrategias utilizadas por los estudiantes los cuales nos permiten describir su rendimiento en la tarea propuesta y distinguir niveles de sentido estructural puestos de manifiesto.

Modelos de actuación de los estudiantes

Clasificamos las estrategias que utilizaron los estudiantes en cada una de las tareas según tres modelos de actuación. El modelo A consta de dos pasos, con un estado intermedio además del inicial y el final (ver Figura 1). El estado intermedio presenta una fracción equivalente a la inicial en la cuál es más explícita la existencia de factores comunes entre el numerador y el denominador, y por tanto la posibilidad de realizar una cancelación de los mismos.

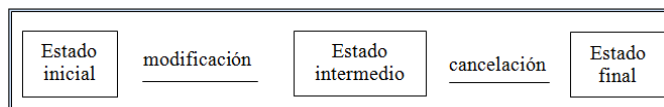


Figura 1. Esquema Modelo A

En el modelo B, en cambio, tienen lugar tres pasos: un primer estado de tránsito, otro intermedio y, un estado final (ver Figura 2). El estado de tránsito es una expresión equivalente a la fracción inicial en la cual aún no es explícita la posibilidad de cancelación de términos en el numerador y denominador o bien consiste en la ejecución de un procedimiento estándar que conduce al desarrollo o factorización de alguna de las expresiones. El estado intermedio, al igual que en el modelo A, manifiesta con mayor claridad la posibilidad de cancelación de algunos términos.

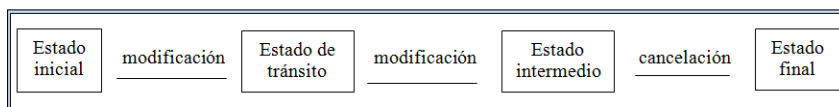


Figura 2. Esquema Modelo B

Por último distinguimos el modelo C que consta de más de tres pasos y engloba casuísticas diversas en cuanto al número de pasos y los estados que lo componen. A diferencia de los otros dos modelos éste no conduce a una simplificación de la fracción dada debido a que algunas de las transformaciones realizadas en la expresión no son correctas o no permiten la simplificación. Las diferentes estrategias que se distinguen en las producciones de los alumnos⁹⁰, se enmarcan todas dentro de alguno de estos tres modelos. Entre las estrategias distinguimos exitosas y no exitosas según conduzcan o no a la simplificación de la fracción algebraica dada, si bien en las exitosas es posible que no se llegue a tal por cometer errores de procedimiento.

Estrategias del modelo A

Las estrategias correspondientes al modelo A que se presentaron en las tareas 1, 3 y 4 consisten en la aplicación directa de una igualdad notable —cuadrado de una diferencia, suma por diferencia y cuadrado de una suma, respectivamente— tras reconocer el alumno, en el numerador o denominador, la forma extendida o desarrollada de dicha igualdad. Dicha aplicación conduce al desarrollo o factorización de una de las expresiones contenida en la fracción (ver ejemplo en Tabla 3). En la tarea 2 tuvo lugar una estrategia correspondiente a este modelo consistente en la extracción en el denominador del máximo común divisor de los monomios $(2m^4)$, lo que permite simplificar en un solo paso los dos factores que aparecen en el numerador con factores comunes del denominador (ver Tabla 3).

Estado inicial	modificación	Estado intermedio	Cancelación	Estado final
$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x - 7)^2(x - 7)}$	numerador	$\frac{(x - 7)^2}{(x - 7)^2(x - 7)}$		$\frac{1}{x - 7}$
$\frac{2m(2m - 1)}{4m^5 - 2m^4}$	denominador	$\frac{2m(2m - 1)}{2m^4(2m - 1)}$		$\frac{1}{m^3}$

Tabla 3. Ejemplos de estrategias correspondientes al modelo A (tareas 1 y 2)

⁹⁰ Ver Vega-Castro, Castro y Molina, 2010 para una descripción de cada una de las estrategias que los estudiantes utilizaron en las tareas propuestas.

Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas

Estrategias del modelo B

Las estrategias correspondientes al modelo B son también exitosas en la simplificación de la fracción dada, pero requieren más de dos pasos. Este tipo de estrategias tuvieron lugar en las tareas 1, 2 y 3. En el caso de las tareas 1 y 3 dichas estrategias no implican el uso de ninguna igualdad notable. Las dos estrategias presentadas en la tarea 1 corresponden a la factorización del numerador mediante la técnica de Ruffini o mediante el uso de la fórmula de la ecuación cuadrática (ver ejemplo en Tabla 4). En la tarea 3 las estrategias difieren dependiendo de si la manipulación afecta únicamente al denominador o también al numerador, distinguiéndose dos casos. En el primer caso la estrategia consiste en el uso de la propiedad distributiva para desarrollar el denominador, y en el segundo, también implica el desarrollo del producto de suma por diferencia que aparece en el numerador.

En cuanto a la tarea 2, se presenta una situación diferente ya que la estrategia correspondiente a este modelo es análoga a la correspondiente al modelo A en tanto que sólo modifica el denominador de la fracción y se basa en el uso de la igualdad notable propiedad distributiva/factor común. Sólo difiere en la factorización del denominador. En este caso se extrae como factor común el menor de los divisores (2m), lo que implica el uso de un paso más para simplificar la fracción al no extraer en el primer paso los dos factores comunes existentes entre las expresiones del numerador y del denominador.

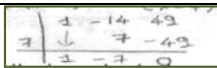
Estado inicial	Mod.	Estado de tránsito	Mod.	Estado intermedio	Canc.	Estado final
$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)}$	N		N	$\frac{(x-7)(x-7)}{(x-7)^2(x-7)}$		$\frac{1}{x-7}$
$\frac{(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)}{(2x + 1)(2x - 1)}$	D	$\frac{(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)}{4x^2 + 2x - 2x - 1}$	D	$\frac{(4x^2 - 1)(4x^2 + 1)}{4x^2 - 1}$		$4x^2 + 1$

Tabla 4. Ejemplos de estrategias correspondientes al modelo B (tareas 1 y 3)
Mod. = modificación; Canc.= cancelación; N= numerador; D=Denominador

Estrategias del modelo C

Las estrategias que se recogen dentro del modelo C no son exitosas. En este caso el estudiante realiza transformaciones que no parecen estar guiadas por ninguna anticipación de una posible simplificación de la expresión o bien cometen errores en la manipulación de las expresiones que les conducen a expresiones no equivalentes a las dadas. La Figura 3 muestra ejemplos de estrategias correspondientes a este modelo, las cuales tuvieron lugar en todas las tareas.

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^2(x-7)} = \frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^3} = \frac{x^2 - 14x + 49}{(x-7)^3}$$

$$\frac{2m(2m-1)}{4m^5 - 2m^4} = \frac{4m^2 - 2m}{4m^5 - 2m^4}$$

Figura 3. Ejemplos de estrategias del modelo de actuación C

Rendimiento de los estudiantes

En primer lugar describimos el rendimiento de los estudiantes en cada tarea. La Tabla 5 muestra el número y porcentaje de estudiantes que resuelven correctamente o no cada tarea. Distinguimos entre estrategias exitosas o no exitosas señalando, a su vez, los casos en los que la estrategia empleada por el alumno fue exitosa pero se cometieron algunos errores en la manipulación de las expresiones o no se concluyó la simplificación de la fracción algebraica.

El número de estrategias exitosas utilizadas fue muy alto en las tareas 1 y 3 (30 y 29 de los 33 estudiantes, respectivamente) si bien en la tarea 3 fue mayor el número de estudiantes que interrumpieron dichas estrategias o cometieron algún error en la manipulación, posiblemente debido a la dificultad de trabajar con términos compuestos, en concreto potencias. En el caso de las tareas 2 y 4 el número de estrategias exitosas utilizadas fue 23 y 15 (70% y 45%), respectivamente. En la tarea 2, un 30% de los estudiantes simplificó parcialmente la fracción algebraica siendo también alto el número de estudiantes que cometieron errores en la manipulación de las expresiones. Es de destacar el alto número de estrategias no exitosas utilizadas por los estudiantes en la tarea 4. La complejidad de esta tarea radica en que además de requerir trabajar con términos compuestos, involucra dos igualdades notables pero sólo la aplicación de una de ellas conduce a la simplificación de la fracción dada.

Estrategias Tarea	Exitosas	Exitosas Interrumpidas	Exitosas con errores	No Exitosas	No realizadas
1	21 (63.6%)	3 (9.1%)	6 (18.2%)	3 (9.1%)	0
2	4 (12.1%)	10 (30.3%)	9 (27.3%)	9 (27.3%)	1 (3.0%)
3	12 (36.4%)	7 (21.2%)	10 (30.3%)	3 (9.1%)	1 (3.0%)
4	10 (30.3%)	1 (3.0%)	4 (12.1%)	17 (51.5%)	1 (3.0%)

Tabla 5. Estrategias utilizadas en cada tarea

Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas

Niveles de sentido estructural

Teniendo en cuenta los descriptores de sentido estructural, consideramos que las estrategias que corresponden a los tres modelos descritos ponen de manifiesto diferencias de sentido estructural en los estudiantes que las utilizan, estando en orden decreciente A, B, C.

Estableciendo esta jerarquía, una vez analizados los datos, según las estrategias utilizadas en el desempeño de las tareas hemos identificado cuatro niveles de sentido estructural puestos de manifiesto por los estudiantes: nivel alto; nivel medio; nivel bajo y nivel muy bajo (ver Figura 4). Dichos niveles se han establecido en función de la cantidad de estrategias y tipo de estrategias que utilizan de los modelos indicados anteriormente.

Nivel Alto: utilizan sólo estrategias del modelo A o todas del tipo A y una del tipo B.

Nivel Medio: utilizan sólo estrategias tipo A y B, excluyendo los casos del nivel alto, o utilizan una estrategia tipo C y al menos dos estrategias tipo A.

Nivel Bajo: utilizan dos estrategias tipo C y al menos una tipo A o una estrategia tipo C y menos de dos estrategias tipo A.

Nivel Muy Bajo: utilizan al menos dos estrategias tipo C y ninguna tipo A

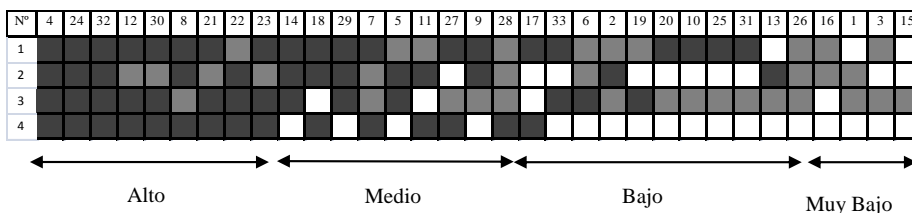


Figura 4. Nivel de sentido estructural (SE) mostrado por cada estudiante en las cuatro tareas. Cada columna corresponde a un alumno.

■=estrategia del modelo A; ■= estrategia del modelo B; □= estrategia del modelo C

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo en este estudio es analizar el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de 1º de Bachillerato en la simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. Para este objetivo la prueba diseñada ha sido de utilidad permitiendo distinguir diferentes niveles de sentido estructural a partir de las actuaciones de los estudiantes. Se observa una mayor presencia de errores de manipulación cuando las expresiones incluyen términos compuestos y una mayor presencia de estrategias no exitosas (modelo C) en las fracciones en las que entra en juego la propiedad distributiva/factor común (tarea 2) o que involucran dos igualdades notables (tarea 4).

La mayoría de los estudiantes (28) aplican las igualdades notables en una de las tareas (estrategias del modelo A y estrategia tipo B en tarea 2), siendo este uso más frecuente en la primera tarea que incluía términos simples. Detectamos un amplio espectro de niveles de sentido estructural que sugiere muy diferentes niveles de desarrollo de habilidades tales como considerar expresiones como entidades, reconocer relaciones entre las mismas tales como la igualdad, o ser factor/múltiplo una de la otra, reconocer estructuras familiares, y anticipar el efecto de una transformación en la posibilidad de cancelar términos en una expresión. Estas habilidades, identificadas e incluidas al menos implícitamente en los descriptores del sentido estructural de Hoch y Dreyfus (2006), son necesarias para hacer un uso eficiente de las técnicas algebraicas básicas en el contexto de las tareas propuestas y son un aporte de este trabajo a la caracterización del sentido estructural. Así mismo nuestros resultados contribuyen a fortalecer la validez de dicho constructo.

El modo en que se aborde el trabajo algebraico en la educación secundaria y bachillerato condicionará el grado de desarrollo del sentido estructural de los estudiantes. En el contexto de las igualdades notables, contenido que suele ser tratado como reglas fijas a memorizar, el sentido estructural destaca como un elemento clave que condiciona la utilidad y aplicabilidad de dicho contenido.

Partiendo de trabajos previos que evidencian el efecto de la enseñanza en su desarrollo, futuros trabajos que impliquen recogidas de dato más extensas y ambiciosas, se hacen necesarios para informar de cómo promover el desarrollo del sentido estructural en la educación obligatoria, seguir caracterizando dicho constructo a partir de la identificación de las habilidades que lo componen e identificar los elementos que condicionan su uso ya sean variables de tarea, aspectos cognitivos o elementos relativos al contrato didáctico, suponiendo previo su desarrollo.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-11337 “Modelización y representaciones en educación matemática” del Plan Nacional de Investigación, desarrollo e Innovación 2010-2012 del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

- Booth, L. R (1982). Ordering your operations. *Mathematics in School*, 11(3), 5-6.
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), 99-110.
- Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.
- Hoch, M. (2003). Structure sense. En M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education* (CD). Bellaria, Italia: ERME.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th*

Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas

- Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 49-56). Bergen, Norway: Bergen University College.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2005). Students' difficulties with applying a familiar formula in an unfamiliar context. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 145-152). Melbourne, Australia: University of Melbourne.
- Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 305-312). Prague, Czech Republic: Faculty of Education, Charles University in Prague.
- Kieran, C. (2007). Learning and Teaching algebra at the Middle School through College Levels: Building Meaning for Symbols and Their Manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 707- 762). NCTM.
- Linchevski, L. y Livneh, D. (1999) Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40(2), 173-196.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006). Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *Boletín Oficial del Estado (BOE)*, 5, 677-773.
- NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de Problemas de Matemáticas en las pruebas de acceso a la Universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI*, 28(1), 317-342.
- Novotná, J., y Hoch, M. (2008). How Structure Sense for algebraic Expression or Equations is related to Structure Sense for Abstract Algebra. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 93-104.
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), 61-74.
- Steinberg, R.M., Sleeman, D.H. y Ktorza, D. (1990). Algebra Students' Knowledge of equivalence of equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22(2), 112-121.
- Trujillo, P.A., Castro, E. y Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 511-521). Santander: SEIEM.
- Vega-Castro, D., Castro, E. y Molina, M. (2010). Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables. *Presentado en el XIV simposio de la SEIEM dentro del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico*. Lérída, 7 al 10 de Septiembre de 2010.

Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E.

Wagner, S., Rachlin, S.L. y Jensen, R.J. (1984). *Algebra learning project: Final report*.
Athens: Department of Mathematics, University of Georgia.