

# Juegos Matemáticos

## La Torre de Hanói y los $Q_n$ Grafos

M<sup>a</sup> Milagros Latasa Asso

Revista de Investigación



ISSN 2174-0410

1 de octubre de 2011

### Resumen

La Torre de Hanói es uno de los hallazgos matemáticos más ingeniosos de la matemática recreativa. Gracias a una leyenda con tinte oriental hoy se conoce de modo universal. Se describen en este artículo las relaciones entre las soluciones del rompecabezas y los ciclos hamiltonianos en los grafos  $Q_n$ .

**Palabras Clave:** Grafo, Juegos, Hanói

## 1. La leyenda

El matemático francés Édouard Lucas d'Amiens con el pseudónimo de profesor N. Claus de Siam (anagrama de *Lucas d'Amiens*), mandarín del Colegio de Li-Sou-Stian (una nueva permutación de letras, esta vez de las de las palabras *Saint Louis*), ideó y dio a conocer este problema en 1883. Se comercializó como un juego con el nombre de "*La Torre de Hanói*".

El material del rompecabezas lo forman tres pivotes sujetos en una base horizontal y un cierto número de discos de distintos diámetros que se colocan en uno de los pivotes extremos. En la parte baja se coloca el de mayor diámetro y encima los de diámetros menores en orden decreciente.

El objetivo del juego consiste en pasar los discos de un extremo al otro siguiendo unas precisas normas que son:

- En cada movimiento solo puede moverse un disco.
- El número de movimientos debe ser el menor posible
- No se puede colocar nunca un disco sobre otro de menor diámetro.

La Torre de Hanói tuvo desde su comienzo un gran éxito y se dio a conocer con una leyenda que perfeccionó el escritor Henri de Parville al año siguiente:

*“En el gran templo de Benarés, debajo de la cúpula que marca el centro del mundo, yace una base de bronce, en donde se encuentran acomodadas 3 agujas de diamante, cada una del grueso del cuerpo de una abeja y de una altura de 50 cm aproximadamente. En una de estas agujas, Dios, en el momento de la creación, colocó 64 discos de oro, el mayor sobre el plato de bronce y el resto, de menor tamaño, conforme se llega a la cima. Día y noche, incesantemente, los sacerdotes del templo mueven los discos de una aguja a otra de acuerdo con las leyes impuestas e inmutables de Brahma, que requieren que los sacerdotes se encuentren todo el tiempo laborando, no muevan más de un disco a la vez y que deben colocar el disco en alguna de las agujas de modo que no cubra a un disco de radio menor. Cuando los 64 discos hayan sido transferidos de la aguja en la que Dios colocó los discos, en el momento de la creación, a la otra aguja, el templo y los brahmanes se convertirán en polvo y junto con ellos el mundo desaparecerá.”*

**Texto original de Henri de Parville (de 1884)**

Este final nos invita a averiguar el número de movimientos que han de realizar los monjes de Benarés para cumplir con el mandato de Brahma. Tal vez el fin del mundo esté próximo.



Figura 1: Portada original

Fuente: [www.cs.wm.edu/~pkstoc/toh.html](http://www.cs.wm.edu/~pkstoc/toh.html)

## 2. Pasarán millones de años

Para resolver el problema de la torre de Hanói con  $n+1$  discos, primero se trasladan los  $n$  discos de menor diámetro al poste central. Se necesitarán para ello  $x$  movimientos. A continuación se mueve el disco de mayor diámetro al tercer poste, y finalmente los  $n$  discos menores encima del mayor. En total serán precisos  $2x+1$  movimientos.

Para un disco se necesitarán  $2^1-1$  movimientos.

Para dos discos  $2 \cdot (2^1 - 1) + 1 = 2^2 - 1$  movimientos.

...

Para  $n$  discos el número de movimientos será:  $2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$

Luego, para  $n = 64$ , el número de movimientos necesario para resolver el puzzle es

$$2^{64} - 1 = 18.446.744.073.709.551.615$$

Si los sacerdotes del templo de Benarés fuesen capaces de mover un disco cada segundo, sería necesario algo más de medio billón de años para trasladar la torre de Hanói de un extremo a otro.

## 3. Los $Q_n$ grafos

Consideremos el subconjunto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  definido por:

$$V = \{A = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n / a_i = 0 \text{ ó } 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

Claramente  $\#V = VR_{2,n} = 2^n$

Diremos que  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  y  $B = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in V$  son *adyacentes* si

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i \right| = 1.$$

Llamaremos *n-cubo* y lo representaremos por  $Q_n$  al grafo  $(V, E)$  dónde  $V$  está formado por las  $n$ -uplas arriba descritas y

$$E = \{AB / A, B \in V \text{ A y B son adyacentes}\}$$

Todos los vértices tienen el mismo grado  $n$  ya que hay  $n$  formas distintas de variar una posición en una  $n$ -upla. Se deduce entonces que  $Q_n$  es un grafo regular de orden  $n$ .

Una simple operación nos permite calcular el número de aristas:

$$\sum_{v \in V} \text{grado}(v) = \sum_{j=1}^{2^n} n = n 2^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \# E = n 2^{n-1}$$

En la Figura 2 se puede apreciar una representación de  $Q_1, Q_2, Q_3$  y  $Q_4$

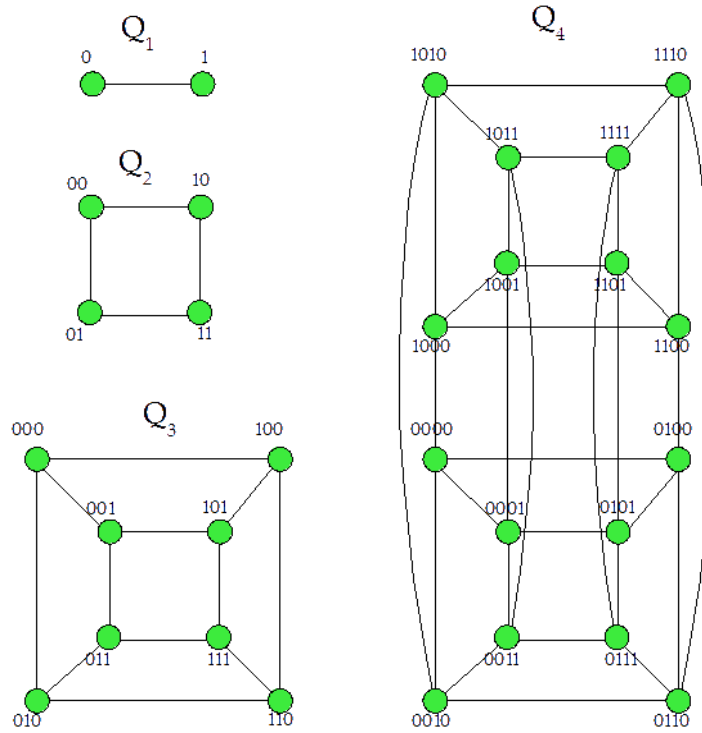
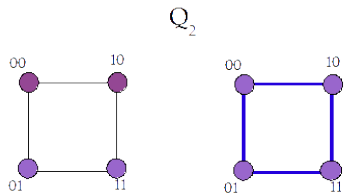


Figura 2. Representación de  $Q_1, Q_2, Q_3$  y  $Q_4$

#### 4. Los $Q_n$ grafos son hamiltonianos ( $n \geq 2$ )

Razonamos por inducción sobre  $n$ :

Para  $n=2$  es clara la existencia de un ciclo hamiltoniano



$\Rightarrow Q_2$  es hamiltoniano.

Supongamos que  $Q_k$  es hamiltoniano, veamos que lo es  $Q_{k+1}$ :

Sean los dos subgrafos de  $Q_{k+1}$  :  $G^1 = (V_{k+1}^1, E_{k+1}^1)$  y  $G^2 = (V_{k+1}^2, E_{k+1}^2)$  donde:

$$V_{k+1}^1 = \{(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) / a_{k+1} = 0, a_i = 0 \text{ ó } 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k\}$$

$$V_{k+1}^2 = \{(a_1, a_2, \dots, a_{k+1}) / a_{k+1} = 0, a_i = 0 \text{ ó } 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, k\}$$

$$E_{k+1}^1 = \{ \overline{AB} \text{ eje de } Q_{k+1} / A, B \in V_{k+1}^1 \}$$

$$E_{k+1}^2 = \{ \overline{AB} \text{ eje de } Q_{k+1} / A, B \in V_{k+1}^2 \}$$

Demostraremos ahora que  $G^1$  y  $G^2$  son isomorfos a  $Q_k = (V_k, E_k)$ . Para ello definimos las aplicaciones  $f: V_k \rightarrow V_{k+1}^1$   $g: V_k \rightarrow V_{k+1}^2$  de modo que

Si  $A = (a_1, a_2, \dots, a_k) \in V_k$  cualquiera

$$f(A) = f((a_1, a_2, \dots, a_k)) = (a_1, a_2, \dots, a_k, 0)$$

$$g(A) = g((a_1, a_2, \dots, a_k)) = (a_1, a_2, \dots, a_k, 1)$$

- Tanto  $f$  como  $g$  son aplicaciones biyectivas:

Desde luego  $f$  está bien definida.

$$\begin{aligned} f((a_1, a_2, \dots, a_k)) = f((b_1, b_2, \dots, b_k)) &\Rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_k, 0) = (b_1, b_2, \dots, b_k, 0) \Rightarrow \\ \Rightarrow a_i = b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k &\Rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_k) = (b_1, b_2, \dots, b_k) \Rightarrow \underline{f \text{ inyectiva}} \end{aligned}$$

Por otra parte, dado  $(a_1, a_2, \dots, a_k, 0) \in V_{k+1}^1$  ,  $\exists (a_1, a_2, \dots, a_k) \in V_k /$

$$f((a_1, a_2, \dots, a_k)) = (a_1, a_2, \dots, a_k, 0) \Rightarrow \underline{f \text{ sobre.}}$$

- Veremos ahora que  $f$  es un isomorfismo de grafos. En efecto:

$$(a_1, a_2, \dots, a_k) \text{ y } (b_1, b_2, \dots, b_k) \text{ adyacentes en } Q_k \Leftrightarrow \left| \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=1}^k b_i \right| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(a_1 + a_2 + \dots + a_k + 0) - (b_1 + b_2 + \dots + b_k + 0)| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_1, a_2, \dots, a_k, 0) \text{ y } (b_1, b_2, \dots, b_k, 0) \text{ son adyacentes en } G_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f((a_1, a_2, \dots, a_k)) \text{ y } f((b_1, b_2, \dots, b_k)) \text{ son adyacentes en } G_1 .$$

De forma análoga se probaría que  $g$  es un isomorfismo de grafos.

$Q_k$  es hamiltoniano  $\Rightarrow \exists \sigma$  permutación del conjunto  $\{1, 2, \dots, 2^k\} /$

$A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(2^k)}$  es una ordenación de los vértices de  $V_k$  que define un

ciclo hamiltoniano en  $Q_k : A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \dots, A_{\sigma(2^k)}, A_{\sigma(1)}$

- $f$  isomorfismo de grafos  $\Rightarrow f(A_{\sigma(1)}), f(A_{\sigma(2)}), \dots, f(A_{\sigma(2^k)}), f(A_{\sigma(1)})$  ciclo hamiltoniano en  $V_{k+1}^1$ .
- $g$  isomorfismo de grafos  $\Rightarrow g(A_{\sigma(1)}), g(A_{\sigma(2)}), \dots, g(A_{\sigma(2^k)}), g(A_{\sigma(1)})$  ciclo hamiltoniano en  $V_{k+1}^2$ .

Observemos que  $\{f(A_{\sigma(1)}), f(A_{\sigma(2)}), \dots, f(A_{\sigma(2^k)}), g(A_{\sigma(1)}), g(A_{\sigma(2)}), \dots, g(A_{\sigma(2^k)})\}$  es el conjunto de vértices  $V_{k+1}$  ya que  $V_{k+1} = V_{k+1}^1 \cup V_{k+1}^2$

Sea  $A_{\sigma(j)} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj})$  para cada  $j \in \{1, 2, \dots, 2^k\} \Rightarrow \forall j \in \{1, 2, \dots, 2^k\}$

$f(A_{\sigma(j)}) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj}, 0)$  y  $g(A_{\sigma(j)}) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{kj}, 1)$  adyacentes  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  las parejas  $f(A_{\sigma(1)}), g(A_{\sigma(1)})$  y  $f(A_{\sigma(2^k)}), g(A_{\sigma(2^k)})$  son adyacentes  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$  ejes en  $Q_{k+1}$  que unen los vértices  $f(A_{\sigma(1)}), g(A_{\sigma(1)})$  así como  $f(A_{\sigma(2^k)}), g(A_{\sigma(2^k)})$ .

El ciclo definido por

$f(A_{\sigma(1)}), f(A_{\sigma(2)}), \dots, f(A_{\sigma(2^k)}), g(A_{\sigma(2^k)}), g(A_{\sigma(1)}), \dots, g(A_{\sigma(2)}), g(A_{\sigma(1)}), f(A_{\sigma(1)})$

es hamiltoniano  $\Rightarrow Q_{k+1}$  es hamiltoniano.

Luego  $Q_n$  es hamiltoniano  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

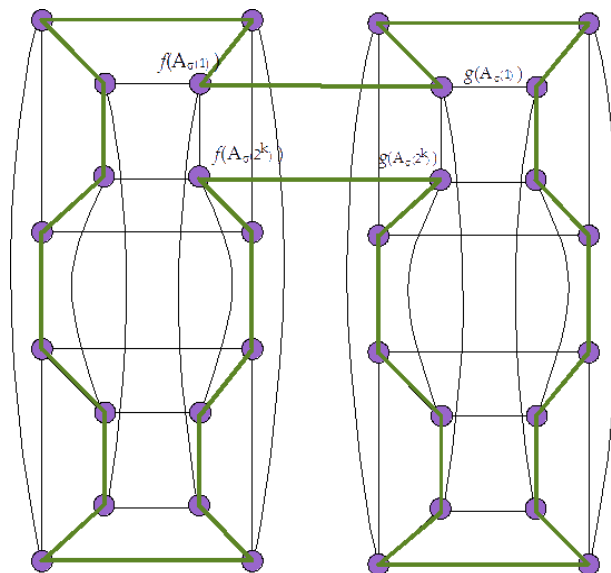


Figura 3. Ejes en  $Q_{k+1}$  que unen las parejas de vértices  $f(A_{\sigma(1)}), g(A_{\sigma(1)})$  y  $f(A_{\sigma(2^k)}), g(A_{\sigma(2^k)})$ .

### 5. La solución de la Torre de Hanói y los $Q_n$ grafos

Partimos de una torre de Hanói con  $n$  discos que se numeran  $1, 2, \dots, n$  desde el más pequeño al de mayor tamaño. Cada estado en la resolución del juego se identifica con una  $n$ -upla  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  donde  $a_i = 0, 1$  dependiendo de la clase de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  a la que pertenezca el  $n^o$  de movimientos del disco  $i$ ésimo. Un movimiento del disco  $i$ ésimo se identifica con el paso de  $(a_1, a_2, \dots, 0, \dots, a_n)$  a  $(a_1, a_2, \dots, 1, \dots, a_n)$  o viceversa.

La sucesión de  $n$ -uplas que aparece en la resolución del problema, define un ciclo hamiltoniano en  $Q_n$ . Recíprocamente: existe un ciclo hamiltoniano en  $Q_n$  que nos lleva a la solución del rompecabezas.

Para  $n = 2$ :

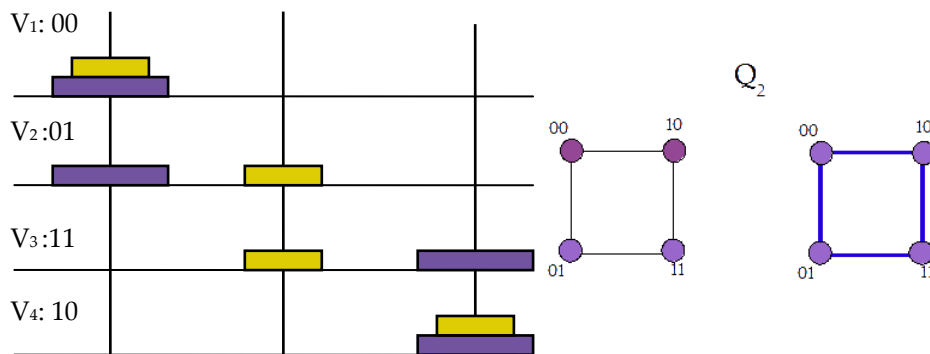


Figura 4. Solución del puzzle con dos discos y ciclo en  $Q_2$

Para  $n = 3$

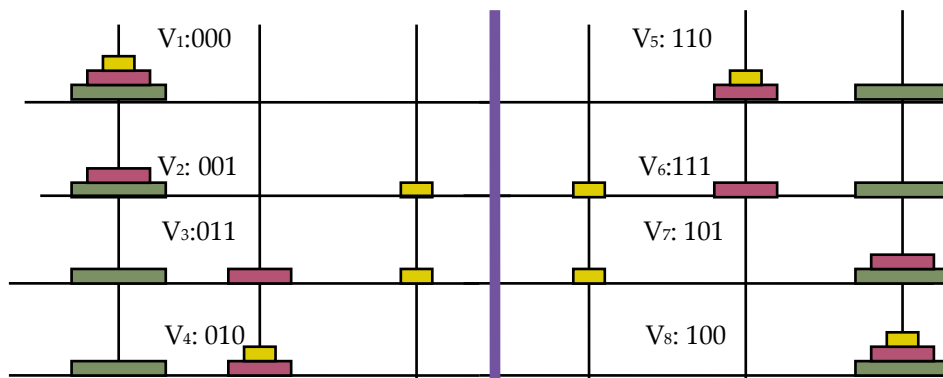
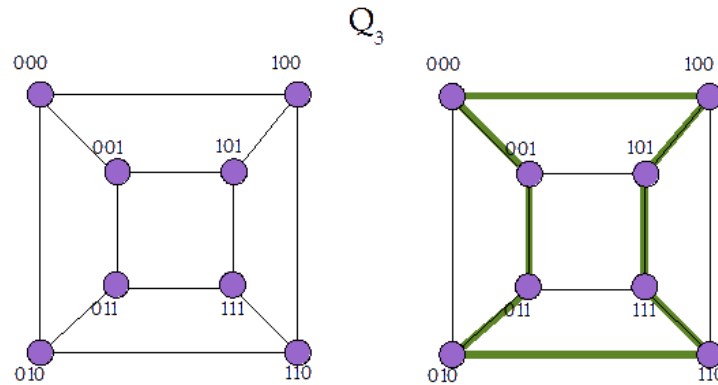


Figura 5. Solución de la Torre de Hanói con tres discos

La solución del puzzle descrita en la *Figura 5* define el siguiente ciclo hamiltoniano en  $Q_3$ .



*Figura 6. Ciclo descrito en  $Q_3$  por la solución de la Torre de Hanói.*

Se invita al lector a buscar los ciclos hamiltonianos en  $Q_4$  y  $Q_5$  que determinan las soluciones del rompecabezas de la torre de Hanói para cuatro y cinco discos.

[Solución  \$Q\_4\$](#)

[Solución  \$Q\_5\$](#)

## Referencias

- [1] CHARTRAND, Gary. *Introductory Graph Theory*, pp 134, 135, 136, 137, Dover Publications, Mineola, New York 1985
- [2] AZNAR ENRIQUE, R. *Biografías de matemáticos*.  
<http://www.ugr.es/~eaznar/lucas.htm>
- [3] STOCKMEYER, Paul K. *The Tower of Hanoi*  
<http://www.cs.wm.edu/~pkstoc/>
- [4] KOLAR, M. *The shortest and "mysterious" TH algorithm*  
<http://hanoitower.mkolar.org/shortestTHalgo.html>
- [5] BALBUENA CASTELLANO, Luis. *Las Torres de Hanói y el mandato de Brahma*, pp. 83 - 94, N<sup>o</sup> 28 revista SIGMA. , Universidad del País Vasco, Mayo 2006.