APLICACIÓN DE UN MODELO MARKOVIANO A UN PLAN DE PREVISIÓN SOCIAL EN SALUD

Evaristo Diz Cruz

Presidente de *EDiz Actuarial Services and Consulting.*

Director Académico del Diplomado de Riesgo Actuarial y Financiero.

Universidad Católica Andrés Bello. Caracas. Venezuela.

1. Resumen

Desarrollo de un modelo de estadística actuarial aplicado a un plan de beneficios médicos para la determinación del fondo de inicio o constitución de la reserva matemática de la contingencia.

Palabras Clave

Beneficios de previsión social en salud, Cadenas de Markov, Reserva matemática, Flujos de caja aleatorios, Matemática de las contingencias, Estadística actuarial.

2. Objetivo

Determinar la obligación o reserva matemática de un coste contingente asociado a la enfermedad de un grupo o colectivo desde su nacimiento hasta un período posterior previamente fijado, bajo el concepto de población cerrada.

3. Descripción del modelo

El modelo, con fines pedagógicos y de fácil implementación en *Java Script,* está hecho con la finalidad de que pueda ser utilizado en la determinación del coste de una contingencia, tal y como es la enfermedad de cualquier tipo, a lo largo de la evolución de un colectivo -todos de la misma edad- desde un tiempo inicial t=0 hasta un tiempo o edad final t=20, t=50, t=100 períodos a futuro. Obviamente estos períodos pueden ser días, meses, años, etc.

Es un modelo sencillo que incorpora tres estados posibles {enfermo, sano y muerto}. La idea es determinar, para un colectivo cualquiera, de qué tamaño debería ser el fondo inicial para garantizar el pago de las obligaciones que se causan al ocurrir en este caso sólo la contingencia de enfermedad; se parte del principio de que la muerte se pagaría a través de un seguro de vida y sólo se modela la morbilidad asociada al número de casos que enferman, partiendo del estado:

Sano	→	*Enfermo*
Sano	→	*Sano*
Enfermo	→	*Enfermo*
Enfermo	→	*Sano*

Es claro y obvio que los otros estados remanentes: *enfermo → muerte, sano → muerte* degeneran en un estado absorbente del cual una vez dentro no hay regreso al estado inmediatamente anterior.

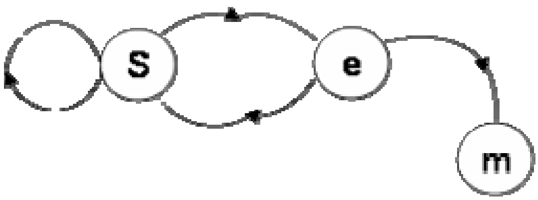
El objetivo central es ir evaluando la evolución del número de casos sanos, enfermos y muertos en el transcurso de 20, 50 ó 100 períodos, en particular a partir del período o año inicial *t*=0; al mismo tiempo, determinar en el horizonte antes descrito el *coste anual* y el correspondiente *flujo de caja aleatorio* dada una tasa de interés previamente fijada. Lo anterior permitiría pagar de manera oportuna las obligaciones de los distintos grupos de enfermos a medida que ellos ocurran. El modelo se resume como sigue:

a.) Horizonte de tiempo a modelar: 20 años.

b.) Espacio de Estados: {s,e,m}

s: Sano
e: Enfermo
m: Muerto

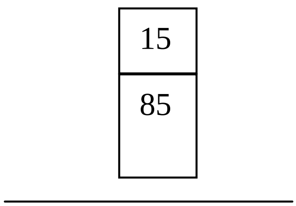
Grafo Markoviano



c.) Tamaño inicial del colectivo: 100 individuos

d.) Vector de condiciones iniciales: $\vec{V}_0$: (85, 15, 0)

Sanos:	85
Enfermos:	15
Muertos:	0
Total:	100



e.) Probabilidades de transición desde el estado sano:

80% (s→s)

20% (s→e)

$P=f_{(x)}$ (e→m)

Descripción:
Probabilidades fijas en el tiempo para los dos primeros grupos
Probabilidades variables como una función de la edad para la transición e → m

siendo *x:* edades / tiempos de modelación futuro para:

$$x \in I;\ I = \{0,1,........20\},\ I = \{0,1,.......50\}\ ,\ I = \{0,1,.......100\}$$

Se asume una probabilidad de muerte estimada para un grupo en particular dada por:

$$P_m = (1.0035)^x - 1$$

la cual sigue un modelo básico de mortalidad potencial, derivado de la tasa equivalente calculada como:

$$(1+P_m) = (1 + 0.35\%)^x \quad \forall x \in I$$

En el caso más simple se asume constante *r* = 0.35% la tasa de mortalidad por período; en otros modelos eventualmente mas complejos *r* podría ser también una función del tiempo y eventualmente aleatoria bajo ciertas condiciones, como por ejemplo cuando se trata de densidades de mortalidad bayesianas, en donde alguno o todos los parámetros de la distribución son a su vez variables aleatorias.

f.) Hipótesis y supuestos:

- Se asume una tasa de interés fija y constante por año/edad modelada igual al 10%[(1)].

- El 80% de los individuos sanos tienden a permanecer en ese estado y el resto migra al estado *enfermo*. Esto viene de la experiencia estadística de un estudio previo de consultoría centrado en el interior del país venezolano (concretamente Valencia, Barquisimeto y Maracaibo) para una población de referencia de casi 4.000 expuestos.

- Los enfermos a su vez van al estado *muerte* a través de un generador de probabilidades por edad o regresan al estado *sano* con una determinada probabilidad complementaria.

- El vector inicial se obtiene de la muestra que se utiliza en la modelación de 100 individuos (80 sanos y 15 enfermos).

- El coste/contribución asociado a los individuos sanos: 500 unidades monetarias. Este monto es el valor de mercado de una cobertura similar y es pagado en su totalidad por la empresa.

[(1)] Generalmente se toman dos (02) o tres (03) puntos porcentuales inferior al rendimiento de los bonos de la Deuda Pública Venezolana de largo plazo, con rendimientos de trece por ciento (13%) anual en veintisiete (27) años. Es casi normativa la utilización de esta tasa.

- El coste/contribución asociado a los individuos enfermos: 4.000 unidades monetarias.

- La tasa de mortalidad *r* = 0.35%, que genera la mortalidad es un supuesto del modelo. Esta tasa se obtuvo de un estudio previo[(2)] y la bondad del ajuste para 0.35% fue del orden del 98% en base al coeficiente $R^{2.}$. Para otras poblaciones deberían hacerse los ajustes pertinentes del caso, a menos que las características de la población puedan ser consideradas estadísticamente similares.

4 Código de *JavaScript*

Java Script es un código bastante versátil y relativamente fácil de aprender que permite la creación de árboles markovianos de una manera relativamente fácil. Apenas con un diseño tan elemental como el que sigue se puede hacer una modelación markoviana relativamente compleja, con varios estados, en nuestro caso 3, pero es fácilmente extensible a 10 – 20 estados distintos y 1000 iteraciones o fases futuras. Lo verdaderamente importante es la sencillez de la programación y su efectividad:

- *valor presente estocastico:=npv(10%,flujo de caja aleatorio)*

[(2)] Esa tasa de mortalidad, está también referida a la población anteriormente mencionada de las ciudades de Valencia, Barquisimeto y Maracaibo, con la cobertura expuesta.

- *flujo de caja aleatorio:=(clear,makelist((reset,reserva matematica),n,0,100))*
- *reserva matematica:=(markov,sano*500+enfermo*4000)*
- *markov:=mkv(85,sano,15,enfermo,0,muerto)*
- *sano:=mkv(80%,sano,20%,enfermo)*
- *enfermo:=mkv(1-probabilidad muerte,sano,probabilidad muerte,muerte)*
- *sano:=mkv(80%,sano,20%,enfermo)*
- *enfermo:=mkv(1-probabilidad muerte,sano,probabilidad muerte,muerte)*
- *sano:=mkv(80%,sano,20%,enfermo)*
- *enfermo:=mkv(1-probabilidad muerte,sano,probabilidad muerte,muerte*
- *muerto:=0%*
- *sano:=mkv(80%,sano,20%,enfermo)*
- *enfermo:=mkv(1-probabilidad muerte,sano,probabilidad muerte,muerte)*

5. Árbol de modelación markoviana

El código anterior permite generar automáticamente el árbol markoviano, el cual describe toda la lógica subyacente basada en la estructura (grafo) de Markov y todas las hipótesis y supuestos utilizados. Es importante destacar que con pequeñas modificaciones se pueden obtener resultados de modelos mucho más complejos, e igualmente aumentar el número de los posibles estados en variados problemas donde el tema de las transiciones en el tiempo es crucial. Un ejemplo de esto último es la determinación del coste de la mayoría de los planes de beneficio al personal de una empresa. Ver figura ampliada del árbol de modelación al final del apéndice 1.

6. Resultados

El modelo arroja como resultado cuatro tipos de *outputs* o aspectos:

a. La tabla de evolución de los estados o la sucesión de los vectores del espacio de estado $\vec{V}_i$ para todo i = 0-20, 0-50, 0-100.

b. El gráfico de la evolución de los componentes de cada uno de los estados dentro del horizonte de tiempo.

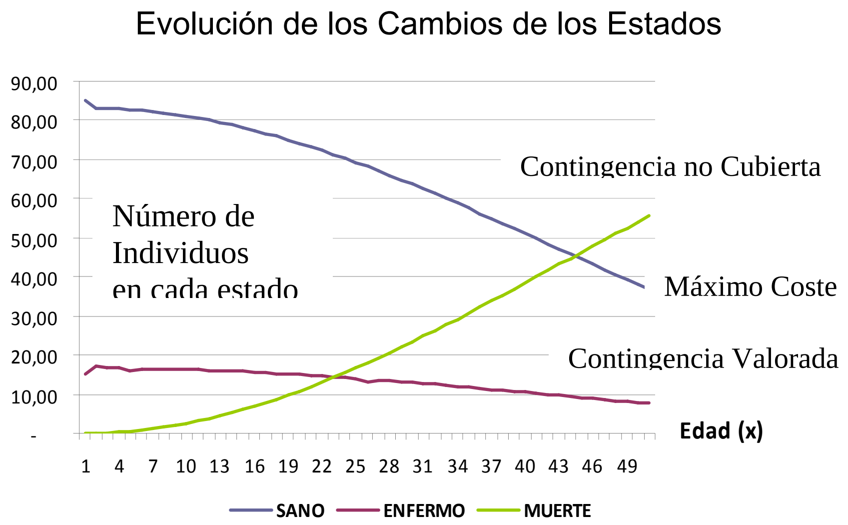
c. El coste anual asociado a cada vector del espacio de los estados posibles.

d. El flujo de caja aleatorio actualizado y convertido a valor presente por una tasa de descuento en este caso constante, pero que también pudiera ser variable en función del tiempo y eventualmente hasta aleatoria.

A título sólo ilustrativo se muestran a continuación los resultados del coste del plan partiendo de la serie de supuestos básicos antes descritos que permiten modelar vía Markov los flujos aleatorios y la obligación cómo un valor presente neto en cada etapa o tiempo de avance del modelo de simulación.

Resultados de la Predicción por Período (año)

X	PROYECCION DEL COSTO ANUAL	SANO	ENFERMO	MUERTE	PROBABILIDAD DE MUERTE EN X	FLUJO DE CAJA A VALOR PRESENTE	VALOR PRESENTE ACUM.
0	102.500,00	85,00	15,00	-		102.500,00	102.500,00
1	109.473,00	82,95	17,00	0,05	0,0100	99.520,91	202.020,91
2	107.977,40	83,24	16,59	0,17	0,0100	89.237,52	291.258,43
3	108.093,90	83,01	16,65	0,35	0,0100	81.212,55	372.470,98
4	107.813,61	82,82	16,00	0,58	0,0100	73.638,15	446.109,12
5	**107.535,95**	**82,56**	**16,56**	**0,87**	**0,0200**	**66.771,36**	**512.880,49**
6	107.181,99	82,26	16,51	1,22	0,0200	60.501,44	573.381,93
7	106.767,65	81,91	16,45	1,63	0,0200	54.788,69	628.170,61
8	106.290,28	81,52	16,38	2,10	0,0300	49.585,20	677.755,81
9	105.750,99	81,07	16,30	2,62	0,0300	44.848,74	722.604,56
10	**105.150,33**	**80,58**	**16,21**	**3,20**	**0,0400**	**40.540,00**	**763.144,56**
11	104.489,05	80,05	16,12	3,84	0,0400	36.622,77	799.767,33
12	103.768,02	79,46	16,01	4,53	0,0400	33.063,69	832.831,02
13	102.988,21	78,84	15,89	5,27	0,0500	29.832,02	862.663,04
14	102.150,69	78,16	15,77	6,07	0,0500	26.899,47	889.562,51
15	**101.256,65**	**77,45**	**15,63**	**6,92**	**0,0500**	**24.240,04**	**913.802,55**
16	100.307,36	76,69	15,49	7,82	0,0600	21.829,80	935.632,35
17	99.304,22	75,90	15,34	8,76	0,0600	19.646,81	955.279,16
18	98.248,68	75,06	15,18	9,76	0,0600	17.670,89	972.950,05
19	97.142,35	74,19	15,01	10,80	0,0700	15.883,55	988.833,60
20	**95.986,84**	**73,28**	**14,84**	**11,89**	**0,0700**	**14.267,83**	**1.003.101,43**
21	94.783,92	72,33	14,66	13,02	0,0800	12.808,21	1.015.909,64
22	93.535,40	71,35	14,47	14,19	0,0800	11.490,45	1.027.400,08
23	92.243,18	70,33	14,27	15,40	0,0800	10.301,55	1.037.701,63
24	90.909,22	69,29	14,07	16,65	0,0900	9.229,61	1.046.931,25
25	**89.535,55**	**68,21**	**13,21**	**17,93**	**0,0900**	**8.263,77**	**1.055.195,02**
26	88.124,27	67,11	13,64	19,25	0,1000	7.394,11	1.062.589,13
27	86.677,50	65,98	13,42	20,60	0,1000	6.611,56	1.069.200,68
28	85.197,45	64,83	13,20	21,98	0,1000	5.907,88	1.075.108,56
29	83.686,36	63,65	12,97	23,38	0,1100	5.275,54	1.080.384,10
30	**82.146,48**	**62,45**	**12,73**	**24,82**	**0,1100**	**4.707,70**	**1.085.091,80**
31	80.580,13	61,24	12,49	26,27	0,1100	4.198,12	1.089.289,91
32	78.989,63	60,00	12,25	27,75	0,1200	3.741,14	1.093.031,06
33	77.377,33	58,75	12,00	29,25	0,1200	3.331,62	1.096.362,67
34	75.745,59	57,49	11,75	30,76	0,1300	2.964,87	1.099.327,55
35	**74.096,77**	**56,21**	**11,50**	**32,29**	**0,1300**	**2.636,67**	**1.101.964,21**
36	72.433,24	54,93	11,24	33,83	0,1300	2.343,16	1.104.307,37
37	70.757,36	53,63	10,99	35,38	0,1400	2.080,86	1.106.388,23
38	69.071,47	52,33	10,73	36,94	0,1400	1.846,62	1.108.234,84
39	67.377,92	51,03	10,47	38,51	0,1500	1.637,58	1.109.872,42
40	**65.679,00**	**49,72**	**10,21**	**40,08**	**0,1500**	**1.451,17**	**1.111.323,60**
41	63.977,01	48,41	9,94	41,65	0,1500	1.285,06	1.112.608,66
42	62.274,18	47,10	9,68	43,22	0,1600	1.137,14	1.113.745,80
43	60.572,73	45,79	9,42	44,79	0,1600	1.005,52	1.114.751,32
44	58.874,81	44,49	9,16	46,36	0,1700	888,49	1.115.639,81
45	**57.182,54**	**43,19**	**8,90**	**47,92**	**0,1700**	**784,50**	**1.116.424,31**
46	55.497,98	41,90	8,64	49,47	0,1700	692,17	1.117.116,48
47	53.823,13	40,61	8,38	51,01	0,1800	610,26	1.117.726,74
48	52.159,93	39,34	8,12	52,54	0,1800	537,64	1.118.264,38
49	50.510,25	38,08	7,87	54,05	0,1900	473,30	1.118.737,68
50	**48.875,90**	**36,83**	**7,62**	**55,56**	**0,1900**	**416,35**	**1.119.154,03**



El coste anual es una función del número de empleados o individuos que van quedando en cada estado futuro de edad o fase de simulación en base a los supuestos e hipótesis utilizados; el individuo sano paga un monto equivalente a 500 u.m. y el enfermo 4.000 u.m. Con el transcurrir del tiempo vemos cómo va disminuyendo el coste a medida que pasan más individuos de la condición de enfermo a muerto. En este plan en particular no se está reconociendo un beneficio por muerte pero incluirlo sería muy fácil: en el modelo, el coste iría creciendo a medida que ésta población crece. Por ejemplo, si suponemos que sólo en el año 14 se le pagaría a los fallecidos un capital de 5.000 u.m., el coste anual por este concepto sería:

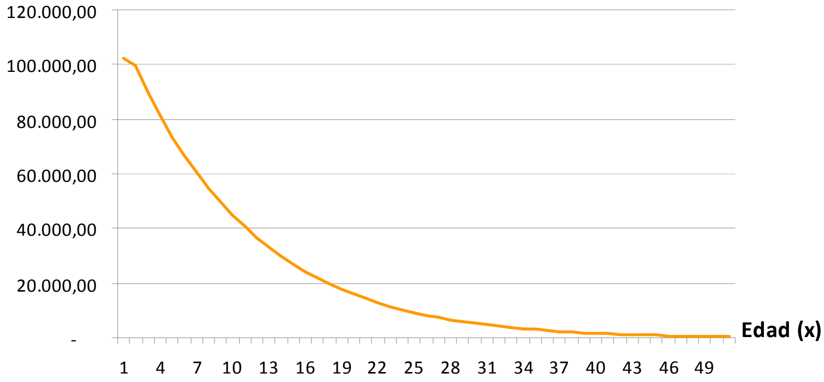
$$(5.000 \text{ u.m.}) \cdot (6.07) = 30.350 \text{ u.m.}$$

y su valor presente o actual

$$VP = \frac{30.350}{(1.10)^{14}} = 7.992,10 \text{ u.m}$$

Luego, deberíamos reservar hoy el monto anterior para pagar esa contingencia en el año 14, donde se estima que aproximadamente 6 individuos causarían el beneficio(3).

Flujo de Caja a Valor Presente

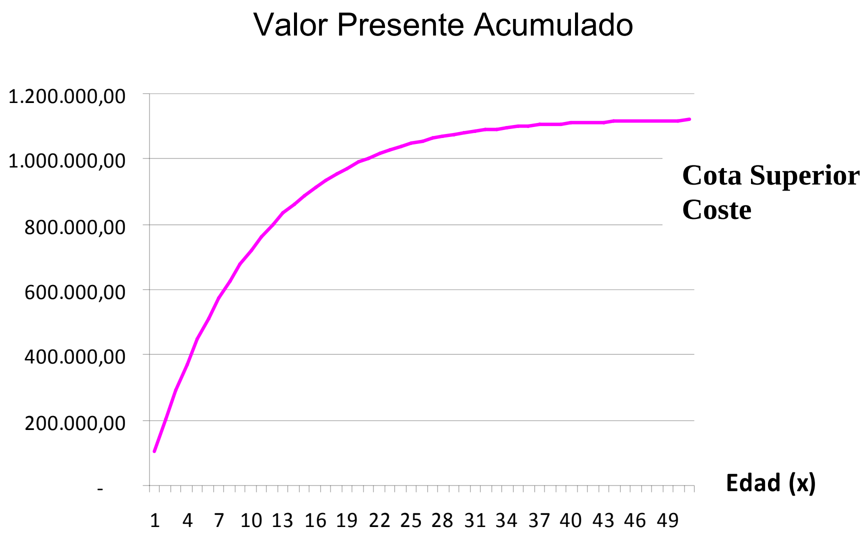


Estos valores, son los costes anuales ajustados por una tasa de interés, la cual descuenta el coste anual desde cada año futuro al tiempo *t* = 0, asumiendo una tasa de interés fija para descontar los costes.

---

(3) La razón de esto es que para mantenerse sano se incurre en un coste relativamente importante, distribuido de manera uniforme a lo largo de todo el período de predicción markoviana.

Para mantener el gasto del año 5, el fondo debe hacer una previsión de reserva matemática hoy del orden de 66.771,36 u.m. con el objeto de poder garantizar el pago de los beneficios a los individuos que ocupan o están en ese estado en ese momento. El valor presente a nivel del fondo para cubrir todos y cada uno de los años futuros hasta el quinto año, incluyendo el gasto asociado al año t = 0 es del orden de 512.880,49 u.m.



El valor presente acumulado representa el coste total o la suma de cada uno de los valores presentes asociados al coste anual de cada una de las distintas edades. El valor presente del fondo es casi 1.119.154,30 u.m. para atender a toda la población cubierta para el período de 100 años, condicionados a todos los movimientos poblacionales de los estados de acuerdo al modelo markoviano previamente definido. Probablemente 1.200.000,00 u.m. pudiera verse como una cota bastante holgada del compromiso y la probabilidad de que se exceda este límite es prácticamente despreciable.

La importancia de estos modelos en la gerencia moderna de riesgo, tanto actuarial como financiero, además de obvia es imperativa. Con un monto de 1.2 millones de u.m. como cota superior se estaría claramente abarcando toda la cobertura sin problema alguno. A efectos presupuestarios es fundamental conocer de antemano cuál es el monto inicial que deberíamos tener en el fondo para ir garantizando los pagos y no caer en insolvencias. Desde la perspectiva de la planificación financiera el poder hacer estos apartados con tiempos suficientes marca la gran diferencia entre recibir un servicio continuo, en este caso médico de alta calidad sin interrupciones por desconocimiento de los costes subyacentes de su implantación y el caer en una insolvencia donde los pagos definitivamente no se podrán realizar. Una de las maneras de tener un fondo solvente es, justamente, el desarrollo y profundización de este tipo de modelos.

Apéndice I. Formulación matemática del modelo markoviano

1. **Espacio de Estados**

$$\Omega = \{w_i | w_1 = s, w_2 = e, w_3 = m\}$$

2. **Variable de conteo** $X_{w_i}(t)$: Número de casos que están en el estado w_i en el tiempo t

3. **Vector de Estados** $\vec{V}_t$: $(x_{1,} x_2, x_3)$

$$\text{Con } x_1 = x_{w_1}^{(1)}$$
$$x_2 = x_{w_2}^{(2)}$$
$$x_3 = x_{w_3}^{(3)}$$

4. **Propiedad de vector probabilístico**: $\sum x_{w_j}(t) = 1 \ , \forall j$ en cada *t*

5. **Horizonte de tiempo de la predicción**:

$t \in Z$*;* sin embargo se pueden encontrar valores para $t+\Delta t \in R^{+}$ ajustando curvas a cada $x_{w_i}(t)$ del vector de estado.

6. **Población Cerrada**:

El grupo es constante todo el tiempo. No existen ni entradas ni salidas del mismo en el sentido de incorporación de nuevos individuos. Al contabilizar el grupo para cada uno de los distintos estudios, éste es constante. Se debe entender taxativamente de esta manera. Obviamente los muertos solo se toman en cuenta a efectos de la contabilización.

$$\sum x_{w_j}(t) = \sum x_{w_i}(t + \Delta t) \ , \quad \forall t \ \text{ y } \ \forall j$$

7. **Descripción de los estados**:

Sano: individuo del grupo cuyo coste médico asociado es menor o igual a 500 u.m./período (Mantener la salud).

Enfermo: individuo del grupo cuyo coste médico asociado es mayor a 500 u.m./período y menor o igual en nuestro ejemplo a 4.000 u.m./período. (Resolver problema de salud).

Muerto: alcanzado este estado no se paga el beneficio por enfermedad.

8. **Plan de Beneficios**: cobertura de gastos para sanos y enfermos por 500 u.m. y 4.000 u.m. / período respectivamente. Obviamente pueden haber otras estructuras de beneficios distintos, más complejos.

9. **Probabilidades de Transición**: probabilidades condicionales markovianas [4]

$$P_{(w_2|w_1)} = P_1 = K_1$$

$$P_{(w_1|w_1)} = P_2 = K_2$$

$$P_{(w_2|w_2)} = P_3 = K_3$$

$$P_{(w_3|w_2)} = f_{(t)} \neq K_4$$

$$P_{(w_2|w_3)} = 0$$

$$P_{(w_1|w_3)} = 0$$

[4] Se obtienen de estimaciones históricas de grupos similares. Esas probabilidades pueden ser constantes en el tiempo como es el caso de P_1 y P_2 ó variables como el caso $f_{(t)}$

$$P_{(w_1|w_2)} = 1 - f_{(t)}$$

Siendo $f_{(t)} = 1.0...^{t} - 1$

10. **Ecuación de costes**: es un valor esperado de

$$X_{w_i}(t) \text{ con } (C_{w_i}(t) = K)$$

Coste Anual: CA_t

$$CA_t = \sum X_{w_i}(t) \cdot C_{w_i}(t) \quad \forall w_i, \forall t$$

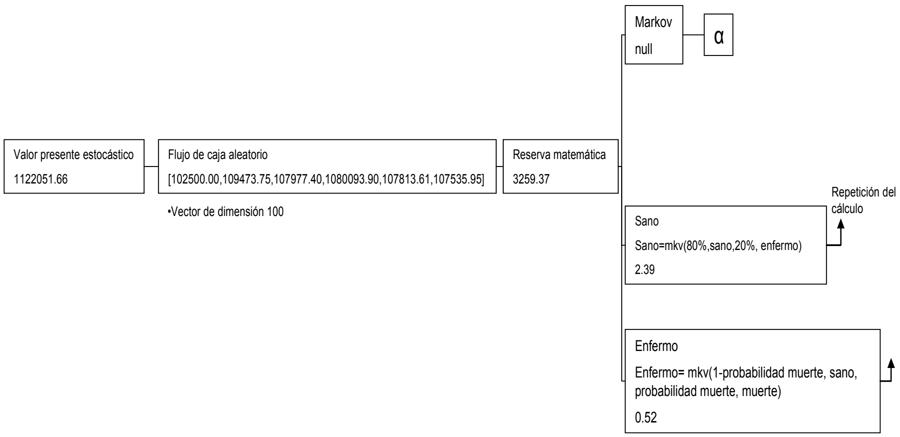
donde $C_{w_i}(t) = \begin{Bmatrix} K_1 = 500\, u.m & \forall t \\ K_2 = 4 \cdot K_1 & \end{Bmatrix}$

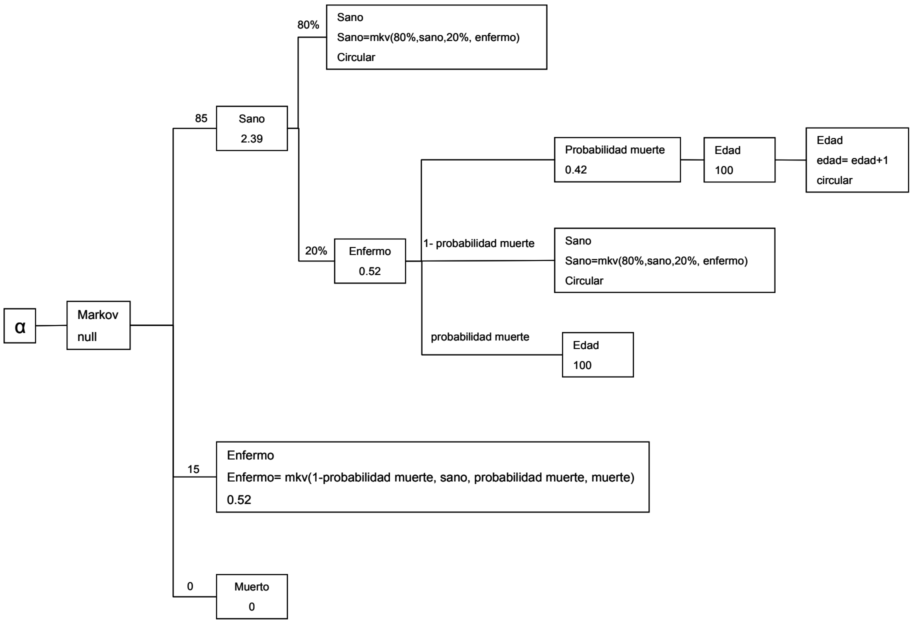
dado que $C_{w_i}(t)$ para un *i* dado es constante a lo largo de todo el horizonte de predicción y en particular $K_3 = 0$ en el caso de $C_{w_3}(t)\ \forall t$.

11. **Valor presente**: Es el valor actual de los pagos esperados o costes anuales para cada t ajustando por una tasa de interés

$$VP_{(0)} = \sum CA_t /(1+i)^t \forall t$$

12. **Árbol de modelación markoviana**





7. Bibliografía

[1] Bartholomew, D. J. (1973). *Stochastic Models for Social Process.* (2nd Edition=. London, John Wiley and Sons.

[2] Bower, N.L. et Al. (1970). *Actuarial Mathematics Society of Actuarial.* Chicago

[3] Buhlman, M. (1970). *Mathematical Models in Risk Theory.* Heidelberg: Springer-Verlag.

[4] Cox, D.R. y Miller, H.D. (1965). *The Theory of Stochastic Processes*. First Edition. London: Chapman & Hall

[5] Diz Cruz, E. (2004). *Introducción a la Teoría de Riesgo.* Bogotá: Global Ediciones.

[6] Dufresne, D. (1993). *Some Aspects of Financial Accounting Standards Nº 87.* February. Chicago

[7] Everitt, B. S. (1994). *A Handbook of Statistical Analyses using S-PLUS.* First Edition. London: Chapman & Hall

[8] Feller, W. (1957). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol 1. New York: Wiley

[9] Gerber, H. (1979). *An Introduction to Mathematical Risk Theory.* Huebner Foundation, Pennsylvania University of Pennsylvania.