

RIESGOS



PhD. Miguel Flores Ortega



M en C. Alexander Galicia Palacios

**VALUACIÓN ESTOCÁSTICA DE CONTRATOS DE
FUTUROS SOBRE IPC EN EL MERCADO MEXICANO DE
DERIVADOS**

PhD. Miguel Flores Ortega

Ingeniero Mecánico Electricista con Especialidad en Sistemas Eléctricos y Electrónicos (*IPN*) , Maestro en Administración de Empresas y Doctor en Ciencias Económicas (*IPN*). Miembro del Sistema nacional de Investigadores de CONACyT.

Con Educación continua en ITESM, Covey Leadership Center, UCLA, PARSEICA –ICE, Control Data de México, STAL-LAVAL, DESFI-UNAM . Su experiencia profesional la ha realizado en Fomento y Tecnología Industrial S.A. de C. V, Comisión Federal de Electricidad , en la academia ha sido Profesor Investigador en Universidad Nacional Autónoma de México, Universidad Anáhuac del Sur, Instituto Politécnico Nacional. Tiene publicaciones y capítulos de libro , con desarrollo de Recursos Humanos en el Posgrado de la Escuela Superior de Economía del IPN. Sus líneas de investigación son el Desarrollo Económico y sustentable con enfoque en la Economía de la Energía, Finanzas Bursátiles y de la Empresa, MIPyMES, Administración de Riesgos y Modelos de Inversión, la Economía de la vejez y los sistemas de Retiro y Pensiones.

M en C. Alexander Galicia Palacios

Licenciado en Economía y Maestro en Ciencias Económicas (*IPN*).

Su experiencias profesional ha sido como Asesor Técnico en la Comisión de Desarrollo Social de la Asamblea Legislativa del Distrito Federal, III Legislatura, Director de Censo y Estadística Municipal y Subdirector de Estadística y Administración Escolar.

Tiene presentación en Congresos y eventos académicos en el INEGI, Universidad Anáhuac del Sur, Consejo Nacional de Población del Distrito Federal, COLMEX, Escuela Superior de Comercio y Administración Unidad Tepepan y la Universidad Autónoma de Nayarit.

Fecha de Envío: 12 de Noviembre 2011.

Fecha de Aceptación: 29 de Diciembre de 2011.

CONTENIDO

- ❖ Introducción
- ❖ Modelo de un proceso estocástico
- ❖ Deducción del movimiento geométrico browniano
- ❖ Propiedades del movimiento geométrico browniano
 - Modelo del comportamiento estocástico browniano de los precios de un activo financiero.
 - Convergencia estocástica
 - Caminata aleatoria
- ❖ Modelo empírico para evaluar contratos de futuros del IPC serie junio 2011
 - Metodología estocástica para evaluar el comportamiento de los precios del IPC
- ❖ Descripción de datos
- ❖ Resultados
- ❖ Conclusiones

VALUACIÓN ESTOCÁSTICA DE CONTRATOS DE FUTUROS SOBRE IPC EN EL MERCADO MEXICANO DE DERIVADOS.

PhD. Miguel Flores Ortega³

M en C. Alexander Galicia Palacios⁴

Resumen.

Este trabajo evalúa empíricamente el comportamiento estocástico del precio de los contratos de futuros de IPC que se cotizan en el mercado de derivados en el segundo trimestre del año 2011; se asume que el proceso de difusión del precio se representa mediante el modelo del movimiento geométrico browniano y se hace la comparación con el proceso de caminata aleatoria, que se realiza durante la vida del contrato hasta llegar a la fecha de vencimiento. La evaluación se realiza por medio de un proceso de simulación de Monte Carlo que permite analizar todas las posibilidades del comportamiento de la evolución del valor del indicador del índice de precios y cotizaciones (IPC) y a partir de esta información se determina el precio de los contratos de futuros cuyo activo subyacente es el IPC, para efectos de cálculo se utiliza el rendimiento del índice y se lleva a una representación log-normal del valor del índice que es más realista porque no permiten valores inferiores a cero. La evidencia empírica permite comprobar que el modelo estocástico del movimiento geométrico browniano efectivamente es un buen predictor que modela el comportamiento del precio de los contratos de futuros durante su vida útil, que es antes de su fecha de vencimiento.

Palabras Clave: Contrato futuro, activo subyacente, índice de precios y cotizaciones, proceso estocástico, movimiento geométrico browniano, caminata aleatoria.

Abstrac.

This paper empirically evaluates the stochastic behavior of the price of futures contracts of IPC which are traded in the derivatives market in the second quarter of 2011; It is assumed that the process of dissemination of the price is represented by the model of the geometric Brownian motion and measured with the process of random walk, which occurs during the life of the contract up to the expiration date. The evaluation is carried out through a process of Monte Carlo simulation that allows to analyze all possibilities of the behavior of the evolution of the indicator of the index of prices and exchange rates (IPC) and based on this information determines the price of futures whose underlying asset is the IPC, for the purposes of calculating the performance of the index is used and is a log-normal representation of the value of the index that is more realistic because they do not permit values to zero. Empirical evidence shows that the stochastic model of the geometric Brownian motion is actually a good predictor that models the behavior of the price of futures contracts during its useful life, which is before its expiry date.

Keywords: Future contract, active index, underlying price and contract quotes, stochastic process, geometric Brownian motion, random walk.

Classification JEL: G1, G17.

³ Correo Electronico : miflores@ipn.mx

⁴ Correo Electronico : alex_finster@hotmail.com

1. Introducción

En el mundo real la dinámica del entorno económico se refleja en el índice representativo del mercado de valores; una forma de representarlo es por medio de un proceso estocástico que describa la difusión del valor del índice, por lo que en esta investigación se analiza la determinación de los parámetros del modelo geométrico browniano para representar el comportamiento del valor del índice, y determinar el precio de los contratos de futuros sobre el mismo, comparándolos con los registros históricos observados en el mercado mexicano de derivados (MexDer).

En este trabajo se presenta la prueba empírica del modelo estocástico de caminata aleatoria y se compara con el modelo del movimiento geométrico browniano, para lo cual se simula la evolución del valor del índice de precios y cotizaciones (IPC) y la determinación del precio de los contratos de futuros que lo utiliza como activo subyacente.

Se analiza el efecto del intervalo de tiempo de evaluación en el precio de los contratos de futuros, al compararlos con la difusión del valor del índice de precios y cotizaciones conforme se acerca la fecha de vencimiento de los contratos de futuros. Para la reproducción del comportamiento inicialmente se realiza un ajuste de los rendimientos para una representación log-normal del valor del índice donde no se permiten valores inferiores a cero.

Adicionalmente se utilizan los resultados de 53 simulaciones, para mostrar el comportamiento estocástico del valor del activo subyacente y corroborar la hipótesis de estudio, reportando relaciones de convergencia entre el precio futuro y el precio de mercado al aproximarse la fecha de vencimiento del contrato de futuros que se cotiza en el MexDer.

El trabajo se organiza en seis secciones; la primera introduce el problema, en la segunda sección se presenta el modelo que se utiliza para representar el proceso estocástico, en la tercera se presenta el desarrollo de un modelo empírico para evaluar contratos de futuros del IPC de la serie junio 2011, en la cuarta sección se presenta la información analizada y en la quinta sección se presentan los resultados obtenidos, y en la sexta sección se presentan las conclusiones de la investigación.

2. Modelo de un proceso estocástico

En ambiente de incertidumbre, si, $S(t)$ representa el valor resultante de invertir \$1 con interés compuesto y capitalización continua para una tasa constante μ durante el periodo $[0, t]$, entonces $S(t)$ es la solución del problema con un valor inicial $S(0)$, cuya ecuación diferencial ordinaria indica que el capital crece a una tasa constante e igual a μ , con un condición inicial que indica que la inversión al principio del siguiente intervalo es:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \mu S(t), S(0) = 1 \quad (1)$$

Cuando la inversión se realiza en un mercado bursátil, es más realista considerar que la tasa de crecimiento de la inversión contiene incertidumbre, y habitualmente se dice que es un proceso estocástico normal con media cero y varianza t , que se denomina movimiento browniano, y $S(t)$ corresponde a la derivada de la ecuación, que de acuerdo a la teoría tradicional, las trayectorias del proceso estocástico no son diferenciables en ningún punto.

Si $\dot{B}(t)$ es un proceso estocástico y estacionario llamado ruido blanco.

En este contexto, la diferencial dada en (1) se escribe en la forma:

$$\frac{dS(t)}{dt} = (\mu + \sigma \dot{B}(t)) S(t), \quad (2)$$

ó en su representación diferencial:

$$dS(t) = (\mu S(t)dt + \sigma S(t))dB(t) \quad (3)$$

Esta expresión es formal y se denomina ecuación diferencial estocástica. Cuando $\sigma = 0$, corresponde a un modelo determinista o sin incertidumbre, con una solución para la condición inicial $S(0) = 1$, que se expresa por:

$$S(t) = \exp(\mu t), \quad (4)$$

pero si $\sigma \neq 0$, la solución requiere de diferenciar el proceso estocástico, y la matemática convencional no cuenta con herramientas para obtener la solución, por lo que es necesario recurrir al cálculo estocástico ó cálculo de Itô, que es una herramienta para trabajar con ecuaciones diferenciales estocásticas y obtener una solución de la forma:

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A_1(s)ds + c \int_0^t A_2(s)dB(s) \quad (5)$$

Donde:

$A_1(s)$ y $A_2(s)$ son procesos estocásticos adaptados a $\Gamma = (\mathfrak{F}_t = (\sigma(B(s): s \leq t)), y$
 $\sigma(B(s) : s \leq t)$ es la σ -álgebra generada por $B(s)$ con $s \leq t$.

En (5), la primera integral es una integral ordinaria y la segunda es una integral estocástica de Itô. Aunque la hipótesis se puede relajar sustancialmente si suponemos que $A_1(s)$ y $A_2(s)$ son funciones continuas cuya integral corresponde a la probabilidad unitaria, y se cumple que:

$$\int_0^t A_2(s))^2 ds, \quad (6)$$

para $< +\infty$ y por lo tanto, se afirma que las integrales de la ecuación (5) están definidas.

Deducción del movimiento geométrico browniano

La principal herramienta del cálculo estocástico que desarrollo Itô, desempeña el rol análogo a la regla de la cadena en el cálculo diferencial, y está dada a través del resultado conocido como lema de Itô.

Dada una ecuación diferencial estocástica de la forma (5) y $f(t,x)$ una función continua con una derivada parcial de primer orden respecto de t continua y la derivada de segundo orden respecto que X es continua, para $S < t$, y se cumple que:

$$f(t, B(t)) - f(s, B(s)) = \int_s^t \left(\frac{\partial f(u, B(u))}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(u, B(u))}{\partial x^2} \right) du + \int_s^t \frac{\partial f(u, B(u))}{\partial x} dB(u) \quad (7)$$

Para la aplicación de este resultado, se escribe primero la ecuación diferencial estocástica (3) con condición inicial $S(0) = S_0$ en forma de integral:

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu S(x) dx + \int_0^t \sigma S(x) dB(x), \quad (8)$$

y se supone que si $S(t) = f(t, B(t))$, entonces identificando cocientes en (7) y (8) se tiene:

$$\mu f(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}, \quad (9)$$

$$\sigma f(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, \quad (10)$$

Derivando (10) respecto a la variable, integral estocástica, x , se obtiene:

$$\sigma \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2}, \quad (11)$$

y sustituyendo (10) en (11), se llega a:

$$\sigma^2 f(t, x) = \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^2} \quad (12)$$

Simplificando (9) y (12), se obtienen las derivadas parciales:

$$\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) f(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial t}; \quad \sigma f(t, x) = \frac{\partial f(t, x)}{\partial x}, \quad (13)$$

La solución se busca, al utilizar el método de separación de variables para ecuaciones en derivadas parciales en la forma:

$$f(t, x) = g(t)h(x), \quad (14)$$

Con lo que de acuerdo a (13) se debe satisfacer:

$$g(t) = g(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right)t\right); h(x) = h(0) \exp(\sigma x), \quad (15)$$

por lo tanto,

$$f(t, x) = g(t)h(x) = g(0)h(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right)t + \sigma x\right), \quad (16)$$

y como por definición del movimiento browniano $B(0) = 1$, continuo de probabilidad unitaria, se tiene que:

$$S(0) = f(0, B(0)) = f(0, 0) = g(0)h(0), \quad (17)$$

luego:

$$f(t, x) = S(0) \exp\left(\left(\hat{\mu} - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x\right) \quad (18)$$

Finalmente,

$$S(t) = f(t, B(t)) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2\right)t + \sigma B(t)\right). \quad (19)$$

Es el proceso estocástico solución para $t \geq 0$ de la ecuación diferencial estocástica (3), denominado en la literatura movimiento geométrico browniano ó proceso estocástico log-normal ya que para cada t es la exponencial de una variable aleatoria $B(t)$.

Propiedades del movimiento geométrico browniano

Un movimiento browniano en un proceso continuo que tiene las siguientes propiedades:

- $W_0 = 0$.
- Para todo $t \geq 0$, $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$, es decir, W_t es una variable normalmente distribuida con media 0 y varianza t .
- Todos los incrementos $\Delta W_t = W_{t+\Delta t} - W_t$ son independientes, es decir, para todo $0 \leq t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ los desplazamientos $W_{t_2} - W_{t_1}$ y $W_{t_4} - W_{t_3}$ son independientes.
- W_t depende continuamente de t .

El algoritmo para simular numéricamente movimientos brownianos, es el siguiente:

A partir de valores iniciales:

$$W_0 = 0, t_0 = 0, \Delta t, \tag{20}$$

para $j = 1, 2, \dots$

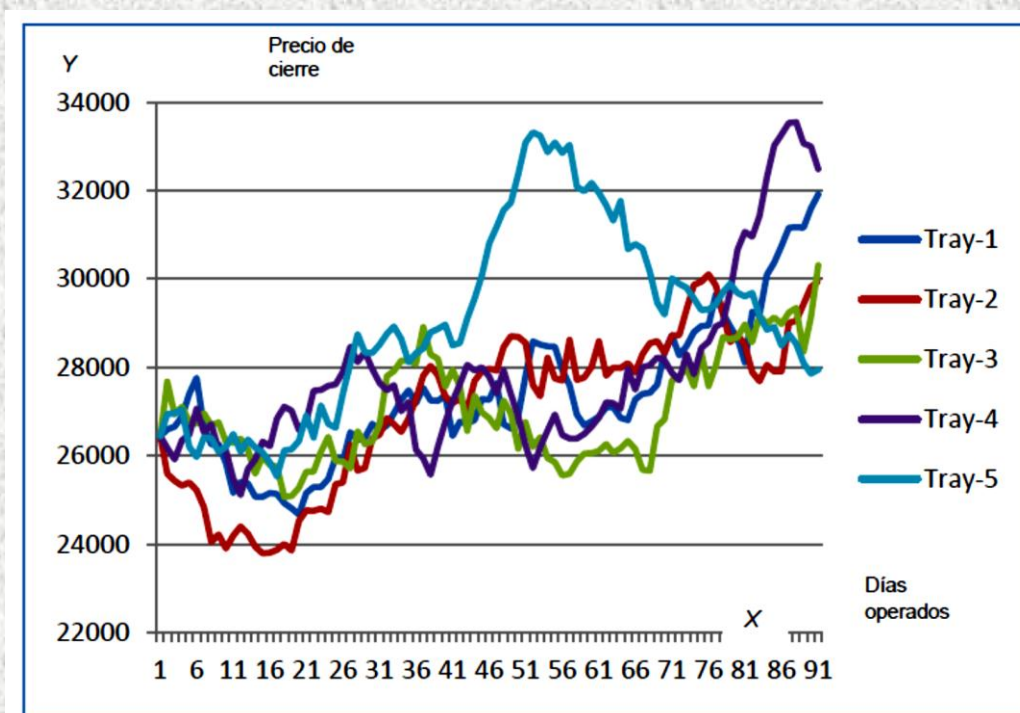
$$t_j = t_{j-1} + \Delta t \tag{21}$$

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{22}$$

$$W_j = W_{j-1} + Z\sqrt{\Delta t} \tag{23}$$

Donde Z es un número aleatorio con distribución normal de media cero y varianza unitaria. En la gráfica 1 se presenta el movimiento browniano.

Grafica. 1. Trayectorias del movimiento browniano para los precios diarios del IPC trimestral año 2010.



Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer.

En el modelo del movimiento geométrico browniano se impone la hipótesis logarítmica normal según la cual, si $S(t)$ es la variable aleatoria que representa el precio del activo subyacente en el instante t y que inicialmente vale S_0 , entonces:

$$\ln \left(\frac{S(t)}{S_0} \right) \sim \mathcal{N} \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t, \sigma^2 \right) \tag{24}$$

Donde:

- μ es el rendimiento esperado de las acciones.
- A la esperanza de la variable aleatoria $S(t)$ corresponde:

$$\mathbb{E}(S(t)) = S_0 e^{\mu t} \quad (25)$$

Donde:

- σ es la volatilidad del precio de las acciones.

La incertidumbre sobre los movimientos futuros corresponde a la varianza de $S(t)$ que se obtiene mediante:

$$\text{var}(S(t)) = S_0^2 e^{2\mu t} (e^{\sigma^2} - 1) \quad (26)$$

Basándose en estos argumentos, el precio de la acción en el instante t será:

$$S(t) = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \quad (27)$$

Donde:

$$Z \sim N(0,1)$$

Modelo del comportamiento estocástico browniano de los precios de un activo financiero.

El modelo del movimiento geométrico browniano, es un modelo matemático que describe la relación entre el precio actual de un activo y sus posibles precios futuros. El modelo del movimiento geométrico browniano, establece que los pagos futuros de un activo están normalmente distribuidos y que su desviación típica o volatilidad corresponde a una distribución que puede estimarse con los datos del pasado.

Sí la tasa de pagos de un activo entre el momento actual y un breve instante futuro, Δt está normalmente distribuida. La media de esta distribución es $\mu\Delta t$ y la desviación típica $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Técnicamente, se supone que el proceso de precios S corresponde a la solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$S_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad (28)$$

Por lo tanto, sí el precio de un activo lo representa la variable S , el precio S_t en el instante t sigue un movimiento geométrico browniano de media instantánea μ y desviación típica instantánea σ , entonces la tasa de pago de S entre el instante t y cualquier otro momento T se expresa por:

$$Y = \frac{1}{T-t} \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right) \quad (29)$$

La variable está normalmente distribuida con media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$ y desviación estándar $\sigma\sqrt{(T-t)}$. Con la simulación se prueba que la probabilidad de que la tasa de pago Y , sea mayor que un porcentaje dado α :

$$\Pr(|Y| \geq \alpha) = F\left(\frac{-\alpha - \mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right) + F\left(-\frac{\alpha - \mu + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right) \quad (30)$$

Convergencia estocástica

El concepto de convergencia estocástica a diferencia de su conceptualización en el ámbito de los números reales, no es único ya que se extiende al caso de sucesiones de variables aleatorias con diferentes posibilidades de convergencia y cada una conlleva requerimientos diferentes sobre los elementos de cada sucesión. Por lo que se puede definir como una sucesión de variables aleatorias a un conjunto infinito numerable de esa clase de elementos.

Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias definidas sobre un espacio fijo de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, tales que:

$$E[|X_n - X|^q] \rightarrow 0 \quad (31)$$

Cuando $n \rightarrow \infty$, lo cual Venegas (2007), lo denota como $X \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^q} X$, donde cada X_n es una variable aleatoria.

Un ejemplo de una sucesión de variables aleatorias es repetir indefinidamente y de manera independiente un experimento del que cierto suceso **A** tiene una probabilidad de **P**.

Sea X_i la $b(p)$ asociada a la i -ésima repetición, el conjunto de esas binomiales $\{X_n\}$ es un ejemplo de sucesión de variables aleatorias que además tienen la característica de ser independientes e idénticamente distribuidas.

A partir de las X_i anteriores se puede definir como:

$$Y_n = X_1 + \dots + X_n \sim B(n, p) \cdot \{Y_n\}, \quad (32)$$

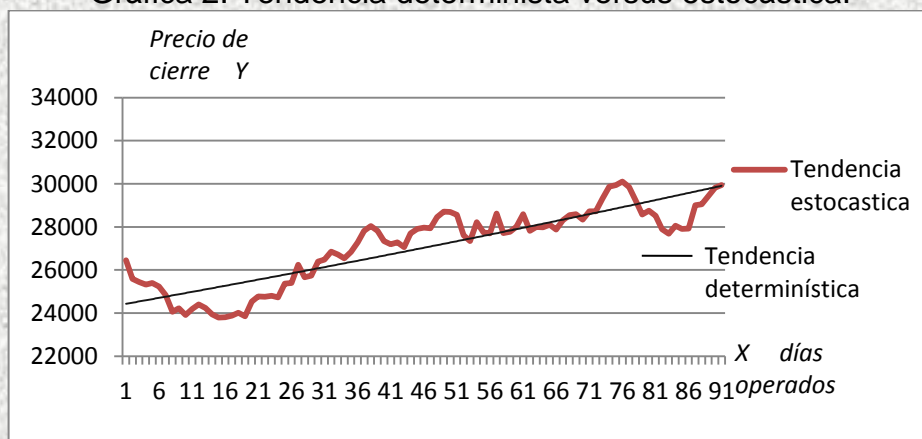
una sucesión tal que sus elementos se distribuyen con el mismo tipo de distribución que cambia con n y no son independientes entre sí.

Caminata aleatoria

Un proceso de difusión es un movimiento persistente de largo plazo de una variable a través del tiempo, por lo que corresponde a una serie de tiempo en donde los valores fluctúan alrededor de su tendencia. Existen dos clases de tendencias, una determinística que es una función constante que varía con el tiempo, y otra *estocástica* que significa que su valor es aleatorio y cambia con el tiempo.

En la gráfica 2 se muestra la tendencia constante y la tendencia estocástica, donde las desviaciones con respecto la recta de tendencia determinista, son aleatorias con media no estacionaria, por lo que no contribuyen al desarrollo de largo plazo de la serie de tiempo ya que se eliminan rápido, en cambio para el caso de tendencia estocástica el componente aleatorio afecta el curso de largo plazo de la serie de tiempo.

Gráfica 2. Tendencia determinista versus estocástica.



Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer.

En gran parte de la literatura financiera se dice que el modelo más simple para representar el movimiento que siguen los valores de los activos financieros es una caminata aleatoria. Por lo tanto, una serie de tiempo Y_t sigue una caminata aleatoria si el cambio en Y_t corresponde a ε_t que tiene una distribución $N(0,1)$ representado por la siguiente expresión:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \quad (33)$$

Donde:

- y_t - Valor logarítmico del activo en el tiempo.
- y_{t-1} - Valor del activo más un cambio impredecible.
- ε_t - Error aleatorio ó cambio en el valor del activo.

Se refiere que una serie de tiempo tiene un proceso de difusión de caminata aleatoria si se puede representar por un modelo basado en esta expresión pero con:

$$E[\varepsilon_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots] = 0 \tag{34}$$

Donde:

E - Espacio muestral de las trayectorias de y_t .

y_{t-1}, y_{t-2} - Pasos del activo en el tiempo.

La idea básica de una caminata aleatoria es que el valor del activo financiero se representa por la serie de valores que corresponden al valor del día anterior más un cambio impredecible (la trayectoria de y_t sigue pasos aleatorios), y se expresa de la forma siguiente:

$$E[\varepsilon_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots] = y_{t-1} \tag{35}$$

Si y_t sigue una caminata aleatoria, el mejor pronóstico del valor de mañana es el valor de hoy, por lo que si una serie tiene tendencia a moverse lleva una extensión conocida como caminata aleatoria con tendencia.

Por otro lado si y_t sigue una caminata aleatoria, la varianza de la caminata aumenta con el tiempo, por lo que la distribución de y_t también cambia con el tiempo de la siguiente forma:

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{36}$$

$$var(y_t) = var(y_{t-1}) + var(\varepsilon_t), \tag{37}$$

$$var(y_t) \neq var(y_{t-1}) \tag{38}$$

y se dice que la serie de tiempo no es estacionaria y muestra que la tendencia de la distribución contiene variaciones mayores o iguales a la unidad. Otra forma de verlo el proceso es pensar que y_t empieza en cero, es decir $y_0 = 0$ entonces:

$$y_1 = \varepsilon_1, y_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \tag{39}$$

de tal forma que:

$$y_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t \tag{40}$$

Por lo tanto:

$$var(y_t) = var(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t) = t\sigma_\varepsilon^2 \tag{41}$$

Las autocorrelaciones poblacionales de una caminata aleatoria no están definidas y las muestras tienden a la unidad. La caminata aleatoria es un caso especial de un modelo autorregresivo $AR(1)$ con $\alpha_1=0$, entonces y_t tiene una tendencia estocástica y no es estacionaria. En cambio, si $|\alpha_1| < 1$, entonces y_t es estacionaria. Para el caso de un $AR(p)$, la condición que se debe cumplir para que sea estacionario es que las soluciones a la siguiente ecuación:

$$1 - \alpha_1 Z - \alpha_2 Z^2 - \dots - \alpha_p Z^p = 0 \tag{42}$$

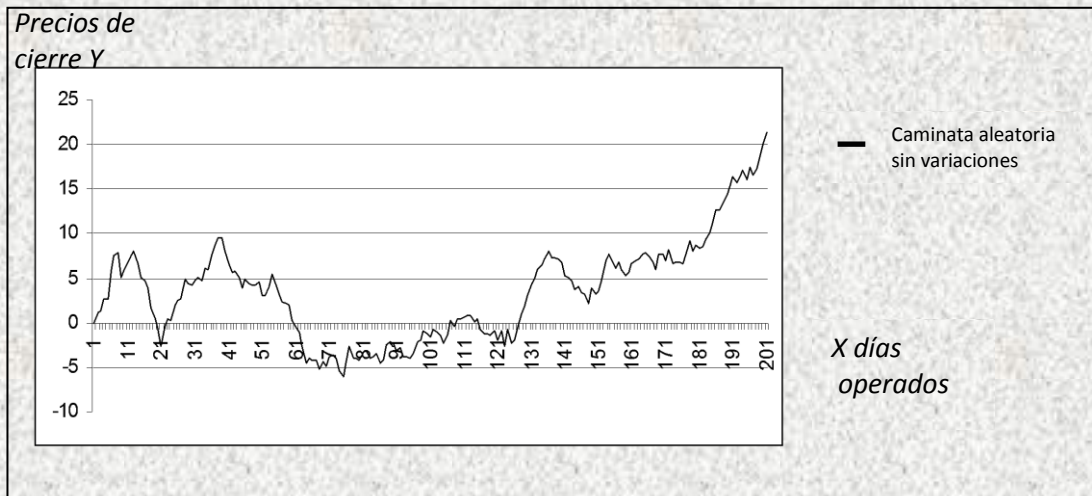
tienen que ser mayores a la unidad, por lo tanto las raíces del polinomio tienen que estar fuera del círculo unitario y en el caso de un AR (1), la raíz es:

$$z = \frac{1}{\alpha_1} \quad (43)$$

Por lo que la raíz es mayor a la unidad en valor absoluto si $|\alpha_1| < 1$.

La gráfica 3, representa una tendencia estocástica sin variaciones y estacionaria, puesto que se distribuye normalmente, es decir, que ε_t sigue una distribución normal con media cero y varianza constante menor a la unidad.

Gráfica 3. Caminata aleatoria sin variaciones.



Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer.

Si el AR (p) tiene una raíz que es igual a la unidad, entonces la serie también tiene una raíz unitaria y tiene una tendencia estocástica.

Por lo que se concluye, que el modelo de caminata aleatoria presenta variaciones en la media como en la varianza que se incrementan con el tiempo, y puede presentar o no variaciones sin dejar de ser un proceso estocástico no estacionario.

Por otro lado, si la tendencia en la serie de tiempo es predecible y no variable es determinista y al no ser predecible es estocástica.

3. Modelo empírico para evaluar contratos de futuros del IPC serie junio 2011

En los últimos años, el volumen de negociación sobre índices accionarios como el IPC ha mostrado niveles de crecimiento exponenciales, ubicándose entre los contratos de futuros de mayor operación en el mercado mexicano de derivados (MexDer), por lo que para el análisis de las series que se operan, es importante verificar la suposición de que los datos pueden modelarse bajo el supuesto de normalidad del movimiento geométrico browniano, considerando un registro histórico de los precios del activo subyacente, ya que presentan diferencias significativas en los rendimientos esperados.

Se parte de las propiedades del modelo log-normal aplicado al comportamiento del precio de un contrato de futuros sobre el IPC, y basándose en un proceso estocástico denominado movimiento geométrico browniano, en este apartado se ponen en práctica los conceptos teóricos desarrollados en el marco teórico, para modelar de manera empírica las situaciones de incertidumbre que sigue el precio del activo subyacente en el tiempo, y determinar si un número finito de datos obtenidos subestima o sobrestima su valor, se explica por medio de variables vinculadas al modelo que rigen su comportamiento.

Metodología estocástica para evaluar el comportamiento de los precios del IPC

Como lo describe Venegas (2007), al igual que en el caso de un título accionario, es frecuente suponer que el cambio porcentual de un índice bursátil, S_t , sigue una ecuación diferencial del tipo:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dw_t \quad (44)$$

Donde:

$\frac{dS_t}{S_t}$ - Variable aleatoria del activo subyacente.

μdt - Rendimiento esperado.

σdw_t - Volatilidad del precio del activo subyacente.

Para modelar las variables que integran el modelo bajo el supuesto de que el patrón de comportamiento de incertidumbre de los precios corresponde a una distribución de probabilidad log-normal se considera el registro histórico de los precios diarios del IPC que corresponden a la información al segundo trimestre de 2011, que son suficientes para estimar el comportamiento del activo subyacente en el tiempo y corroborar al visualizar el comportamiento estocástico.

Al tomar posiciones en el mercado, resulta importante conocer cuáles son los factores que condicionan los precios de los activos que se cotizan en él y si tienen relación directa con la variación.

El objetivo es evaluar el comportamiento en los niveles de precio, para lo que se plantea un modelo de valuación log-normal en el que se utiliza cómo variable endógena los precios de cierre del activo subyacente y como variable exógena la incertidumbre del precio del activo subyacente en el futuro.

Desde el punto de vista práctico, si $S(t)$ está dada por:

$$S(t) = f(t, B(t)) = S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t) \right) \quad (45)$$

para: $t > 0$.

La ecuación (45) pretende recoger el comportamiento de la trayectoria temporal del activo subyacente, para lo cual primero se deben calibrar los parámetros μ y σ ; para ello es más adecuado manejar (45) en la forma equivalente que resulta de tomar logaritmos:

$$\ln(S(t)) - \ln(S(0)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B(t) \sim N \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t; \sqrt{\sigma t} \right), \quad (46)$$

Donde la distribución estadística es una transformación lineal de $B(t) \sim N(0; \sqrt{t})$.

Ahora se considera una colección de $k+1$ cotizaciones del activo, entonces:

$$S(0), S(\Delta t) = S_1, S(2\Delta t) = S_2, \dots, S(k\Delta t) = S_k, \quad (47)$$

en los instantes $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, k\Delta t = t$ equiespaciados del intervalo $[0, t]$.

En cada subperiodo $[(j-1)\Delta t, j\Delta t]$ con $1 \leq j \leq k$ consideramos los k incrementos:

$$\mu_j = \ln(S(j\Delta t)) - \ln(S((j-1)\Delta t)), \quad 1 \leq j \leq k. \quad (48)$$

Se observa que por (46) se obtiene:

$$\ln(S(j\Delta t)) = \ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (j\Delta t) + \sigma B(j\Delta t) \quad (49)$$

$$\ln(S((j-1)\Delta t)) = \ln(S(0)) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) ((j-1)\Delta t) + \sigma B((j-1)\Delta t) \quad (50)$$

De donde resaltando (48) de (49), se puede expresar (50) en la forma:

$$\mu_j = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t + \sigma (B(j\Delta t) - B((j-1)\Delta t)), \quad (51)$$

ahora como por definición el movimiento geométrico browniano $B(t)$ cumple que tiene incrementos independientes de media cero y varianza t , para la longitud del incremento sobre t , se tiene que:

$$B(j\Delta t) - B((j-1)\Delta t) \sim N(0; \sqrt{\Delta t}), \quad 1 \leq j \leq k, \quad (52)$$

por lo que las variables aleatorias μ_j son independientes con media $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t$ y varianza $\sigma^2 \Delta t$. A partir de una muestra de $k+1$ datos reales de las cotizaciones, se puede construir las k diferencias dadas en (48) y realizar una estimación de los parámetros μ y σ mediante el método de momentos, que supone igualar la media y la varianza de las k variables aleatorias a la media muestral $\bar{\mu}$ y a la quasi-varianza muestral S^2 dadas por:

$$\mu = \sum_{j=1}^k \mu_j, \quad S^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k \mu_j (\mu_j - \mu)^2, \quad (53)$$

Lo que permite construir el siguiente sistema de ecuaciones algebraico para estimar los parámetros μ y σ :

$$\mu = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t, \quad S^2 = \sigma^2 \Delta t, \quad (54)$$

cuya solución son las estimaciones buscadas.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\Delta t} \left(\mu + \frac{S^2}{2} \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{S}{\sqrt{\Delta t}} \quad (55)$$

En la práctica para calibrar el modelo sobre cotizaciones diarias del mercado bursátil se toma $\Delta t = 1/365$ cuando el activo es sensible a los sucesos y acontecimientos que ocurren durante todos los días del año, y para este análisis a $\Delta t = 1/250$, cuando el precio del activo subyacente solo depende de las decisiones que se toman por los inversionistas en horario de cotización durante 250 días hábiles del año.

Para que el modelo (44) se aplique es necesario simular $B(t) \sim N(0; \sqrt{t})$ a través de la simulación del modelo log-normal.

Se parte del modelo (44) y una vez calibrados los parámetros y se utilizan en la siguiente expresión:

$$\hat{S}(t) = S(0) \exp \left(\left(\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) t + \hat{\sigma} B(t) \right) \quad (56)$$

Se tiene en cuenta que $B(t) = \sqrt{t}Z$, con $Z \sim N(0;1)$, y se obtiene el modelo:

$$\hat{S}(t) = S(0) \exp \left(\left(\hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}^2}{2} \right) t + \hat{\sigma} \sqrt{t}Z \right) \quad (57)$$

Por lo que al generar diferentes valores de Z se tienen estimaciones puntuales diferentes $\hat{S}(t)$ para conocer el valor del activo en el instante t .

Se espera que los valores que arroje el modelo sean superiores ó iguales al precio de mercado, por lo que se puede intuir una tendencia de arrojar valores mayores ó iguales con respecto al valor de mercado, lo cual se puede interpretar como una sobrevaluación del valor del contrato, debido a que el modelo considera como variable para determinar el valor, el valor total del contrato, y la incertidumbre que permite definir cuando el riesgo es muy alto.

4. Descripción de datos

El conjunto de datos utilizados para conformar la muestra de análisis, se tomó de las operaciones que registra el MexDer para los contratos futuros del IPC de la serie JN11, provenientes de la base de datos histórica del primer trimestre de 2011 con fecha de vencimiento el 17 de junio, con el fin de modelar el impacto de los cambios registrados en el precio al cierre de las operaciones diarias del mercado.

Cuadro 1. Operaciones registradas de los contratos de futuros del IPC al segundo trimestre de 2011.

Fecha de operación	Clase	Serie	Núm. de Operaciones	Precio de liquidación	Fecha de operación	Clase	Serie	Núm. de Operaciones	Precio de liquidación
01/04/2011	IPC	JN11	51	26,995	13/05/2011	IPC	JN11	121	28,040
04/04/2011	IPC	JN11	116	26,963	16/05/2011	IPC	JN11	101	28,076
06/04/2011	IPC	JN11	112	26,876	17/05/2011	IPC	JN11	180	28,256
07/04/2011	IPC	JN11	103	26,425	18/05/2011	IPC	JN11	140	28,600
08/04/2011	IPC	JN11	89	26,572	19/05/2011	IPC	JN11	130	28,618
11/04/2011	IPC	JN11	190	26,070	20/05/2011	IPC	JN11	101	28,630
12/04/2011	IPC	JN11	124	26,194	23/05/2011	IPC	JN11	13	28,733
13/04/2011	IPC	JN11	207	26,533	24/05/2011	IPC	JN11	110	28,736
14/04/2011	IPC	JN11	141	26,581	25/05/2011	IPC	JN11	103	28,825
15/04/2011	IPC	JN11	26	26,735	26/05/2011	IPC	JN11	150	28,761
18/04/2011	IPC	JN11	144	26,732	27/05/2011	IPC	JN11	89	28,560
19/04/2011	IPC	JN11	152	26,720	30/05/2011	IPC	JN11	154	28,125
20/04/2011	IPC	JN11	125	26,273	31/05/2011	IPC	JN11	243	26,419
25/04/2011	IPC	JN11	125	26,400	01/06/2011	IPC	JN11	206	26,693
26/04/2011	IPC	JN11	107	26,589	02/06/2011	IPC	JN11	209	26,603
27/04/2011	IPC	JN11	142	27,000	03/06/2011	IPC	JN11	129	26,370
28/04/2011	IPC	JN11	126	27,543	06/06/2011	IPC	JN11	124	25,770
29/04/2011	IPC	JN11	190	27,140	07/06/2011	IPC	JN11	104	26,400
02/05/2011	IPC	JN11	156	27,240	08/06/2011	IPC	JN11	66	26,195
03/05/2011	IPC	JN11	87	27,050	09/06/2011	IPC	JN11	88	26,743
04/05/2011	IPC	JN11	162	27,352	10/06/2011	IPC	JN11	70	27,149
05/05/2011	IPC	JN11	142	27,822	13/06/2011	IPC	JN11	70	27,277
06/05/2011	IPC	JN11	119	28,102	14/06/2011	IPC	JN11	40	26,600
09/05/2011	IPC	JN11	87	28,138	15/06/2011	IPC	JN11	74	26,733
10/05/2011	IPC	JN11	101	28,279	16/06/2011	IPC	JN11	60	26,913
11/05/2011	IPC	JN11	111	28,319	17/06/2011	IPC	JN11	28	26,901
12/05/2011	IPC	JN11	121	28,310					

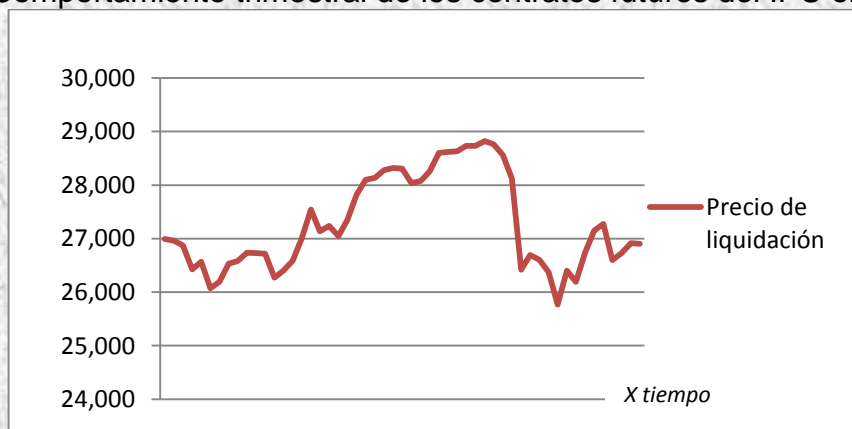
Fuente: Elaboración propia con la base de datos histórica del MexDer.

En el cuadro 1 se presentan los datos de los valores de operación diarios de los contratos de futuros del IPC, considerados al cierre de las sesiones en el MexDer del 1 abril al 17 de junio de 2011.

La primera columna contiene la fecha de operación en la que fueron negociados los contratos de futuro; la segunda columna contiene la clase de activo subyacente negociado, en la tercera se describe la serie operada integrada por la primera letra y la segunda consonante del mes de vencimiento y los dos últimos dígitos del año de vencimiento, la cuarta columna hace referencia al número de operaciones efectuadas por contrato en la fecha estipulada y finalmente el precio de liquidación de cada contrato.

La gráfica 4, muestra las variaciones de los precios diarios sobre los contratos futuros del valor del IPC con fecha de vencimiento al 17 de junio de 2011; en las ordenadas se presenta el valor en puntos del IPC que rige los valores de los contratos al cierre de cada sesión en el MexDer, que refleja el precio de mercado y que a primera vista lo único que cabe resaltar es su comportamiento errático de subida y bajada que parece no responder a ningún patrón o ley matemática.

Gráfica 4. Comportamiento trimestral de los contratos futuros del IPC en el MexDer.



Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer.

5. Resultados

Para realizar el cálculo del valor de los contratos de futuros sobre el IPC, se utilizó el modelo del movimiento geométrico browniano mediante simulación de Monte Carlo para estimar el valor del IPC que corresponde al activo subyacente que se utilizó en los contratos de futuro, mediante la comparación entre los datos reales que reporta el mercado MexDer con los valores calculados de forma empírica se determinó la subvaluación o sobrevaluación que presenta la utilización del modelo a partir de los datos seleccionados para el cálculo que es la base fundamental del análisis, el proceso se repitió hasta encontrar el mejor resultado.

Para determinar el valor del subyacente se utilizaron valores promedio por contrato, el modelo geométrico browniano del valor y se aplicó un modelo de caminata aleatoria para efectuar un análisis más específico de la variación en las estimaciones del precio tal como lo muestra el cuadro 2 que se presenta a continuación:

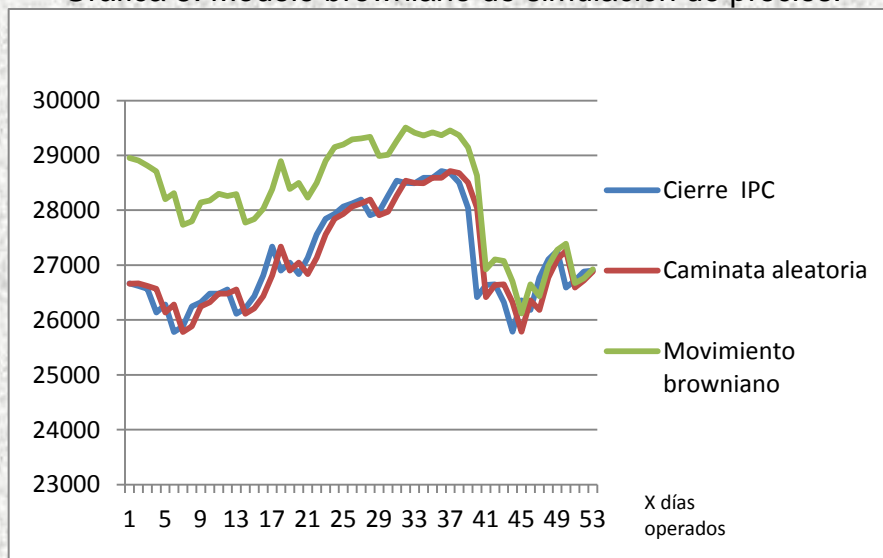
Cuadro 2. Estimaciones del movimiento geométrico browniano y caminata aleatoria.

Fecha de operación	Precio de mercado	Precio de liquidación al vencimiento	Movimiento geométrico browniano	Caminata aleatoria	Fecha de operación	Precio de mercado	Precio de liquidación al vencimiento	Movimiento geométrico browniano	Caminata aleatoria
01/04/2011	26,448	26663.00			13/05/2011	28,040	27906.89	29336.15	28197.26
04/04/2011	26,995	26664.45	28951.91	26663	16/05/2011	28,076	27972.23	28988.10	27906.89
06/04/2011	26,963	26619.37	28907.66	26664.45	17/05/2011	28,256	28262.65	29009.99	27972.23
07/04/2011	26,876	26566.28	28813.12	26619.37	18/05/2011	28,600	28539.69	29264.80	28262.65
08/04/2011	26,425	26135.6	28710.15	26566.28	19/05/2011	28,618	28498.75	29504.89	28539.69
11/04/2011	26,572	26281.64	28200.01	26135.6	20/05/2011	28,630	28491.07	29415.94	28498.75
12/04/2011	26,070	25783.04	28312.71	26281.64	23/05/2011	28,733	28590.17	29361.47	28491.07
13/04/2011	26,194	25885.8	27731.62	25783.04	24/05/2011	28,736	28589.66	29416.97	28590.17
14/04/2011	26,533	26247.9	27798.08	25885.8	25/05/2011	28,825	28715.96	29369.89	28589.66
15/04/2011	26,581	26324.38	28142.32	26247.9	26/05/2011	28,761	28676.48	29452.96	28715.96
18/04/2011	26,735	26480.03	28179.66	26324.38	27/05/2011	28,560	28505.72	29365.92	28676.48
19/04/2011	26,732	26480.33	28301.42	26480.03	30/05/2011	28,125	28046.16	29144.85	28505.72
20/04/2011	26,720	26558.5	28256.95	26480.33	31/05/2011	26,419	26418.82	28629.61	28046.16
25/04/2011	26,273	26112.87	28295.51	26558.5	01/06/2011	26,693	26638.95	26925.73	26418.82
26/04/2011	26,400	26213.38	27776.71	26112.87	02/06/2011	26,603	26647.65	27107.12	26638.95
27/04/2011	26,589	26432.25	27839.49	26213.38	03/06/2011	26,370	26321.12	27073.06	26647.65
28/04/2011	27,000	26810	28027.51	26432.25	06/06/2011	25,770	25788.37	26699.00	26321.12
29/04/2011	27,543	27338.3	28383.07	26810	07/06/2011	26,400	26355.64	26117.20	25788.37
02/05/2011	27,140	26899.34	28896.57	27338.3	08/06/2011	26,195	26184.39	26649.46	26355.64
03/05/2011	27,240	27045.71	28387.59	26899.34	09/06/2011	26,743	26773.79	26434.40	26184.39
04/05/2011	27,050	26834.05	28496.89	27045.71	10/06/2011	27,149	27106.53	26986.65	26773.79
05/05/2011	27,352	27135.37	28229.12	26834.05	13/06/2011	27,277	27261.17	27278.80	27106.53
06/05/2011	27,822	27561.49	28500.93	27135.37	14/06/2011	26,600	26589.2	27391.00	27261.17
09/05/2011	28,102	27842.76	28902.68	27561.49	15/06/2011	26,733	26719.32	26673.55	26589.2
10/05/2011	28,138	27933.07	29151.43	27842.76	16/06/2011	26,913	26883.53	26761.67	26719.32
11/05/2011	28,279	28067.4	29199.70	27933.07	17/06/2011	26,901	26901.42	26920.81	26883.53
12/05/2011	28,319	28123.76	29293.69	28067.4					

Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer.

Conocida la cotización real del 17 de junio de 2011, y comparando con la predicción obtenida mediante el modelo del movimiento geométrico browniano se obtiene una diferencia de 0.19 puntos entre el valor real de cada contrato, que es de 269.01, y la predicción que es de 269.20 la predicción entre dichos valores es notable. Sin embargo, se agregó a este análisis comparativo un modelo de caminata aleatoria para efectuar otra estimación obteniendo una diferencia de 0.17 puntos entre el valor real y el de la caminata aleatoria de 268.83, por lo tanto, en principio se concluye, que el modelo del movimiento geométrico browniano es aceptable para predecir el precio del activo subyacente en un día posterior a la serie de datos utilizados.

Gráfica 5. Modelo browniano de simulación de precios.



Fuente: Elaboración propia con datos del MexDer.

En la gráfica 5, se aprecia que los valores arrojados por el modelo siguen una misma tendencia a través de los días con lo que se comprueba la hipótesis de que el comportamiento de los precios siguen una distribución log-normal, lo que indica que el movimiento geométrico browniano ha evaluado correctamente el comportamiento del precio del activo subyacente; se muestran los resultados significativos de las estimaciones de los precios ya que al llegar la fecha de vencimiento de los contratos el valor del futuro y del mercado convergen en el mismo punto.

La aplicación del modelo del movimiento geométrico browniano a la evaluación del precio de los contratos de futuro en el periodo estudiado demuestra, que esté efectivamente refleja las situaciones de incertidumbre a las que se somete el activo subyacente en un proceso estocástico, incrementando las preferencias de inversión de los empresarios.

En los casos anualizados la determinación del precio futuro utilizando el modelo del movimiento geométrico browniano con los parámetros seleccionados y con la información de un año de historia, muestra un comportamiento que sobrevalúa los resultados del precio determinado por el mercado.

6. Conclusiones

En la presente investigación, se mostró que las variaciones de los precios diarios sobre los contratos futuros del valor del IPC con fecha de vencimiento al 17 de junio de 2011, presentan un comportamiento errático de subida y bajada que no responde a ningún patrón o ley matemática, por lo tanto, el modelo que resultó más realista sobre el comportamiento de los precios de los activos financieros, es el movimiento geométrico browniano, que se aplicó a la valuación de contratos de futuros sobre IPC que en el periodo de tiempo analizado se considera adecuado para el proceso de valuación.

A pesar del que el análisis del rendimiento de los activos del mercado de derivados muestra un comportamiento complejo y errático, que se explica por medio de la evidencia empírica que corrobora la hipótesis propuesta, se asume que si el movimiento geométrico browniano describe el comportamiento del valor del activo subyacente y permite predecir el precio futuro con una adecuada precisión tal como lo denotan los resultados, entonces la negociación de un contrato a futuro se realizará a un precio justo para el vendedor y el comprador desde el punto de vista económico que reduce la posibilidad de arbitraje.

El modelo estocástico tiende a arrojar valores del rendimiento normalmente distribuidos que para los parámetros calculados muestra una sobrestimación del valor de los contratos que se cotizan en el MexDer, la comparación de los resultados de la difusión del precio del contrato de futuro, por medio de una caminata aleatoria denota un mayor error al compararse con los datos reales y esto se debe a que el modelo no absorbe la tendencia del mercado.

Los resultados obtenidos por medio del análisis retrospectivo de la serie histórica y la simulación de la evolución estocástica del comportamiento del precio de los contratos de futuros del IPC, permitió corroborar la convergencia que se presenta entre el precio del contrato de futuro y el precio de mercado del activo subyacente, en todos los casos analizados se encontró que a medida que se acerca la fecha de vencimiento del contrato la diferencia entre ambos precios se hace menor, lo que confirma que el mercado de derivados es un buen formador de precios.

Los resultados del cálculo para determinar el precio de los contratos de futuros del IPC, al realizar la comparación entre la cotización real del 17 de junio de 2011 y el resultado de 53 simulaciones del precio mediante el movimiento geométrico browniano, denota la característica del comportamiento estocástico del proceso de difusión del precio, el resultado que se obtuvo fue una diferencia de 0.19 puntos de serie entre el valor real de cada contrato que es de 269.01 y el de la predicción de 269.20 lo que significa que la estimación se aproxima a la realidad, y representa una alternativa adecuada para la determinación del precio de los contratos de futuros, independientemente de la trayectoria que describa el precio; la volatilidad depende de la longitud del intervalo que interviene en el proceso de cálculo y por otro lado del periodo de observación que se utiliza para la determinación de los parámetros del modelo.

Un punto a resaltar es que el modelo del movimiento geométrico browniano es una herramienta sencilla para el cálculo y análisis de las expectativas sobre el comportamiento estocástico de los precios para los contratos de futuros, además de que su resolución numérica se logra a través de aplicaciones informáticas que garantizan la solución y el tiempo de proceso.

Resulta evidente la utilidad que pueden tener los activos financieros para realizar una inversión; ya que además de disminuir el riesgo y generar rendimientos, asisten a un desarrollo importante del mercado de derivados en México, además de generar modelos de valoración sencillos y coherentes que permitan a los agentes económicos incrementar la ganancia acercándose a una estimación precisa de la prima de riesgo. No obstante, que el método de valuación de contratos futuros es sencillo permite mostrar con claridad el comportamiento estocástico del precio de los contratos de futuros cuya volatilidad depende de las condiciones del entorno económico, es posible continuar con la línea de investigación al incorporar variaciones extremas o saltos abruptos en los precios derivados de imperfecciones del mercado financiero.

Bibliografía

AMIB A.C., (1994), *Operación del mercado de valores en México*, material de apoyo, Bolsa mexicana de valores, 274 paginas. México.

AMIB A.C., (1996), *Mercado de derivados*, material de apoyo, Bolsa mexicana de valores, 142 paginas. México.

Brealey Myers, Marcus, (1997), *Fundamentos de finanzas corporativas*, McGraw Hill, 1ª. Ed, México.

Burton, Malkiel, (2005), *Un paseo aleatorio por Wall Street*, Prentice Hall, México.

Cortina, Ortega Gonzalo, (1995), *Prontuario bursátil y financiero*, Trillas, México.

Cox y Rubinstein, (1979), *Option markets*, Prentice Hall, 7a Ed., U.S.A.

De Alba, Monroy Arturo, (2000), *El mercado de dinero y capitales y el sistema financiero mexicano*, Pac S.A. de C.V., México.

De Lara Haro, Alfonso, (2002), *Medición y control de riesgos financieros*, Limusa, Noriega Editores, México.

Díaz, Carmen, (1998), *Futuros y opciones, teoría y práctica*, Prentice Hall, 1ª. Ed., México.

Díaz Tinoco, Jaime y Trillo Hernández, Fausto, (2002), *Futuros y opciones financieras, una introducción*, Limusa Noriega Editores, México.

Diez de Castro, Mascareñas J.,(2001), *Ingeniería financiera*, McGraw-Hill, México.

Fabozzi, Modigliani, (1998), *Mercados e instituciones financieras*, Prentice Hall, 1ª. Ed., México.

García Santillán, A (2007), *Sistema financiero mexicano y el mercado de derivados*, Edición electrónica gratuita.

Gitman J, Lawrence, (2000), *Principios de Administración financiera*, Pearson, 8ava. Ed., México.

Grandio, Antoni, (1999), *Mercados financieros*, Mc-Graw Hill, 1ª. Ed., México.

Hanke, John E. y Reitsch, Arthur G., (2005), *Pronósticos en los negocios*, Prentice Hall, U.S.A.

Hull, John C, (2006), *Introducción a los mercados de futuros y opciones*, Prentice Hall, 6ª Ed., México.

Jorion, Philippe, (2003). *Valor en riesgo: El nuevo paradigma para el control de riesgos con derivados*, Limusa, Noriega Editores, México.

Jorion, Philippe, (1999), *Value at risk, the new benchmark for controlling derivatives risk*, McGraw Hill, U.S.A.

Martínez Venegas, Francisco, (2006), *Riesgos financieros y económicos*, Thomson, 1ª. Ed., México.

Pinilla, Roberto: Valero, R. Luís y Guzmán V, Alexander, (1999), *Operaciones financieras en el mercado bursátil*, McGraw Hill, Colombia.

Sánchez Tabales, Ramón, (2004), *La innovación financiera en los mercados internacionales*, FCE, México.

Van Horne, James, (1997), *Administración financiera*, Prentice Hall, 9ª Ed., México.