Revista ECORFAN,Vol.2,núm.5,2011,pp.48-69

FINANZAS

PhD. Eric Ávila Vales

Profesor Investigador de la UADY.

Mtro. Ángel G. Estrella

Licenciado en Matemáticas *(Universidad Autónoma de Yucatán)*.

Mtro. Luis Blanco Cocom

SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE BLACK-SCHOLES A TRAVÉS DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE ADOMIAN

Mtro. Luis Blanco Cocom

Licenciado en Matemáticas y Maestro en Matemáticas *(Universidad Autónoma de Yucatán)*.

Ganador del Premio Mixbaal, tiene producción de artículos y ponencias en la Escuela Nacional de Optimización y Análisis Numérico, Sociedad Mexicana del Hidrógeno, Sociedad Matemática Mexicana y la Universidad Juárez Autónoma de Tabasco.

PhD. Eric Ávila Vales

Profesor Investigador de la UADY.

Mtro. Ángel G. Estrella

Licenciado en Matemáticas *(Universidad Autónoma de Yucatán)*.

Fecha de Envió: 02 de Noviembre 2011.
Fecha de Aceptación: 29 de Diciembre de 2011.

CONTENIDO

- Introducción
- Opciones de compra-venta y la ecuación de Black-Scholes.
- El Método de Descomposición de Adomian
- Soluciones de la ecuación de Black-Scholes vía el MDA.
  - Aplicación directa del MDA.
  - Reducción del problema de opción de compra al problema de difusión.
  - Reducción del problema de opción de venta al problema de difusión.
  - Aplicación del MDA a opciones europeas.
  - Solución de la ecuación de difusión con condiciones de frontera mediante el MDA.
- Discusión, resultados y simulaciones.
- Conclusiones

SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE BLACK-SCHOLES A TRAVÉS DEL MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE ADOMIAN.[5]

PhD. Eric Ávila Vales
Mtro. Luis Blanco Cocom[6]
Mtro. Ángel G. Estrella

Resumen.

El Método de Descomposición de Adomian (MDA) es aplicado para obtener una solución rápida y confiable para la ecuación de Black-Scholes con condiciones de frontera para opciones europeas. Se transforma el problema de opción europea con condiciones de frontera al problema de una ecuación diferencial parcial de difusión con condiciones de dirichlet nulas, para luego aplicar el MDA. Las aproximaciones a las solución exacta se obtienen mediante una serie explícita cuyas componentes son fácilmente calculables.

Palabras Clave: Ecuación de Black-Scholes, opción de venta, opción de compra, método de descomposición de Adomian.

Abstract.

The Adomian Decomposition Method (ADM) is applied to obtain a fast and reliable solution to the Black-Scholes equation with boundary condition for a European option. We cast the problem of pricing a European option with boundary conditions in terms of a diffusion partial differential equation with homogeneous boundary condition in order to apply the ADM. The analytical solution of the equations is calculated in the form of an explicit series approximation with easily computable components.

Keywords: Black-Schole equation, put option, call option, Adomian decomposition method.

Classification JEL: C13, C19.

---

[5] Trabajo apoyado por CONACYT 288966 y SNI 15284 y 202539

[6] Correo Electronico : luis.blanco@cicy.mx

1. Introducción.

En 1973 Fischer Black y Myron Scholes publicaron una fórmula para encontrar el precio de opciones financieras, a la cual, Robert Merton denominó la *ecuación de Black-Scholes* [1,2]. Por sus contribuciones, Scholes y Merton recibieron el premio Nobel de economía, desafortunadamente Fisher Black falleció y no pudo recibir este premio [2].

Las herramientas usadas para intentar resolver este problema son métodos e ideas bastante especializados en el cálculo estocástico y ecuaciones diferenciales parciales. Wilmott *et al.* and Courtadon utilizan métodos de diferencias finitas para aproximar la valuación de opciones [3,4]. Geske and Johnson, MacMillan, Barone-Adesi and Whaley, Barone-Adesi & Elliot ans Barone-Adesi desarrollaron métodos de aproximación analítica [5,6,7,8,9]. Gülakç (2010), utiliza el homotopy perturbation method para encontrar una solución aproximada a la ecuación de Black-Scholes [10]. Cheng, Zhu & Liao aplican el homotopy analisys method [11], Bohner & Zheng utilizan el método de descomposición de Adomian [12], sin embargo, ellos no utilizan las condiciones de frontera para hallar la solución aproximada.

En este artículo se presenta el Método de Descomposición de Adomian (MDA) aplicado a la ecuación de difusión con condiciones de frontera de Dirichlet nulas obtenida al reducir la ecuación de Black-Scholes con condiciones de frontera no homogéneas mediante cambios de variable. El MDA, tiene el objetivo de proporcionar una solución analítica a una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales. El método se basa en considerar la descomposición de la función desconocida en una serie infinita $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, y descomponer el término no lineal de la ecuación en otra serie, $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$, donde las A_n son denominados *Polinomios de Adomian.* Tuvo sus comienzos en los 80´s, cuando George Adomian presentó y desarrolló el llamado *método de descomposición,* para resolver ecuaciones lineales y no lineales tanto para ecuaciones diferenciales ordinarias como para ecuaciones en derivadas parciales [13]. El método ha sido aplicado en varios problemas determinísticos y estocásticos, lineales y no lineales, en física, biología, química y economía [12,14,15,16].

2. Opciones de compra-venta y la ecuación de Black-Scholes.

Consideremos el problema de encontrar el precio de una opción (a cierta moneda), con vencimiento al tiempo T, con un costo K. El precio de la opción se puede pensar como el pago de una prima para tener el derecho de ejercer la opción al tiempo de vencimiento. El problema es encontrar el precio “justo” de la opción. Para hallar una solución al problema se debe de considerar las características primarias de los mercados financieros, por ejemplo, la aleatoriedad, no se sabe cuánto valdrá la moneda al paso del tiempo [2]. En general, tenemos los siguientes casos [17,18]: Supóngase que se adquiere una *opción* al tiempo *t=0,* el cual da la facultad para comprar una parte de la acción hasta o al tiempo T, *el tiempo de maduración o tiempo de expiración de la opción*.

Si la opción se ejerce a un precio fijo K, llamado *precio de ejercicio de la opción*, únicamente al tiempo de maduración T, entonces la opción es conocida como *opción de compra europea* (call option). Si la opción se puede ejercer hasta o al tiempo T, se le conoce como *opción de compra americana*.

El poseedor de una opción de compra no está obligado a ejercer esta, por lo cual, si al tiempo *T*, el precio X_t es menor que K, el poseedor de la opción podría comprar una acción por X_t en el mercado, y así el boleto expira como un trato sin valor. Si el precio X_t excede *K*, sería buena elección ejercer *la llamada*, es decir, se puede comprar la acción al precio *K*, y vender al precio X_t para obtener un beneficio neto de $X_t - K$. Por tanto, el comprador de la opción de compra europea es facultado a una retribución de

$$f_0 = máx(0, X_T - K) = \begin{cases} X_T - K, si \quad X_T > K, \\ 0 \quad , si \quad X_T \leq K. \end{cases}$$

La opción de venta (*put option*) es una opción para vender una acción al precio dado *K* en o hasta una fecha particular de maduración T. Una *opción de venta europea* es ejercida solamente al tiempo de maduración, una *opción de venta americana* puede ser ejercida hasta o al tiempo T. El comprador de una opción de venta europea hace una ganancia

$$f_0 = máx(0, K - X_T) = \begin{cases} K - X_T, si \quad X_T < K, \\ 0 \quad , si \quad X_T \geq K. \end{cases}$$

En matemáticas financieras, se puede demostrar que al estudiar una estrategia de autofinanciamiento se puede llegar a la siguiente ecuación diferencial parcial denominada la *Ecuación de Black-Scholes* [*1,17*],

$$rf(t,x) = f_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx}(t,x) + rxf_x(t,x), \quad x > 0, t \in [0,T]. \qquad (1)$$

Donde, x representa el valor de la acción, t el tiempo, f el precio de una opción, r es el tipo de interés del mercado de deuda y σ es la volatilidad de la acción, medida como la desviación estándar de los logaritmos de la cotización de la acción. En adelante, se trabajará con opciones europeas.

Las condiciones de frontera necesarias para solucionar la ecuación (1), para el caso de opciones de venta europeas son [18]:

- **Frontera en *x=0***. Analicemos que sucede cuando x = 0, si x = 0 al tiempo t_0, el movimiento browniano geométrico implica que x = 0 para cualquier $t \geq t_0$, en particular, de acuerdo a f_0, el pago de ejercicio de la opción al tiempo T es K, además, si se considera que no existe arbitraje, entonces el cambio del efectivo K considerando el descuento que tendría el efectivo a una tasa de interés libre de riesgo a través del tiempo t se puede aproximar por $Ke^{-r(T-t)}$. Por tanto, $f(0,t) = Ke^{-r(T-t)}$.

- **Frontera *x=T***. Analicemos, si x toma valores muy grandes, es casi seguro que no se pague el ejercicio de la opción, y entonces decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x,t) = 0$, por tanto, se considera $f(T,t) \approx 0$.

Análogamente, para el caso de la opción de compra, el análisis para las condiciones de frontera es:

- **Frontera *x=0***. Si x=0, el ejercicio de pago a la madurez es claramente cero, y así, $f(0,t) = 0$.

- **Frontera *x=T***. En el límite, cuando $x\to\infty$, el caso es más complicado. Si x toma un valor muy grande, la opción de compra se ejerce y se obtiene una ganancia de $X_T - K$ *al* tiempo T. El valor de la opción podría ser aproximada como $x - Ke^{-r(T-t)}$, cuando $x\to\infty$. Sin embargo, se puede despreciar $Ke^{-r(T-t)}$ debido a que x toma valores muy grandes, y así, se puede decir que f(x,t) ~ x para todo t, es decir, $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x,t)}{x} = 1$. Por tanto, $f(T,t) \approx x - Ke^{-r(T-t)}$, o bien, $f(T,t) \approx x$.

Otra condición utilizada para las fronteras de cualquier tipo de opción, ha sido $f(x,t) \sim e^{-r(T-t)} f_0(xe^{-r(T-t)})$, la cual ha tenido interpretación económica en el sentido de que si el precio de las acciones fueran deterministas, el precio de las acciones de x al tiempo t podría aproximarse por $xe^{-r(T-t)}$, y el valor de la opción resultante considerando el descuento correspondiente por la tasa de interés libre de riesgo. Esta fórmula, proporciona las condiciones para compras y ventas europeas, con la limitación a $f(x,t) \approx x - Ke^{-r(T-t)}$ cuando $x\to\infty$, para compras europeas [18].
Existen otras expresiones para aproximar el comportamiento limitante de las opciones europeas, Schwartz utiliza $\lim_{x\to\infty} \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = 1$, sin embargo, Persson y von Sydow, asumen que el precio de la opción es lineal con respecto a x en las fronteras para cualquier tipo de opción, entonces $\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial^2 x} = 0$, en las fronteras [18].

3. El Método de Descomposición de Adomian

El método de Descomposición de Adomian permite encontrar una solución analítica en forma de serie [12-16] y consiste en identificar la ecuación dada en partes lineal y no lineal, para luego invertir el operador diferencial de mayor orden que se encuentre en la parte lineal, y luego considerar la función desconocida como una serie cuyas componentes se encuentran bien determinadas, en seguida se descompone la función no lineal en términos de los polinomios de Adomian. Definimos las condiciones iniciales y/o de frontera y los términos que envuelven a la variable independiente como aproximación inicial. Así, se encuentra de manera sucesiva los términos de la serie solución por una relación de recurrencia.

En general, el esquema es el siguiente: dada una ecuación diferencial,

$$Fu(t) = g(t) \tag{2}$$

donde F representa un operador diferencial no lineal que envuelve tanto términos lineales como no lineales. Entonces la ecuación (2) puede ser escrita como,

$$Lu(t) + Ru(t) + Nu(t) = g(t) \tag{3}$$

Donde el operador lineal es $L + R$, L es un operador fácilmente invertible y R el remanente del operador lineal, N representa el operador no lineal y g es la función independiente de $u(t)$.

Resolviendo para $Lu(t)$,

$$Lu(t) = g(t) - Ru(t) - Nu(t)$$

Como L es invertible, operando con la inversa L^{-1} tenemos que,

$$L^{-1}Lu(t) = L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t)$$

Una expresión equivalente es

$$u(t) = \varphi + L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru(t) - L^{-1}Nu(t) \tag{4}$$

donde φ es la constante de integración y satisface $L_\varphi = 0$. Para problemas con valor inicial en $t = a$, tenemos convenientemente definido L^{-1} para $L = \frac{d^n y}{dx^n}$ como la n-ésima integración definida de a a t.

Este método asume una solución en forma de serie infinita para la función desconocida $u(t)$ dada por,

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) \tag{5}$$

El término no lineal $Nu(t)$ es descompuesto como

$$Nu(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \tag{6}$$

donde A_n es llamado *polinomio de Adomian*, y depende de la particularidad del operador no lineal. Las A_n 's son calculadas de manera general por la siguiente fórmula:

$$A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n} N\left(\sum_{j=0}^{\infty} \lambda^j u_j\right)\Big|_{\lambda=0} \tag{7}$$

La fórmula (7) es fácil de codificar en algún software como MATLAB o MAPLE [19].

Sustituyendo las expresiones dadas por (5), (6) y (7) en la ecuación (4) tenemos,

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) = \varphi + L^{-1}g(t) - L^{-1}R\sum_{i=0}^{\infty} u_i(t) - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1, \dots, u_n)$$

Consecuentemente obtenemos,

$$\begin{cases} u_0(t) = \varphi + L^{-1}g \\ u_{n+1}(t) = -L^{-1}Ru_n(t) - L^{-1}A_n(u_0, u_1, \dots, u_n) \end{cases} \tag{8}$$

La solución, en la práctica estará dada por la *k*-ésima aproximación ψ_k :

$$\psi_k = \sum_{i=0}^{k-1} u_i(t) \tag{9}$$

La descomposición de la solución en serie, generalmente converge muy rápido. La rapidez de esta convergencia hace que se necesiten pocos términos para el análisis de la solución. Las condiciones para las cuales el MDA converge ha sido fuertemente estudiada por Cherruault [20], Cherruault and Adomian [21], and Abbaoui and Cherruault [22,23].

4. Soluciones de la ecuación de Black-Scholes vía el MDA.

4.1. Aplicación directa del MDA.

Consideremos la ecuación (1) con función terminal $f(T,x) = f_T$, la cual, $f_T = max\ (x - K,0)$, si se trata de una opción de compra, o $f_T = max\ (K - x,0)$, si se trata de una opción de venta. Se puede aplicar el MDA considerando a los operadores como lo menciona [12],

$$L = (.)_t, \quad R = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 (.)_{xx} + rx(.)_x - r(.), \quad N = 0, \quad \text{y} \quad g = 0.$$

Reescribiendo la ecuación (1)

$$f_t(t,x) = -\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 f_{xx}(t,x) - rxf_x(t,x) + rf(t,x),$$

Aplicando $L^{-1} = \int_{s=t}^{s=T} (.)\, ds$ obtenemos,

$$L^{-1}f_t(t,x) = -\frac{1}{2}\sigma^2 L^{-1}x^2 f_{xx}(t,x) - rL^{-1}xf_x(t,x) + rL^{-1}f(t,x),$$

$$f(T,x) - f(t,x) = -\frac{1}{2}\sigma^2 \int_{s=t}^{s=T} x^2 f_{xx}(s,x)\, ds - r\int_{s=t}^{s=T} xf_x(s,x)\, ds + r\int_{s=t}^{s=T} f(s,x)\, ds$$

$$f(t,x) = f_T + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{s=t}^{s=T} x^2 f_{xx}(s,x)\, ds + r\int_{s=t}^{s=T} xf_x(s,x)\, ds - r\int_{s=t}^{s=T} f(s,x)\, ds$$

Asumiendo que la solución se puede expresar en términos de una serie infinita,

$$f(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t,x)$$

Obtenemos,

$$\sum_{i=0}^{\infty} f_i(t,x) = f_T + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{s=t}^{s=T} x^2 \sum_{i=0}^{\infty} f_{ixx}(t,x)\, ds + r\int_{s=t}^{s=T} x \sum_{i=0}^{\infty} f_{ix}(t,x)\, ds - r\int_{s=t}^{s=T} \sum_{i=0}^{\infty} f_i(t,x)\, ds$$

$$\sum_{i=0}^{k} f_i(t,x) = \mathrm{f_T} + \frac{1}{2}\sigma^2 \sum_{i=0}^{k} \int_{s=t}^{s=T} x^2 f_{ixx}(t,x)\, ds + r\sum_{i=0}^{k} \int_{s=t}^{s=T} x f_{ix}(t,x)\, ds - r\sum_{i=0}^{k} \int_{s=t}^{s=T} f_i(t,x)\, ds$$

Y cada término de la aproximación está representado determinado por

$$\begin{cases} f_0(t,x) = f_T \\ f_{n+1}(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2 \int_{s=t}^{s=T} x^2 f_{nxx}(t,x)\, ds + r\int_{s=t}^{s=T} x f_{nx}(t,x)\, ds - r\int_{s=t}^{s=T} f_n(t,x)\, ds. \end{cases} \quad (10)$$

Para n>0. Nótese que para obtener la *(k+1)*-ésima aproximación ψ_{k+1} truncando la serie solución $f\ (t,x)$ con k+1 términos está dada por:

$$f(t,x) \approx \psi_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} f_i(t,x) \quad (11)$$

Nótese que en ningún momento se utilizaron condiciones de frontera, por tanto, cuando se consideren los problemas de condiciones de frontera se le dará un trato especial, como se verá a continuación.

4.2 Reducción del problema de opción de compra al problema de difusión

Ahora, considérese el problema de valor inicial y condiciones de frontera para la valoración de la opción de compra (*Call Option)*, $C\ (t,x)$,

$$\begin{cases} rC(t,x) = C_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 C_{xx}(t,x) + rxC_x(t,x), & x > 0, t \in [0,T] \\ C(T,x) = máx(x-K,0), & \\ C(t,x) = x - Ke^{-r(T-t)}, & \text{cuando } x \to \infty \\ C(t,0) = 0, & \forall t > 0\,. \end{cases} \quad (12)$$

Para reducir el problema (12) a un problema de difusión se utilizan los siguientes cambios de variable según se presenta en [17,24],

$$\tau = \frac{1}{2}\sigma^2(T-t), \tag{13}$$

$$y = ln\left(\frac{x}{K}\right), \tag{14}$$

$$C(t,x) = KV(\tau,y), \tag{15}$$

Reduciendo así la ecuación (12) en

$$-V_\tau(\tau,y) + V_{yy}(\tau,y) + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)V_y(\tau,y) = \frac{2r}{\sigma^2}V(\tau,y) \tag{16}$$

Con condición inicial

$$V(0,y) = \frac{1}{K}C(T,x) = \frac{1}{K}máx(x-K,0) = \frac{1}{K}máx(Ke^y - K,0) = máx(e^y - 1,0)$$

Ahora, utilizando la siguiente transformación:

$$U(\tau,y) = e^{ay+b\tau}V(\tau,y)$$

tomando $a = \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)$ y $b = (1+a)^2$, entonces el problema (12) se transforma en

$$\begin{cases} U_t(\tau,y) = U_{yy}(\tau,y), \quad y > 0, t \in [0,T] \\ U(0,y) = máx\left(e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)y} - e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)y}, 0\right), \\ U(\tau,L) = e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)L+\frac{1}{4}(\gamma+1)^2\tau} - e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)L+\frac{1}{4}(\gamma-1)^2\tau}, \\ U(\tau,0) = 0, \quad \forall\tau > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Así, la solución a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes transformándola a una ecuación de difusión está dada por

$$C(t,x) = Ke^{-\frac{1}{2}(\gamma+1)y-\frac{1}{4}(\gamma-1)^2\tau}U(\tau,y), \tag{18}$$

donde τ, y están dadas por (13) y (14).

4.3 Reducción del problema de opción de venta al problema de difusión

Ahora, considérese el problema de Black-Scholes con valor inicial y condiciones de frontera, para la valoración de la opción de venta, *Put Option,* $P\ (t,x)$,, dada por

$$\begin{cases} rP(t,x) = P_t(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 P_{xx}(t,x) + rxP_x(t,x), \quad x > 0, t \in [0,T] \\ P(T,x) = máx(K-x,0), \\ P(t,x) = Ke^{-r(T-t)} - x, \qquad \text{cuando } x \to 0 \\ P(t,x) = 0, \qquad \text{cuando } x \to \infty, t \in [0,T]. \end{cases} \tag{19}$$

Se puede reducir el problema (19) a un problema de difusión, utilizando los cambios de variable (13), (14) y (15), se obtiene una ecuación similar a (16),

$$-V_\tau(\tau,y) + V_{yy}(\tau,y) + \left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)V_y(\tau,y) = \frac{2r}{\sigma^2}V(\tau,y) \tag{20}$$

con condición inicial

$$V(0,y) = \frac{1}{K}P(T,x) = \frac{1}{K}máx(K-x,0) = \frac{1}{K}máx(K-Ke^y,0) = máx(1-e^y,0)$$

Luego, se aplica una transformación de la siguiente forma,

$$U(\tau,y) = e^{ay+b\tau}V(\tau,y)$$

Análogo al caso anterior, si $a = \frac{1}{2}\left(\frac{2r}{\sigma^2} - 1\right)$ y $b = (1+a)^2$, entonces el problema (19) se transforma en

$$\begin{cases} U_\tau(\tau,y) = U_{yy}(\tau,y), \quad y > 0, t \in [0,T] \\ U(0,y) = máx\left(e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)y} - e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)y}, 0\right), \\ U(\tau,L) = e^{\frac{1}{2}(\gamma-1)L + \frac{1}{4}(\gamma-1)^2\tau} - e^{\frac{1}{2}(\gamma+1)L + \frac{1}{4}(\gamma+1)^2\tau}, \\ U(\tau,0) = 0, \qquad \forall \tau > 0. \end{cases} \tag{21}$$

Por tanto, la solución a la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes transformándola a una ecuación de difusión está dada por

$$P(t,x) = Ke^{-\frac{1}{2}(\gamma-1)y - \frac{1}{4}(\gamma+1)^2\tau}U(\tau,y), \tag{22}$$

donde $\tau,\ y$ están dadas por (13) y (14).

4.4 Aplicación del MDA a opciones europeas.

Dado el sistema

$$\begin{cases} u_\tau(\tau, y) = u_{yy}(\tau, y), \quad y > 0, t \in [0, T] \\ u(0, y) = u_0(y). \end{cases} \tag{23}$$

Siguiendo el algoritmo del MDA, considerando $L = \frac{du}{d\tau}, R = \frac{d^2u}{dx^2}, N = 0,$ y $g = 0,$ entonces obtenemos,

$$L^{-1}u_\tau(\tau, y) = L^{-1}u_{yy}(\tau, y),$$
$$u(\tau, y) = u(0, y) + \int_{s=0}^{\tau} u_{yy}(s, y)ds$$

Asumiendo una solución en forma de serie infinita $u(\tau, y) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(\tau, y),$ tenemos,

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(\tau, y) = u(0, y) + \int_{s=0}^{\tau} \sum_{i=0}^{\infty} u_{iyy}(s, y), ds$$

Para una aproximación con k+1 términos tenemos,

$$\sum_{i=0}^{k} u_i(\tau, y), = u(0, y) + \int_{s=0}^{\tau} \sum_{i=0}^{k} u_{iyy}(s, y), ds$$
$$\sum_{i=0}^{k} u_i(\tau, y), = u(0, y) + \sum_{i=0}^{k} \int_{s=0}^{\tau} u_{iyy}(s, y)ds$$

Por lo cual, la (k+1)-ésima aproximación a la solución está dada por,

$$\psi_k(\tau, y) = \sum_{i=0}^{k-1} u_i(\tau, y) \approx u(\tau, y) \tag{24}$$

Así, la solución al problema original queda determinada para la opción de compra, por

$$C(t, x) = Ke^{-\frac{1}{2}(\gamma+1)y - \frac{1}{4}(\gamma-1)^2\tau}\psi_k(\tau, y), \tag{25}$$

Y para la opción de venta,

$$P(t, x) = Ke^{-\frac{1}{2}(\gamma-1)y - \frac{1}{4}(\gamma+1)^2\tau}\psi_k(\tau, y)\,, \tag{26}$$

donde $\tau,\ y$ están dadas por (13) y (14).

4.5 Solución de la ecuación de difusión con condiciones de frontera mediante el MDA

El método de Descomposición de Adomian no es apropiado para solucionar ecuaciones diferenciales parciales con condiciones de frontera no homogéneas, pero bajo un cambio de variable se puede transformar el problema de valor inicial y condiciones de frontera no homogéneas a un problema de valor inicial con condiciones de frontera homogéneas como lo mencionan Adomian & Rach en 1992 y Lou *et al.* en 2006 [25,26]. Transformando el problema original siguiendo la metodología presentada por Lou *et al.*, asúmase que

$$U(\tau, y) = \mathrm{u}(\tau, y) + w(\tau, y) \quad (27)$$

con

$$w(\tau, y) = U(0, y) + \big(U(0, y) - U(\tau, L)\big)\left(\frac{y - y0}{L - y0}\right).$$

Por lo cual, los problemas (17) y (21) se adquieren una forma general,

$$\begin{cases} u_\tau(\tau, y) = u_{yy}(\tau, y) - w_\tau(\tau, y), & y > 0, t \in [0, T] \\ u(0, y) = u_0(y) - w(0, y), & \\ u(\tau, L) = 0, & \\ u(\tau, 0) = 0, & \forall \tau > 0. \end{cases} \quad (28)$$

Donde $\mathrm{u}_0(\mathrm{y}) = \text{máx}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\gamma+1)\mathrm{y}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{y}}, 0\right)$ si se trata de una opción de compra, o $\mathrm{u}_0(\mathrm{y}) = \text{máx}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\gamma-1)\mathrm{y}} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\gamma+1)\mathrm{y}}, 0\right)$, si el problema corresponde a una opción de venta.

Ahora, siguiendo el algoritmo del MDA, consideremos, $L = \frac{du}{d\tau} R = \frac{d^2u}{dx^2}, N = 0,$ y $g = -\mathrm{w}_t(\tau, y).$ Por tanto,

$$L^{-1}u_\tau(\tau, y) = -L^{-1}w_\tau(\tau, y) + L^{-1}u_{yy}(\tau, y),$$

$$u(\tau, y) = u(0, y) - L^{-1}w_\tau(\tau, y) + \int_{s=0}^{\tau} u_{yy}(s, y)ds.$$

Considerando una solución en forma de serie infinita $u(\tau, y) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(\tau, y)$, tenemos,

$$\sum_{i=0}^{\infty} u_i(\tau, y) = u(0, y) - L^{-1}w_\tau(\tau, y) + \int_{s=0}^{\tau} \sum_{i=0}^{\infty} u_{iyy}(s, y)\, ds.$$

Para una aproximación con k+1 términos,

$$\sum_{i=0}^{k} u_i(\tau, y) = u(0, y) - L^{-1}w_\tau(\tau, y) + \int_{s=0}^{\tau} \sum_{i=0}^{k} u_{iyy}(s, y)\, ds\,,$$

$$\sum_{i=0}^{k} u_i(\tau, y) = u(0, y) - L^{-1}w_\tau(\tau, y) + \sum_{i=0}^{k} \int_{s=0}^{\tau} u_{iyy}(s, y)ds\,.$$

Y los términos de la serie quedan completamente determinados por

$$\begin{cases} u_0(\tau, y) = u(0, y) - L^{-1}w_\tau(\tau, y), \\ u_{n+1}(\tau, y) = \int_{s=0}^{\tau} u_{iyy}(s, y)ds. \end{cases} \quad (29)$$

Por lo cual, la (k+1)-ésima aproximación a la solución está dada por,

$$u(\tau, y) \approx \psi_k(\tau, y) = \sum_{i=0}^{k-1} u_i(\tau, y) \quad (30)$$

La solución al problema original queda determinada para la opción de compra, por

$$C(t, x) = Ke^{-\frac{1}{2}(\gamma+1)x - \frac{1}{4}(\gamma-1)^2\tau}(\psi_k + w)(\tau, y), \quad (31)$$

Y para la opción de venta

$$P(t, x) = Ke^{-\frac{1}{2}(\gamma-1)x - \frac{1}{4}(\gamma+1)^2\tau}(\psi_k + w)(\tau, y). \quad (32)$$

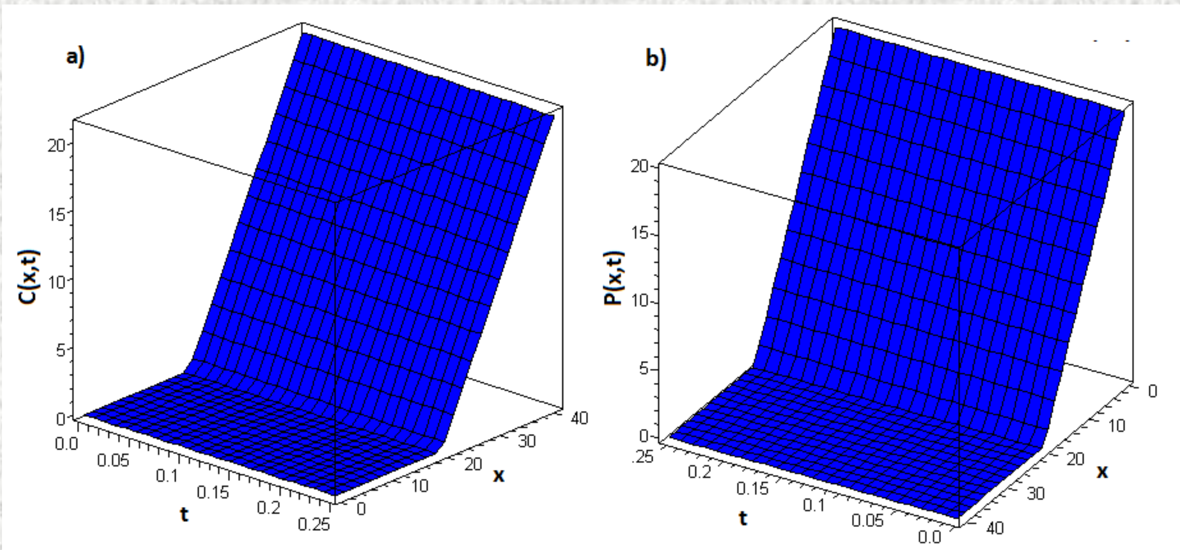
5. Discusión, resultados y simulaciones.

Bajo las condiciones de un mercado fluctuante, la mejor elección para simular el comportamiento en los costos de opciones de compra o venta europeas, es considerar el problema de la ecuación de Black-Scholes con condiciones de frontera no homogéneas, debido a que asemejan la realidad del mercado, ya que en ella intervienen el tiempo de maduración y las consideraciones sobre la tasa de interés libre de riesgo. En esta sección se presenta simulaciones para valuar opciones de compra y venta utilizando los problemas (12) y (19) con valores de $r = 0.05, \sigma = 0.317, K = 20,\ T = 0.25$ *(3 meses)*.

Se aplicó el MDA directamente a la ecuación (1), es decir, se aplicó el algoritmo a la ecuación de Black-Scholes utilizando únicamente la condición inicial f_0, esta metodología ha sido presentada en la literatura por Bohner y Zheng (2009) [12]. Los resultados de las simulaciones se presentan en la Figura 1. En la figura 1a) se aprecia el comportamiento que tendría el costo de la opción de compra a través del tiempo y en la Figura 1b) se presenta la solución de la opción de venta.

Cuando se consideran las condiciones de frontera del problema (1), es decir, se trabaja en los problemas (12) y (19) para la opción de compra y venta, respectivamente, se puede seguir la metodología presentada en este artículo, la cual, consiste en crear un nuevo problema de ecuaciones diferenciales reducido a una ecuación de difusión, y aplicar el MDA directamente utilizando únicamente la condición inicial. Los resultados varían con respecto a la solución del problema anterior (Figura 1), la aproximación a las soluciones de los problemas (12) y (19) se presentan en la Figura 2.

Figura 1. Solución aproximada aplicando el MDA directamente con k=10 a la ecuación de Black-Scholes sin condiciones de frontera con parámetros $\mathrm{r}=0.05, \sigma=0.317, \mathrm{K}=20,\ \mathrm{T}=0.25$ (3 meses) para la opción de compra a) y opción de venta b).

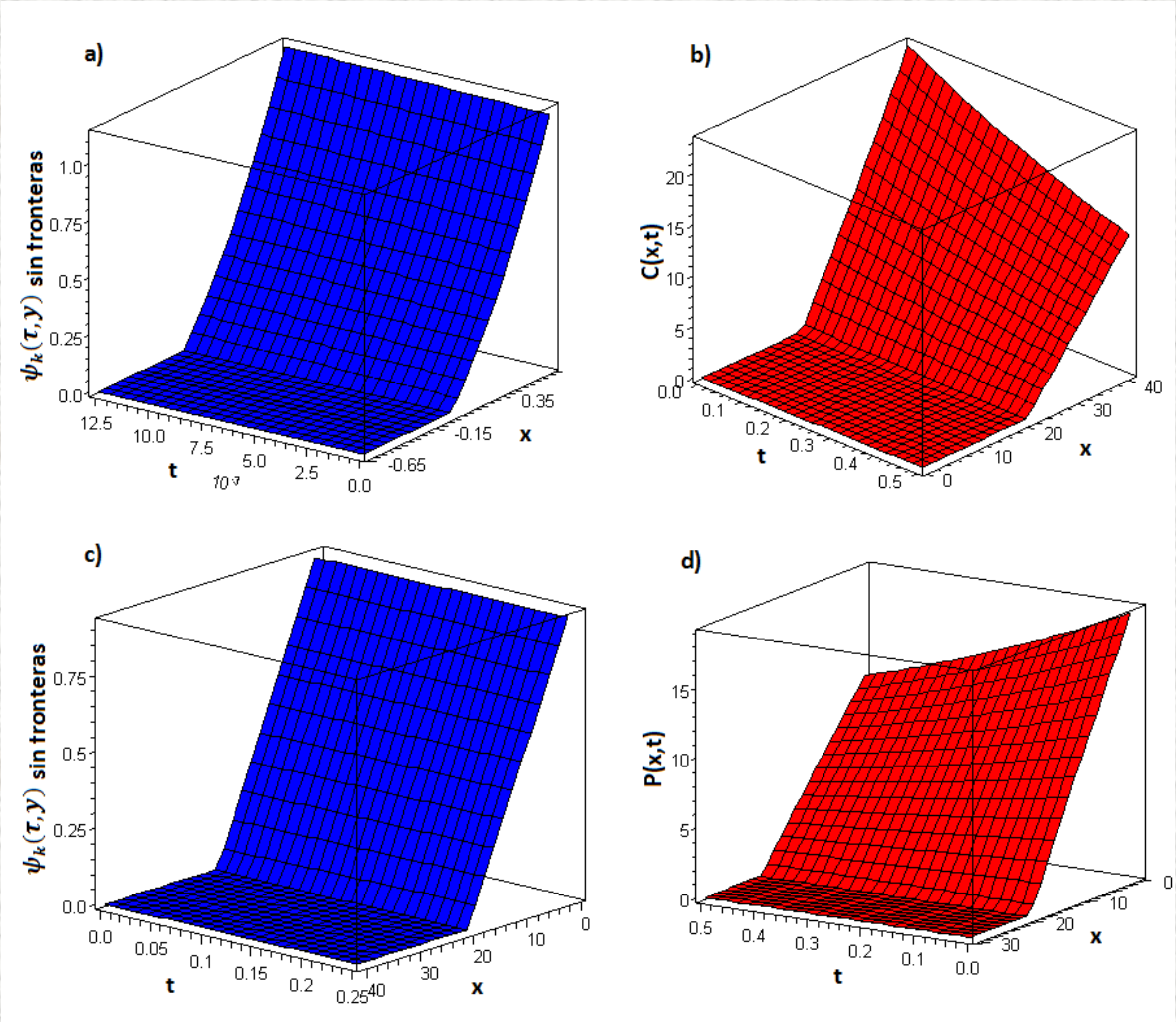


Fuente de Consulta: Elaboración Propia.

Ahora, para utilizar las condiciones de frontera de la ecuación de difusión en (17) y (21) para los problemas relacionados a (12) y (19), se consideró la descomposición de la solución desconocida en dos partes, una que era desconocida y por tanto, sería aproximada por el MDA, y otra que queda bien determinada por las condiciones de frontera, $w(\tau, y)$. Con esta metodología se obtiene un nuevo problema de difusión con condiciones de frontera homogéneas. Los resultados de las simulaciones del sistema (28) dados por las expresiones (31) y (32) se encuentra en las Figuras 3 y 4, en ellas, también se aprecian los errores absolutos entre las simulaciones obtenidas al aplicar el MDA considerando la ecuación de difusión sin utilizar condiciones de frontera con respecto a las simulaciones obtenidas utilizando las condiciones de frontera (figuras 3d) y 4d)).

Revista ECORFAN,Vol.2,núm.5,2011,pp.48-69

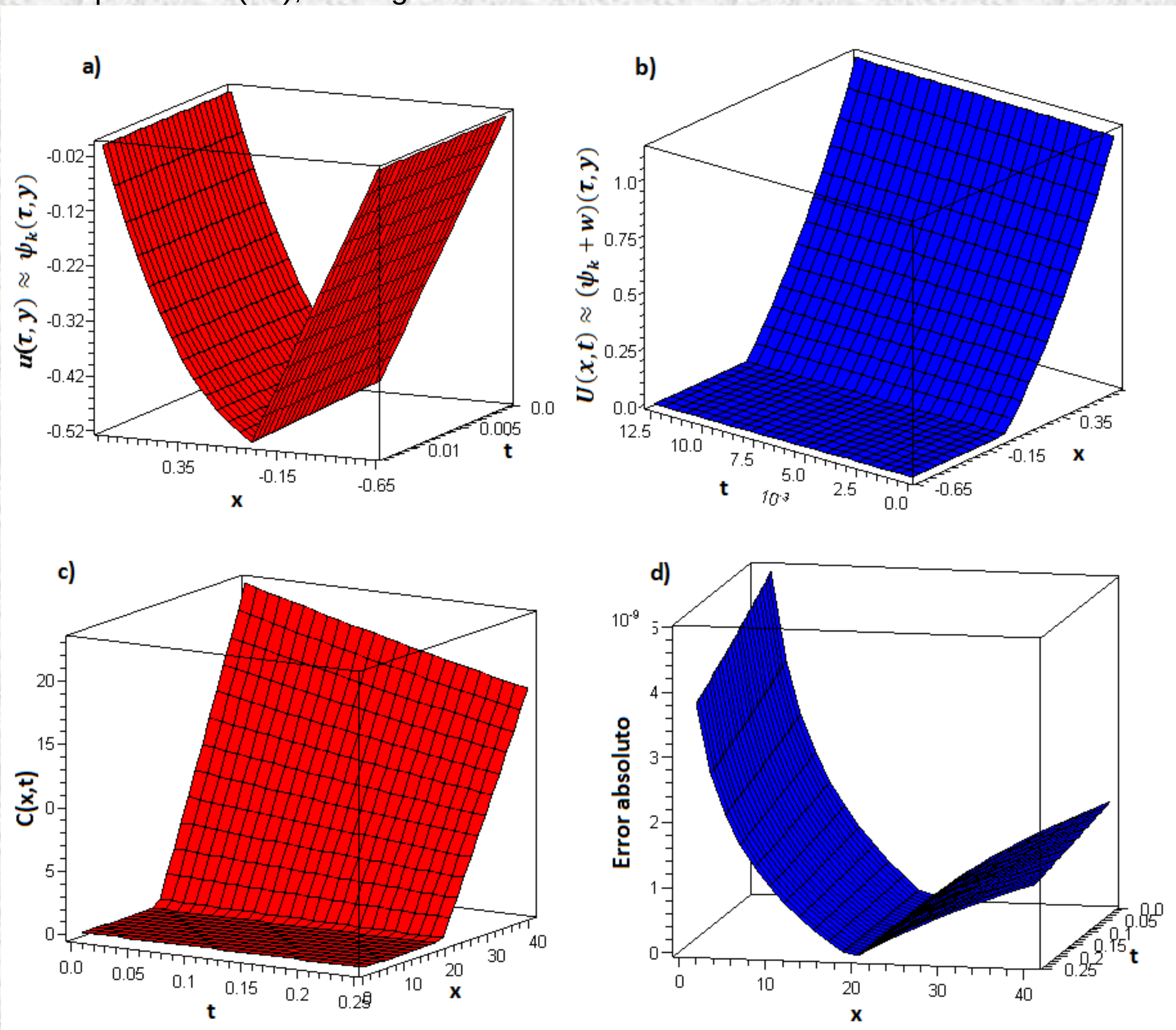
Figura 2. Solución aproximada aplicando el MDA a la ecuación de difusión (23) con k=10 obtenida de la ecuación de Black-Scholes sin condiciones de frontera con parámetros $r = 0.05, \sigma = 0.317, K = 20,\ T = 0.25$ (3 meses) para la opción de compra a) y opción de venta c), las soluciones según las fórmulas (25) y (26) se presentan en b) y d), respectivamente.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia.

Los errores en las aproximaciones pudieran traducirse en posibles pérdidas de efectivo cuando se trabaja con precios elevados en las opciones. Por tanto, la mejor elección es considerar todo el conjunto de condiciones o supuestos necesarios para que el modelo de Black-Scholes refleje la realidad en las cotizaciones para las opciones en el mercado financiero. Por ello, el MDA es una alternativa para solucionar el problema de la ecuación de Black-Scholes haciendo los cambios de variable adecuados.

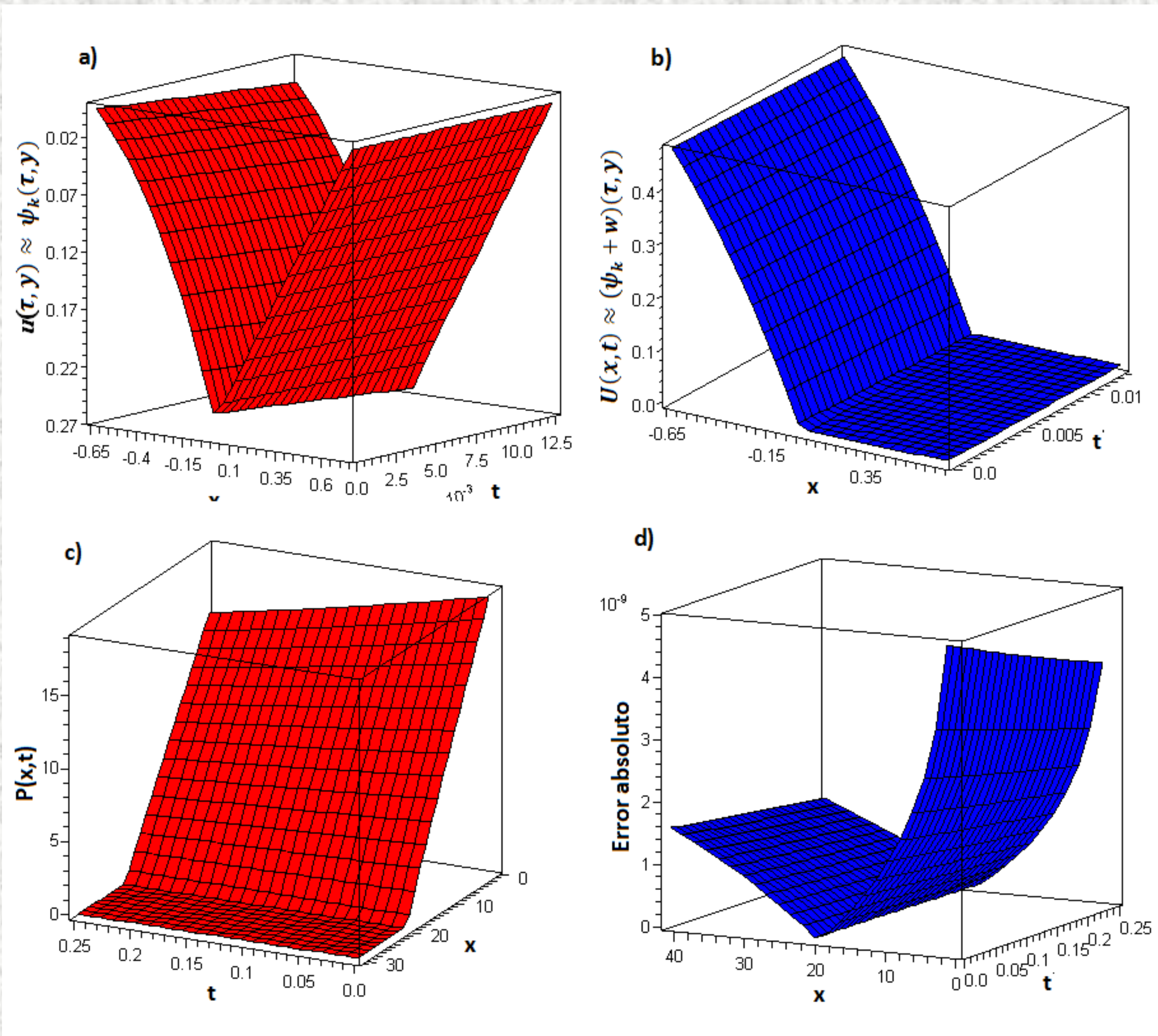
Figura 3. a) Solución aproximada aplicando el MDA a la ecuación de difusión con condiciones de frontera de dirichlet nulas según la ecuación (28) con k=10, obtenida del problema de Black-Scholes con parámetros r=0.05,σ=0.317,K=20,T=0.25 (3 meses) del problema (17). En b) se presenta la solución al problema (17) usando la igualdad (27). La solución aproximada según la fórmula (31) se presenta en c), y en d) se presenta la gráfica del error entre aproximaciones obtenidas por el MDA con y sin utilizar las condiciones de frontera del problema (17), ver Figura 2.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia.

Revista ECORFAN,Vol.2,núm.5,2011,pp.48-69

Figura 4. a) Solución aproximada aplicando el MDA a la ecuación de difusión con condiciones de frontera de dirichlet nulas según la ecuación (28) con k=10, obtenida del problema de Black-Scholes con parámetros $r = 0.05, \sigma = 0.317, K = 20,\ T = 0.25$ (3 meses) del problema (21). En b) se presenta la solución al problema (21) usando la igualdad (27). La solución aproximada según la fórmula (32) se presenta en c), y en d) se presenta la gráfica del error entre aproximaciones obtenidas por el MDA con y sin utilizar las condiciones de frontera del problema (21), ver Figura 2.



Fuente de Consulta: Elaboración Propia.

6. Conclusiones

El método de descomposición de Adomian por su rápida convergencia como lo mencionan Cherruault [20], Adomian and Cherruault [21], Abbaoui y Cherruault [22,23] lo hacen una herramienta alternativa y eficaz para solucionar el problema de la ecuación de Black-Scholes.

Los resultados obtenidos al reducir la ecuación original a una ecuación de difusión con condiciones de dirichlet nulas para utilizar las condiciones de frontera muestran la eficacia del método. Así, la metodología presentada en este artículo puede ser muy útil a las personas que cotizan el precio de las opciones.

Referencias

[1] F. Black, M. Scholes (1973). *The pricing of option and corporate liabilities.* The Journal of Political Economy. 81(3), pp. 637-654
.

[2] E. J. Ávila-Vales (1998). *Opciones para ciertos riesgos*. Eureka. 13, pp. 64-70.

[3] P. Wilmott, S. Howison, J. Dewynne, The *Mathematics of Financial Derivatives*. Cambridge University Press, Cambridge,1997.

[4] G. Courtadon (1982). *A more accurate finite difference approximations for the valuation of options*, J. Finan. Quart. Anal. 17, pp. 697–703

[5] R. Geske and H. Johnson (1984). *The American put options valued analytically*, J. Finance. 39, pp. 1511–1524.

[6] W. MacMillan (1986). *An analytical approximation for the American put prices*, Adv. Futures Options Res. 1, pp. 119–139.

[7] G. Barone-Adesi and R Whaley (1978). *Efficient analytic approximation of American option values.* J. Finance 42, pp. 301–320.

[8] G. Barone-Adesi and R. Elliot (1991). *Approximations for the values of American options*, Stochastic Anal. Appl. 9, pp. 115–131.

[9] G. Barone-Adesi (2005). *The saga of the American put*. J. Banking Finance. 29, pp. 2909–2918.

[10] V. Gülakç (2010). The *homotopy perturbation method for the Black-Scholes equation*. J. Stat. Comput. Simulation. 80(12), pp. 1349-1354.

[11] J. Cheng, S.-P. Zhu, S.-J. Liao (2010). *An explicit series approximation to the optimal exercise boundary of American put options*. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations. 15(2), pp. 1148-1158.

[12] M. Bohner, Y. Zheng (2009). *On analytical solutions of the Black-Scholes equation.* Appl. Math. Lett. 22(3), pp. 309-313.

[13] G. Adomian, R. Rach (1983). *Nonlinear stochastic differential delay equations*. J.Math. Anal. Appl. 91, pp.94-101.

[14] M. Pujol, P. Grimalt (2003). *A non-linear model of cerebral diffusion: stability of finite differences method and resolution using the Adomian method*. Int. J. of Num. Math. for Heat and Fluid Flow. 13(4), pp. 473-485.

[15] O. D. Makinde (2007). *Solving ratio-depent pretator-prey system with constant effort harvesting using adomian decompositin method*. Appl. Math. Comput. 186, pp. 17-22.

[16] L. D. Blanco-Cocom, E. J. Ávila-Vales (2010). *The use of the Adomian decomposition method for a Sirc influenza model*. Advan. in Diff. Eq. and Control. Proc. 5(2), 115-127.

[17] J. Zavaleta-Sánchez (2007). *Aplicaciones computacionales de las EDP's asociadas a procesos estocásticos*. Universidad Tecnológica de la Mixteca. Tesis de Licenciatura. URL: http://jupiter.utm.mx/~tesis_dig/10330.pdf

[18] C. Satke (2009). A numerical solver for the multivariate Black-Scholes problem using the multigrid method. Technische Universität Wien. Diplomarbeit.
URL: http://www.asc.tuwien.ac.at/~dirk/download/thesis/satke.pdf

[19] W. Chen and Z. Lu (2004). *An algorithm for Adomian Decomposition Method.* Applied Mathematics and Computation. 159, 221-235.

[20] Y. Cherruault (1989). *Convergence of Adomian's method*. Kybernetes. 18(2), 31-38.
.
[21] Y. Cherruault, G. Adomian (1993). *Decomposition methods: a new proof of convergence*. Math. Comput. Modelling, 18(12), pp. 103-106.

[22] K. Abbaoui, Y. Cherruault (1994). *Convergence of Adomian's method applied to differential equations*. Comput. Math. Appl. 28(5), pp. 103-109.

[23] K. Abbaoui, Y. Cherruault (1995). *New ideas for proving convergence of decomposition methods*. Comput. Math. Appl. 29(7), pp. 103-108.

[24] S. Shuka (2001). *Finite-difference methods for pricing the American put option*. Advanced Mathemathics if finance Honours Project. URL:
http://www.mendeley.com/research/advanced-mathematics-finance-honours-project-finitedifference-methods-pricing-american-put-option/

[25] G. Adomian, R. Rach (1992*). A further consideration of partial solutions in the decomposition method.* Comput. Math. Appl. 23, pp. 51–64.

[26] X.G. Luo, Q.B. Wu, B.Q. Zhang (2006). *Revisit on partial solutions in the Adomian decomposition method: Solving heat and wave equations.* Journal of Mathematical Analysis and Applications. 321 (1), pp. 353-363.