Conciencia Tecnológica No. 42, Julio-Diciembre 2011

Determinación Del Valor Del Juego n x 2

Nota de divulgación

Dr. Jorge Horacio González Ortiz
Unidad Académica Multidisciplinaria Zona Media, UASLP, Rioverde, S.L.P. Blvd Universitario Km. 4.
Tel: 01 (487) 8725099 Fax: 01 (487) 8721499 Correo electrónico jorgonzz@uaslp.mx

Resumen

El presente artículo propone un método mixto (geométrico y matemático) para encontrar la solución de una manera simple, de los problemas de juegos n x 2 ó 2 x n.

Palabras clave: Toma de decisiones, Teoría de juegos, Valor del juego.

Abstract

This paper proposes a hybrid method (geometrical and mathematical) to find a simple solution of n x 2 or 2 x n game problems.

Key words: Decision making, Game theory, Value of the game.

Introducción

Los docentes de las asignaturas de matemáticas que imparten esos conocimientos en el área social, debemos buscar siempre como hacer las cosas simples, con el fin de cautivar a los jóvenes en esta área. Este artículo podrá resultar interesante para todos aquellos a los que la perfección de la matemática los seduce y toman decisiones con base en ello. Los métodos matemáticos son tan precisos que en ocasiones podrían ser considerados arteros, tanto que incluso a la postre nos pueden aislar. Se propone aquí, que los métodos matemáticos sean considerados como una fase del análisis y no la determinación única, sobre todo si se trata de explicar y predecir el comportamiento de las personas y de las organizaciones.

El presente artículo trata sobre el procedimiento para la solución de juegos de *n* x 2 ó 2 x *n*, me refiero a "*n*" estrategias y dos jugadores ó 2 estrategias y "*n*" jugadores. Utilizando para ello una metodología mixta, o sea geométrica en la primera parte y matemática en la última etapa.

La Teoría de Juegos se desarrolló en sus comienzos como una herramienta para entender el comportamiento de la economía. Experimentó un crecimiento sustancial y se formalizó por primera vez a partir de los trabajos de John Von Neumann y Oskar Morgenstern (1944) [1] antes y durante la Guerra Fría, debido sobre todo a su aplicación a la estrategia militar —en particular a causa del concepto de destrucción mutua garantizada. Desde los setenta, la teoría de juegos se ha aplicado a la conducta animal, incluyendo el desarrollo de las especies por la selección natural. A raíz de juegos como el dilema del prisionero, en los que el egoísmo generalizado perjudica a los jugadores, la teoría de juegos se ha usado en economía, ciencias políticas, ética y filosofía. Finalmente, ha atraído también la atención de los investigadores en informática, usándose en inteligencia artificial y cibernética (Bilbao, 1999) [2].

Desarrollo

Empezaremos por comentar que la diferencia entre la toma de decisiones y la teoría de juegos, es que en la primera nuestro contendiente generalmente es pasivo y en la teoría de juegos, nuestro contendiente es otro jugador.

La notación de un juego consiste en una matriz de pagos, una matriz típica de un juego de dos contendientes y tres estrategias es como la siguiente:

		Jugador II	
	Estrategias	D	E
	A	9	-3
Jugador I	B	-5	7
	C	-1	2

Tabla 1. Matriz de pagos 3 x 2

Los números dentro de la matriz son los resultados del juego para las posibles combinaciones que puede haber de sus estrategias A, B, C, D y E. Los resultados positivos convienen al jugador 1 y los negativos convienen al jugador 2.

El reto es encontrar el punto que a ambos jugadores conviene, llamado el valor del juego. Lógicamente la complejidad en la solución de un juego estará vinculada con el número de jugadores y de las estrategias de cada jugador. Así los juegos de 2 x 2 se resuelven por métodos aritméticos y algebraicos, los juegos de 3 x 2 y 2 x 3 por el método de los subjuegos y los juegos de 3 x 3 y mayores, se resuelven mediante Programación Lineal (Izar, 1998) [3].

Pero en este artículo vamos a tratar el caso de los juegos *n* x 2 ó 2 x *n*. Una técnica muy objetiva para la solución de esta categoría de juegos es el Método Gráfico, sin embargo este método tiene la gran desventaja de que la determinación del resultado del juego puede perder en exactitud pues es afectado por la ineficiencia de una lectura visual directa y/o por las imprecisiones de un mal trazo.

Aquí presentamos entonces una solución al problema mencionado, conservando la simpleza y objetividad del Método Geométrico y superando el inconveniente de la inexactitud visual de la lectura del resultado, mediante el uso de un procedimiento mixto; que es gráfico hasta cierta etapa y se transforma en matemático en el momento de determinar el valor del juego con precisión.

Procedimiento a seguir para resolver juegos *n* x 2. Para ilustrar el procedimiento tomaremos como ejemplo el problema de la Tabla 1, un juego 3 x 2 dónde el jugador 1 busca maximizar:

1) Verificar que no exista punto de silla de montar, pues si lo hubiera sería la solución directa del problema. Un punto de silla de montar se presenta cuando el máximo de renglón y el mínimo por columna coinciden.
2) Verificar además si existen dominios que pudieran reducir el tamaño del juego. Los dominios son aquellas estrategias que contienen a otras, dado el caso esta se elimina.
3) Localizar dentro de los resultados de la matriz de juegos al número de mayor valor y al número de menor valor. Son 9 y -5 en el ejemplo.
4) Trazar con relativa precisión dos ejes verticales paralelos y graduarlos tomando en cuenta el número mayor (9) y el menor (-5) encontrados en el paso 3. Guarde una distancia, entre los dos ejes, similar a la altura del primer eje trazado, de manera que el espacio delimitado por los dos ejes es parecido a un cuadrado. Cada uno de estos ejes corresponde a las estrategias del jugador de 2 estrategias.
5) Para cada una de las *n* estrategias del otro jugador, trazar líneas rectas que van de un eje al otro y que toman para ello en cuenta los resultados del juego. Son: (9,-3); (-5,7) y (-1,2) en el ejemplo.
6) Elegimos la zona en la cual vamos a determinar el valor del juego bajo el siguiente criterio: a) Si el jugador de las n opciones busca maximizar el juego (*n*x2) la zona factible de solución estará en la parte superior de las líneas trazadas. Se toma como solución el vértice mínimo. b) Si el jugador de las n opciones busca minimizar el juego (2x*n*) la zona factible de solución estará en la parte inferior de las líneas trazadas. Se toma como solución el vértice máximo.
7) El valor del juego será la lectura que reporte este punto de cruce o vértice, que como ya hemos dicho podría ser poco exacto.
8) Elegimos entonces las dos rectas que determinan este punto o valor del juego y aplicamos la siguiente fórmula matemática para determinar el valor del juego con precisión matemática:

$$VJ = a + \frac{b-a}{1+\dfrac{b-d}{c-a}} \qquad \text{(Ec. 1)}$$

Donde:

a y *c*: Son los resultados de la estrategia A(9,-3), del jugador 1, representada por la recta de pendiente negativa.

b y *d*: Son los resultados de la estrategia B(-5,7), del jugador 2, representados por la recta de pendiente positiva.

Ahora bien, lo interesante es saber cómo se llegó a esta fórmula y a continuación lo describimos paso a paso.

Lo primero es establecer un diagrama con las variables de trabajo (Figura 1)

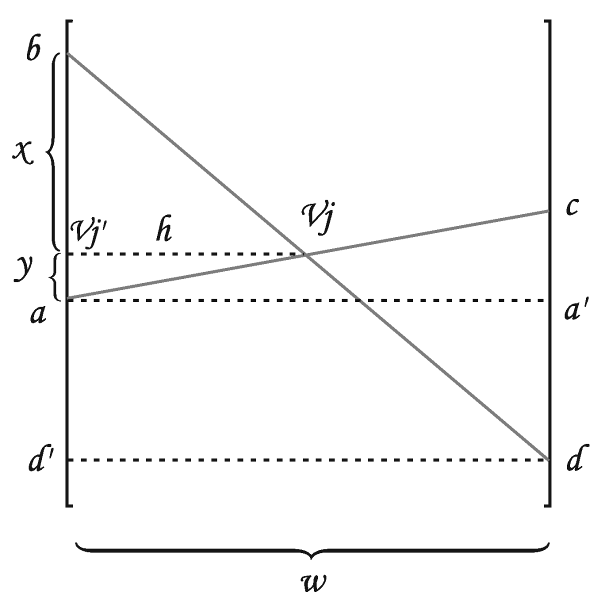

Figura 1. Esquema genérico de solución del juego.

Una vez que hemos trazado un diagrama "a mano alzada" aproximado del problema y que hemos localizado el punto *Vj*, nos quedamos solamente con las dos rectas implicadas o sea las que dan origen al punto *Vj* y que son: la línea *ac* que cruza con la línea *bd.*

Llamamos *w* a la distancia entre los ejes paralelos y *h* a la distancia del punto *Vj* al eje izquierdo.

El valor del juego (*Vj*) es igual a la suma del valor del punto a más el valor desconocido *y*:

$$Vj=a+y \qquad \text{(Ec. 2)}$$

El triángulo formado por los vértices *b*, a y *Vj* se divide en dos triángulos rectángulos mediante la recta *h.* Entonces podemos establecer que la suma de los valores desconocidos *x* y *y* es igual a la diferencia entre las distancias *b – a:*

$$x+y=b-a \qquad \text{(Ec. 3)}$$

Tenemos que el triángulo cuyos vértices son *a*, *Vj, Vj'* es semejante o sea tiene los mismos ángulos interiores que el triángulo *c, a, a'*. Y el triángulo *b, Vj, Vj'* es semejante al triángulo *b, d, d'*. Por semejanza de triángulos podemos establecer las siguientes relaciones:

$$\frac{x}{h}=\frac{b-d}{w} \quad \text{Ec. 4)} \qquad \frac{y}{h}=\frac{c-a}{w} \quad \text{(Ec. 5)}$$

Despejamos el valor de *w* de ambas fórmulas:

$$w=\frac{(b-d)h}{x} \qquad w=\frac{(c-a)h}{y}$$

Igualamos los términos:

$$\frac{(b-d)h}{x}=\frac{(c-a)h}{y}$$

Despejamos el valor de *x:*

$$x=y\frac{(b-d)}{(c-a)}$$

Sustituimos el valor de x en la Ecuación 3:

$$x+y\frac{(b-d)}{(c-a)}=b-a$$

Factorizamos y:

$$y\,(1+\frac{b-d}{c-a})=b-a$$

Despejamos el valor de *y*:

$$y=\frac{b-a}{1+\frac{b-d}{c-a}}$$

De acuerdo a la Ec. 2 sabemos que:

$$VJ=a+y$$

Entonces determinamos el valor del juego en función de valores conocidos y llegamos a la Ec. 1:

$$VJ=a+\frac{b-a}{1+\frac{b-d}{c-a}}$$

Pruebe usted resolviendo el juego de la Tabla 1, dónde el jugador 1 trata de maximizar; como podrán observar la estrategia C se descarta y el resultado es Vj=2. Ahora bien, si el jugador 1 trata de minimizar, se descarta la estrategia B y el resultado es Vj=1.

Conclusiones

Como podemos comprobar, el procedimiento para obtener el valor del juego utilizando esta fórmula es sencillo pero sobre todo tiene la ventaja de ser un resultado que tiene precisión matemática.

Está reconocida la poca simpatía que en general, los estudiosos de las ciencias administrativas tienen hacia la matemática, lo que no saben los colegas de las ciencias Socio – Administrativas, como dice Robbins (2009) [4] es que Dios les concedió los problemas fáciles a los matemáticos y a los físicos, ya que lo verdaderamente difícil de modelar, está del lado del Comportamiento Organizacional.

Referencias

[1] Von Neumann, J., Morgenstern, O., (1944), *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[2] Bilbao, J.M.y Fernández, F.R., (1999), *Avances en teoría de juegos con aplicaciones económicas y sociales,* Universidad de Sevilla, España

[3] Izar, J.M., (1998), *Fundamentos de Investigación de Operaciones para Administradores,* Vol. 2. Editorial Universitaria Potosina, S.L.P., México.

[4] Robbins, S. P., (2009), "*Comportamiento Organizacional",* Ed. Prentice Hall, México

Artículo recibido: 8 de marzo de 2011
Aceptado para publicación: 3 de octubre de 2011