Citación: Salazar, O., y Soriano, J.J. (2011). Las leyes de tercero excluido y contradicción como valores límite en lógica difusa. En: *Ingeniería, Vol. 16, No. 1, pág. 50-59*

Artículo de Investigación

Las leyes de tercero excluido y contradicción como valores límite en lógica difusa

The laws of excluded middle and contradiction as limit values in fuzzy logic

Omar Salazar Morales
Universidad Distrital
Francisco José de Caldas
Facultad de Ingeniería
osalazarm@correo.udistrital.edu.co

José Jairo Soriano Méndez
Universidad Distrital
Francisco José de Caldas
Facultad de Ingeniería
josoriano@udistrital.edu.co

Fecha recibido: Febrero 11/2011
Fecha modificado: Abril 11/2011
Fecha aceptado: Junio 11/2011

Resumen

Este artículo presenta el estudio de las leyes de tercero excluido y contradicción de la lógica clásica extendidas a la lógica difusa dado que en esta última, en general, no se satisfacen. El objetivo es presentar las condiciones por las cuales estas dos leyes se cumplen como valores límite, con la elección correcta de los operadores lógicos difusos.

Palabras clave: Operadores lógicos, lógica clásica, lógica difusa.

Abstract

This paper presents the study of the laws of excluded middle and contradiction of classical logic in fuzzy logic because in the latter, in general, are not satisfied. The aim is to present the conditions under which these two laws as limit values are met with the correct choice of the fuzzy logical operators.

Key words: Classical logic, fuzzy logic, logical operators.

1. Introducción

La lógica clásica considera proposiciones *bivalentes,* esto es, una proposición p puede tomar dos posibles valores de verdad: *falso* o *verdadero*, representados con 0 y 1. Las proposiciones se clasifican en *atómicas* y *compuestas*. Las segundas se forman a partir de las primeras uniéndolas con *operadores lógicos clásicos*. Los cinco operadores usados son: conjunción (operador "y" denotado como $\otimes$), disyunción ("o", $\oplus$), negación ("no", $'$), implicación ("si, entonces", $\Rightarrow$) y equivalencia ("si y sólo si", $\Leftrightarrow$) cuyas tablas de verdad se muestran en la Tabla I. Si p y q son proposiciones atómicas entonces $p\otimes q$, $p\oplus q$, p', $p\Rightarrow q$ y

$p \Leftrightarrow q$ son proposiciones compuestas. Las proposiciones compuestas también se usan para formar nuevas proposiciones usando los mismos operadores lógicos, por ejemplo, $(p \otimes q) \oplus (p \Rightarrow q)$.

La parte de la lógica que determina el valor de verdad de una proposición (atómica o compuesta) a partir de los valores de verdad de sus proposiciones atómicas y de la forma como se operan usando operadores lógicos se conoce como *lógica proposicional*. En esta lógica es usual sólo usar los operadores $\otimes$, $\oplus$, y $'$, dado que $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$ se pueden expresar en términos de los tres primeros como se muestra en la Tabla I (d y e).

Tabla I. Tablas de verdad de los operadores lógicos en lógica clásica. (a) “y”, (b) “o”, (c) “no”, (d) “si, entonces” y (e) “si y sólo si” [1].

(a)

p	q	$p \otimes q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(b)

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(c)

p	p'
0	1
1	0

(d)

p	q	$p \Rightarrow q$	$p' \oplus q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

(e)

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$(p' \oplus q) \otimes (p \oplus q')$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

En lógica difusa los valores de verdad se representan con un número real en el intervalo cerrado [0,1], lo cual la hace un tipo de lógica *multivalente* (múltiples valores de verdad). Las proposiciones pueden entonces tomar un continuo de valores de verdad. Los operadores lógicos difusos “y” (Δ), “o” (∇), “no” ($\neg$), “si, entonces” ($\rightarrow$) y “si y sólo si” ($\leftrightarrow$) son una generalización de los clásicos y se reducen a estos últimos cuando los valores de verdad sobre los que operan son los del conjunto $\{0,1\}$. Los operadores $\rightarrow$ y $\leftrightarrow$ también se expresan en términos de Δ, ∇ y $\neg$, pero a diferencia de su contraparte bivalente, existen varias definiciones no equivalentes entre sí [2], [3], [4].

En lógica clásica existen dos leyes importantes conocidas como *ley de tercero excluido* (1) y *ley de contradicción* (2) dadas por las siguientes fórmulas:

$$q \oplus q' = 1 \tag{1}$$

$$q \oplus q' = 0 \tag{2}$$

Siendo q una proposición que toma valores de verdad en $\{0,1\}$. Las versiones difusas de (1) y (2) están dadas al cambiar $\otimes$, $\oplus$, y $'$ por Δ, ∇ y $\neg$. Se conoce de la literatura [2], [3], [4], que en general $q \nabla \neg q \neq 1$ y $q \Delta \neg q \neq 0$, donde q toma valores de verdad en el intervalo [0,1]. Esta es una de las características que ha diferenciado la lógica difusa de la lógica clásica.

La lógica clásica ha sido un instrumento importante en el desarrollo de los circuitos digitales, y en general, de cualquier sistema donde sus elementos puedan ser modelados en forma bivalente. La lógica difusa es tema actual de aplicaciones de ingeniería [5], [6], [7], dada su capacidad para involucrar la incertidumbre y conceptos imprecisos cercanos al lenguaje natural en los modelos que se desarrollan. El tipo de aplicaciones abarcan control difuso, redes neuro-difusas, predicción de series de tiempo, pruebas de hipótesis estadísticas, entre otras.

En el diseño de sistemas basados en lógica clásica se conocen herramientas analíticas que soportan el proceso de optimización del sistema a través de simplificación, tal es el caso de los mapas de Karnaugh o el método de Quine-McCluskey usados comúnmente en el diseño de circuitos digitales [8]. En recientes aplicaciones de ingeniería [9] orientadas al control difuso se ha reconocido la importancia de la optimización de los controladores diseñados a través de un proceso análogo de simplificación. En la lógica clásica expresiones del tipo $(p\otimes q)\oplus(p\otimes q')$, que puede describir por ejemplo un circuito digital con cuatro compuertas lógicas como el de la Figura 1, puede ser simplificada simplemente a p usando la ley de tercero excluido (1) en la forma $(p\otimes q)\oplus(p\otimes q')=p\otimes(q\oplus q')=p\otimes 1=p$ debido a que en esta lógica se cumplen las propiedades de distributividad y 1 es el elemento identidad de la operación "y" ($\otimes$). El problema se encuentra en que lo anterior no es cierto si se reemplaza $\otimes$, $\oplus$, y $'$ por Δ, ∇ y $\neg$ para el caso difuso dado que, en general, la ley de tercero excluido no se cumple. Un comentario análogo aplica para expresiones del tipo $(p\oplus q)\otimes(p\oplus q')$ y el uso de la ley de contradicción (2).

Existen resultados ([2], teoremas 3.22 y 3.23) que establecen la fórmula matemática para que los operadores Δ, ∇ y $\neg$, también llamados *t-norma*, *t-conorma* y *complemento difuso* respectivamente, cumplan $q\nabla\neg q=1$ y $q\Delta\neg q=0$ para todo $q\in[0,1]$, sin embargo esto trae el problema de la pérdida de la propiedad de distributividad de los operadores Δ y ∇ uno respecto al otro ([2], teorema 3.24). Esto motiva a encontrar formas alternativas para el cumplimiento de las leyes de tercero excluido y contradicción investigando en su teoría matemática. La Tabla II muestra algunos operadores difusos tomados de la literatura [2], [17], [18], que cumplen una o ambas leyes.

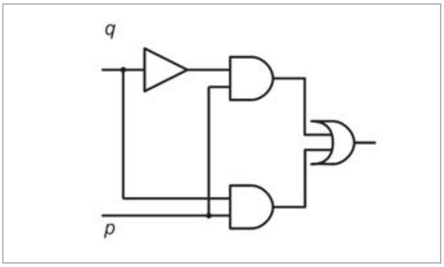

Figura 1. Circuito digital de dos entradas con cuatro compuertas lógicas. De izquierda a derecha una compuerta "no", dos compuertas "y" y una compuerta "o"

El objetivo de este artículo es mostrar que para ciertas elecciones del operador lógico difuso "no" ($\neg$) se pueden cumplir las versiones difusas de (1) y (2) por medio de un proceso de límite. Para realizar esto es necesario establecer el marco matemático de trabajo lo cual se hace en las secciones 2 y 3. En la sección 4 se presenta el resultado deseado. La sección 5 muestra la conclusión del artículo.

2. El intervalo unitario

El elemento básico en lógica difusa es el intervalo 0,1 de números reales. Aunque es de importancia este conjunto no será objeto de caracterización en este artículo. Se usarán propiedades conocidas de la literatura de las matemáticas. Para más detalles se puede consultar textos estándar de matemáticas [10] donde se presentan las propiedades básicas de los números reales $\Re$.

Tabla II. Resumen de algunos operadores difusos que satisfacen una o ambas leyes

	Tripleta de operadores con $p,q \in [0,1]$	Intervalo parámetro	Tercero excluido	Contradicción
Complemento estándar, t-norma y t-conorma de Lukasiewicz	$\neg p = 1 - p$ $p \Delta q = 0 \vee (p + q - 1)$ $p \nabla q = 1 \wedge (p + q)$		Sí	Sí
Complemento estándar, t-norma y t-conorma drásticas	$\neg p = 1 - p$ $p \Delta q = \begin{cases} p & \text{si } q = 1 \\ q & \text{si } p = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$ $p \nabla q = \begin{cases} p & \text{si } q = 0 \\ q & \text{si } p = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$		Sí	Sí
Complemento, t-norma y t-conorma de Yager	$\neg p = (1 - p^r)^{1/r}$ $p \Delta q = 1 - 1 \wedge (((1-p)^r + (1-q)^r)^{1/r})$ $p \nabla q = 1 \wedge ((p^r + q^r)^{1/r})$	$r \in (0, \infty)$	Sí	No se cumple para todo $r \in (0, \infty)$

* $a \wedge b = \inf\{a,b\}$ y $a \vee b = \sup\{a,b\}$ para $a,b \in [0,1]$

El intervalo 0,1 viene dotado de la relación de orden usual ≤ heredada de $\Re$. Esta relación de orden es total ya que tiene las siguientes cuatro propiedades para todo a,b,c∈ 0,1:

- **Reflexividad:** $a \leq a$
- **Anti-simetría:** $a \leq b$ y $b \leq a$ implican $a=b$
- **Transitividad:** $a \leq b$ y $b \leq c$ implican $a \leq c$
- **Linealidad:** $a \leq b$ o $b \leq a$

La propiedad de linealidad también se expresa diciendo que $a<b$ o $a=b$ o $a>b$, siendo estas opciones excluyentes entre sí, lo cual se conoce como *tricotomía*. Entonces $\langle [0,1]; \leq \rangle$ es un *conjunto totalmente ordenado*, también llamado *conjunto linealmente ordenado* o *cadena*.

Los conceptos de *cota superior*, *cota inferior*, *supremo* e *ínfimo* son importantes aquí. Sea el conjunto $A \subseteq \Re$ y $b \in \Re$. Se dice que b es una *cota superior* de A si y sólo si $a \leq b$ para todo $a \in A$. Una cota superior a de A es la *mínima cota superior* de A o *supremo* de A si y sólo si, para cualquier otra cota superior b de A, se cumple que $a \leq b$. Se simboliza esto de la forma $a = \sup A$. Los conceptos de *cota inferior* y *máxima cota inferior* o *ínfimo* se definen de forma similar. Esto último se simboliza de la forma $\inf A$.

Una de las propiedades más importantes de $\Re$, y en particular de $[0,1] \subset \Re$, es el siguiente teorema que establece la existencia del supremo.

Teorema 1 (Existencia de supremo) [10] *Todo conjunto no vacío de números reales superiormente acotado tiene supremo.*

Un resultado análogo para la existencia del ínfimo es el siguiente teorema.

Teorema 2 (Existencia de ínfimo) [10] *Todo conjunto no vacío de números reales inferiormente acotado tiene ínfimo.*

La unicidad del supremo e ínfimo se puede probar. Esto justifica hablar *del supremo* y *el ínfimo*.

Teorema 3 (Unicidad de supremo) *Si un conjunto no vacío de números reales tiene supremo entonces es único.*

Demostración. Sea A un conjunto no vacío de números reales y sea c una cota superior de A. Por el Teorema 1 entonces existe un b, llamado supremo, tal que para todo $a \in A$, $a \leq b$ y $b \leq c$. Sean b_1 y b_2 dos supremos de A. Entonces $b_1 \leq b_2$ ya que b_1 es un supremo y b_2 es una cota superior de A. De igual forma $b_2 \leq b_1$ ya que b_2 es un supremo y b_1 es una cota superior de A. Por anti-simetría se concluye que $b_1 = b_2$.

Teorema 4 (Unicidad de ínfimo) *Si un conjunto no vacío de números reales tiene ínfimo entonces es único.*

Demostración. La demostración es análoga a la unicidad del supremo.

De los subconjuntos de [0,1] que son de importancia son los conjuntos $\{a,b\}$ formados por dos elementos $a,b \in [0,1]$. En estos subconjuntos es claro que $a \leq b$ o $b \leq a$. En el primer caso el elemento a es una cota inferior del conjunto no vacío $\{a,b\}$, dado que $a \leq a$ y $a \leq b$, mientras que b es una cota superior dado que $a \leq b$ y $b \leq b$. De los Teoremas 1-4 se deduce que $\sup\{a,b\}$ e $\inf\{a,b\}$ existen y son únicos. Como $\inf\{a,b\}$ es una cota inferior de $\{a,b\}$ entonces cumple la desigualdad $\inf\{a,b\} \leq a$, y por ser la mayor de todas las cotas inferiores cumple la desigualdad $a \leq \inf\{a,b\}$. De esto se deduce que $\inf\{a,b\} = a$ por anti-simetría. Con un razonamiento análogo se puede deducir que $\sup\{a,b\} = b$. Usando un argumento análogo se puede mostrar que si $b \leq a$ entonces $\inf\{a,b\} = b$ y $\sup\{a,b\} = a$.

Usando la notación $a \vee b = \sup\{a,b\}$ y $a \wedge b = \inf\{a,b\}$ entonces por lo mostrado en el párrafo anterior se observa que $\vee$ y $\wedge$ son operaciones binarias en [0,1], es decir, son funciones de $[0,1]^2$ a [0,1]. Estas operaciones cumplen las siguientes propiedades para todo $a,b,c \in [0,1]$ cuyas demostraciones se pueden consultar en textos estándar de matemáticas [11], [12].

$$\begin{aligned} a \vee a &= a \\ a \wedge a &= a \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} a \vee b &= a \vee b \\ a \wedge b &= b \wedge a \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c \\ a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} a \vee (a \wedge b) &= a \\ a \wedge (a \vee b) &= a \end{aligned} \tag{6}$$

Las propiedades (3), (4), (5) y (6) son llamadas *idempotencia*, *conmutatividad*, *asociatividad* y *absorción*. Otro par de propiedades que conectan la relación de orden $\leq$ con las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son las siguientes [11], [12]:

$$a \leq b \quad \text{si y solo si} \quad a \wedge b = a \quad \text{y} \tag{7}$$

$$a \leq b \quad \text{si y solo si} \quad a \vee b = b \tag{8}$$

3. Operadores difusos

3.1. Complementos difusos

El operador lógico difuso “no” ($\neg$) es también conocido en la literatura como *complemento difuso*. Un complemento difuso está definido como una función $\neg$ para todo $a\in[0,1]$ por:

$$\begin{aligned} \neg : [0,1] &\rightarrow [0,1] \\ a &\rightarrow \neg a \end{aligned}$$

Esta función asocia el valor $\neg a\in[0,1]$ con el valor $a\in[0,1]$. Los complementos difusos siempre deben cumplir por lo menos dos requerimientos axiomáticos:

Axioma 1 (Condiciones de frontera) $\neg 0=1$ y $\neg 1=0$

Axioma 2 (Monotonía) *Para todo* $a,b\in[0,1]$, *si* $a\leq b$ *entonces* $\neg a\geq\neg b$

Existen muchas funciones que cumplen con los dos axiomas anteriores. En este artículo se asume el siguiente axioma adicional.

Axioma 3 (Continuidad) *El complemento difuso* ($\neg$) *es una función continua.*

Teorema 5 *Si* $\neg:[0,1]\rightarrow[0,1]$ *es un complemento difuso continuo, entonces es sobreyectivo.*

Demostración. Se debe demostrar que dado un $b\in[0,1]$ entonces existe por lo menos un $a\in[0,1]$ tal que $\neg a=b$. Sea la función $\phi(x)=\neg x-b$ definida para $x\in[0,1]$ con b constante. Por hipótesis $\neg$ es continua, por lo tanto ϕ también lo es. Como $\phi(0)=\neg 0-b=1-b\geq 0$ y $\phi(1)=\neg 1-b=-b\leq 0$ usando el Axioma 1, entonces por el teorema del valor intermedio del cálculo elemental aplicado a ϕ existe a lo menos un $a\in[0,1]$ tal que $\phi(a)=0$, esto es, $\neg a=b$.

Otra propiedad importante está relacionada con lo que se conoce como *punto fijo*, también conocido como *punto de equilibrio* o sólo *equilibrio* [2], que se define como sigue.

Definición 1 *Un punto fijo es un valor* $\xi\in[0,1]$ *para el cual* $\neg\xi=\xi$.

El siguiente teorema establece que si existe un punto fijo para un complemento difuso entonces debe ser único.

Teorema 6 [2] *Cada complemento difuso tiene a lo más un punto fijo.*

El siguiente teorema muestra que la continuidad del complemento difuso es condición suficiente para la existencia y unicidad del punto fijo.

Teorema 7 [2] *Si* $\neg:[0,1]\rightarrow[0,1]$ *es un complemento difuso continuo, entonces el complemento tiene un único punto fijo.*

El punto fijo ξ es un valor en el intervalo cerrado $[0,1]$, sin embargo su definición y las condiciones de frontera de los complementos difusos dadas en el Axioma 1 exigen que pertenezca en forma estricta al intervalo abierto $(0,1)$. Esto lo establece el siguiente teorema.

Teorema 8 *Si el punto fijo* ξ *existe para un complemento difuso* ($\neg$) *entonces cumple la desigualdad estricta* $0<\xi<1$.

Demostración. Por hipótesis existe el punto fijo ξ y por el Teorema 6 éste es único. Se sabe que $\xi\in[0,1]$, es decir $0\leq\xi\leq 1$. Supóngase que $\xi=0$, entonces por la definición 1 se tiene que $\neg\xi=\neg 0=0$ lo cual contradice la condición de frontera $\neg 0=1$. De igual forma supóngase que $\xi=1$, entonces $\neg\xi=\neg 1=1$ lo cual contradice la condición de frontera $\neg 1=0$. Por lo que $\xi 0$ y $\xi\neq 1$ y como consecuencia $0<\xi<1$.

Dado que los Axiomas 1 y 2 siempre se cumplen para los complementos difusos, en lo que sigue del artículo se considerarán sólo aquellos que cumplen adicionalmente el Axioma 3. Por los Teoremas 5-8 se deducen las siguientes características:

- El complemento difuso es una función sobreyectiva continua que cumple las condiciones de frontera $\neg 0=1$ y $\neg 1=0$.
- Existe y es único el punto fijo ξ que cumple la desigualdad estricta $0<\xi<1$.

La Tabla III muestra un resumen de algunos complementos difusos tomados de la literatura [2] [3], [13], [14], que cumplen con los tres axiomas dados. Se alerta al lector que los complementos aquí mostrados no son los únicos que los cumplen.

Tabla III. Resumen de algunos complementos difusos continuos

Complemento **para todo** $a\in[0,1]$	Intervalo parámetro	Valor del punto fijo	Valor alque converge
$\neg a=\dfrac{1-a}{1+ra}$	$r\in(-1,\infty)$	$\xi=\begin{cases}\dfrac{(1+r)^{1/2}-1}{r} & r\neq 0\\ 1/2 & r=0\end{cases}$	$\xi\to 0^+$ si $r\to\infty$ $\xi\to 1^-$ si $r\to -1^+$
$\neg a=(1-a^r)^{1/r}$	$r\in(0,\infty)$	$\xi=(1/2)^{1/r}$	$\xi\to 0^+$ si $r\to 0^+$ $\xi\to 1^-$ si $r\to\infty$
$\neg a=\dfrac{r^2(1-a)}{a+r^2(1-a)}$	$r\in(0,\infty)$	$\xi=\frac{r}{1+r}$	$\xi\to 0^+$ si $r\to 0^+$ $\xi\to 1^-$ si $r\to\infty$
$\neg a=1-a$		$\xi=1/2$	
$\neg a=1-(1-(1-a)^{1/r})^r$	$r\in(0,\infty)$	$\xi=1-(1/2)^r$	$\xi\to 0^+$ si $r\to 0^+$ $\xi\to 1^-$ si $r\to\infty$
$\neg a=(1-(1-(1-a^r)^{1/r})^r)^{1/r}$	$r\in(0,\infty)$	$\xi=\left(1-(1/2)^r\right)^{1/r}$	$\xi\to 0^+$ si $r\to 0^+$ $\xi\to 1^-$ si $r\to\infty$
$\neg a=\log_r\left(\dfrac{r}{1+r-r^{1-a}}\right)$	$r\in(0,\infty)$, $r\neq 1$	$\xi=\log_r\left(\dfrac{2r}{1+r}\right)$	$\xi\to 0^+$ si $r\to\infty$ $\xi\to 1^-$ si $r\to 0^+$
$\neg a^*=\begin{cases}1 & a=0\\ \exp\left(\dfrac{r}{\ln(a)}\right) & a\in(0,1)\\ 0 & a=1\end{cases}$	$r\in(0,\infty)$	$\xi=\exp(-\sqrt{r})$	$\xi\to 0^+$ si $r\to\infty$ $\xi\to 1^-$ si $r\to 0^+$

* Este complemento ha sido redefinido en $a=0$ y $a=1$ respecto al que se encuentra en la literatura [3] para evitar el cálculo del logaritmo natural en estos valores. De esta forma se logra un complemento bien definido.

3.2. T-normas

El operador lógico difuso "y" (Δ) es también conocido en la literatura como *t-norma*. Una t-norma está definida como una función Δ para todo $a,b\in[0,1]$ por:

$$\Delta:[0,1]^2\to[0,1]$$
$$\langle a,b\rangle\to a\,\Delta\, b$$

Una t-norma es una operación binaria sobre el intervalo unitario que satisface por lo menos los siguientes axiomas para todo $a,b,c\in[0,1]$:

Axioma 4 (Condición de frontera) $a\Delta 1=a$
Axioma 5 (Monotonía) *Si* $b\leq c$ *implica* $a\Delta b\leq a\Delta c$

Axioma 6 (Conmutatividad) $a\Delta b=b\Delta a$
Axioma 7 (Asociatividad) $a\Delta(b\Delta c)=(a\Delta b)\Delta c$

En la literatura [2]-[4] [14]-[18] se encuentran algunos ejemplos de t-normas definidas para todo $a,b\in[0,1]$ como las siguientes:

$$a \,\Delta\, b = a \wedge b \tag{9}$$

$$a \,\Delta\, b = a\, b \tag{10}$$

$$a \,\Delta\, b = \begin{cases} a & \text{si } b = 1 \\ b & \text{si } a = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{11}$$

Las t-normas (9), (10) y (11) son llamadas *estándar*, *producto* y *drástica*. La t-norma estándar es importante dado que representa una cota superior para cualquier otra t-norma. Esto lo establece el siguiente teorema.

Teorema 9 *Para todo* $a,b\in[0,1]$ *se cumple que* $0\leq a\Delta b\leq a\wedge b$

Demostración. La desigualdad $0\leq a\Delta b$ es clara por la definición de t-norma. Por los Axiomas 4 y 5 se deduce que $a\Delta b\leq a\Delta 1=a$ dado que $b\leq 1$. Además por el Axioma 6 se tiene que $a\Delta b=b\Delta a\leq b\Delta 1=b$ ya que a1. Si $a\leq b$ entonces $a\wedge b=a\geq a\Delta b$. De igual forma si $b\leq a$ entonces $a\wedge b=b\geq a\Delta b$.

3.2. T-conormas

El operador lógico difuso "o" (∇) es también conocido en la literatura como *t-conorma*. Una t-conorma está definida como una función ∇ para todo $a,b\in[0,1]$ por:

$$\nabla : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$$

$$\langle a, b \rangle \rightarrow a \nabla b$$

Una t-conorma es una operación binaria sobre el intervalo unitario que satisface por lo menos los siguientes axiomas para todo $a,b,c\in[0,1]$:

Axioma 8 (Condición de frontera) $a\nabla 0=a$
Axioma 9 (Monotonía) *Si* $b\leq c$ *implica* $a\nabla b\leq a\nabla c$
Axioma 10 (Conmutatividad) $a\nabla b=b\nabla a$
Axioma 11 (Asociatividad) $a\nabla(b\nabla c)=(a\nabla b)\nabla c$

Se pueden encontrar en la literatura ejemplos de t-conormas definidas para todo $a,b\in[0,1]$ como las siguientes:

$$a \nabla b = a \vee b \tag{12}$$

$$a \nabla b = a + b - a\, b \tag{13}$$

$$a \nabla b = \begin{cases} a & \text{si } b = 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{14}$$

Las t-conormas (12), (13) y (14) son llamadas *estándar*, *suma algebraica* y *drástica*. De igual forma que en el caso de las t-normas, la t-conorma estándar representa una cota inferior para cualquier otra t-conorma como lo establece el siguiente teorema.

Teorema 10 *Para todo* $a,b\in[0,1]$, *se cumple que* $1\geq a\nabla b\geq a\vee b$

Demostración. Análoga a la demostración del Teorema 9.

4. Condiciones límite

Teorema 11 *Si* $\neg:[0,1]\rightarrow[0,1]$ *es un complemento difuso continuo, entonces para todo* $a\in[0,1]$ *se cumple que* $a\wedge\neg a\leq\xi\leq a\vee\neg a$.

Demostración. Por los Teoremas 6 y 7 el punto fijo ξ existe y es único. Por el Teorema 5 el complemento es sobreyectivo, de esta forma $a\in[0,1]$ aplica *sobre* $\neg a\in[0,1]$. Si $a\leq\xi$ entonces $\neg a\neg\xi=\xi$ (por la Definición 1 y el Axioma 2) y por lo tanto $a\leq\xi\leq\neg a$. De la última desigualdad se deduce que $a\vee\neg a=\neg a\xi$ y $a\wedge\neg a=a\leq\xi$. Si $\xi\leq a$ entonces $\xi=\neg\xi\geq\neg a$ y por lo tanto $\neg a\leq\xi\leq a$. Se deduce que $a\vee\neg a=a\geq\xi$ y $a\wedge\neg a=\neg a\leq\xi$.

Reuniendo las desigualdades de los Teoremas 9, 10 y 11 se tiene que para todo $a\in[0,1]$ se cumple $0\leq a\Delta\neg a\leq a\wedge\neg a\leq\xi\leq a\vee\neg a\leq a\nabla\neg a\leq 1$, o escrita en forma resumida para cualquier t-norma y t-conorma:

La desigualdad anterior es válida para cualquier complemento difuso continuo y cualquier t-norma y t-conorma.

$$0\leq a\Delta\neg a\leq\xi\leq a\nabla\neg a\leq 1 \tag{15}$$

En general, si $\neg$ es un complemento difuso continuo que tiene un punto fijo tal que $\xi\rightarrow 1^-$ o $\rightarrow 0^+$ entonces por (15) se deduce que $a\nabla\neg a\rightarrow 1^-$ o $a\Delta\neg a0^+$ respectivamente para cualquier t-norma y t-conorma. Esto muestra la ley de tercero excluido y contradicción como valores límite en lógica difusa. Se debe observar que al cumplirse una de las dos leyes en el límite entonces la otra no lo hace. Lo anterior no contradice el Teorema 8 dado que son valores límite.

Se observa de la Tabla III que algunos puntos fijos tienden a 1 o 0 por izquierda o derecha para alguno de los puntos extremos del intervalo del parámetro del cual dependen. Este no es el caso del complemento $\neg a=1-a$, conocido como *complemento estándar* [2], [13], dado que su punto fijo tiene el valor constante 1/2.

5. Conclusión

Se ha mostrado que en lógica difusa las leyes de tercero excluido y contradicción se pueden cumplir como valores límite con la elección correcta del operador lógico difuso "no" ($\neg$), también llamado *complemento difuso*. Este complemento difuso debe ser continuo para garantizar que tenga un único punto fijo ξ. Si dicho punto fijo depende de algún parámetro, debe exigirse que tienda a 1 o 0 en su valor límite para algún valor del parámetro del cual depende. Con estas condiciones se garantiza que las leyes de tercero excluido y contradicción se cumplen también en el límite para cualquier par de operadores lógicos difusos "y" (Δ) y "o" (∇). También se ha mostrado que al cumplirse una de las dos leyes en el límite entonces la otra no lo hace.

Como trabajo futuro se espera aplicar los resultados aquí descritos en el desarrollo de métodos de simplificación de expresiones donde aparecen operadores difusos, análogos a los existentes en la lógica clásica (mapas de Karnaugh o método de Quine-McCluskey). Esto con el fin de desarrollar metodologías de optimización de sistemas difusos aplicados a ingeniería.

6. Referencias bibliográficas

[1] Supess, P. (1957). Introduction to Logic, *The University Series In Undergraduate Mathematics. Van Nostrand Reinhold Company.*

[2] Klir, G. J. y Yuan, B. (1995). Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications. *New Jersey: Prentice Hall PTR.*

[3] Nguyen, H. T. y Walker, E. A. (2006). A First Course in Fuzzy Logic, *Tercera edición. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC.*

[4] Wang, L. X .(1997). A Course in Fuzzy Systems and Control. *Prentice-Hall International, Inc.*

[5] Patil, S. S., Bhaskar, P. y Shrimanth Sudheer, L. (2011). Design and implementation of an integrated fuzzy logic controller for a multi-input multi-output system, *Defence Science Journal, Vol. 61, No. 3,* 219-227.

[6] Figueroa García J. C. y Soriano Méndez, J. J. (2008). A fuzzy logic approach to test statistical hypothesis on means. En: *Advanced Intelligent Computing Theories and Applications With Aspects of Artificial Intelligence, ser. Lecture Notes in Computer Science, D. S. Huang, D. C. Wunsch II, D. S. Levine, y K. H. Jo, Eds. Germany: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.* 316-325.

[7] Morales Laguado, L. C., Espitia Cuchango, H. E. y Soriano Méndez, J. J. (2010). Propuesta de un sistema neuro-DBR y su aplicación en la predicción de la serie de tiempo de Lorenz, En: *Ciencia e Ingeniería Neogranadina, Vol. 20, No. 2,* 31-51.

[8] Hachtel, G. D. y Somenzi, F. (1996). Logic Synthesis and Verification Algorithms. *Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.*

[9] Espitia Cuchango, H. E. (2009). Aplicación del concresor basado en relaciones booleanas para sistemas de lógica difusa tipo dos, *Tesis de Maestría en Ingeniería Industrial, Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Facultad de Ingeniería.*

[10] Bush, G. C. y Obreanu, P. E. (1968). Introducción a la matemática superior. *México D.F., México: Editorial Trillas S.A.*

[11] Grätzer, G. (1978). General Lattice Theory, *ser. Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks. New York: Academic Press Inc.*

[12] Fuchs, L. (1963). Partially Ordered Algebraic Systems, *ser. International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics. Budapest: Addison-Wesley Publishing Company Inc. Vol. 28.*

[13] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets, *Information and Control, Vol. 8, No. 3,* 338-353, 1965.

[14] Gehrke, M., Walker, C. y Walker, E. (2000). Some comments on fuzzy normal forms, *Proceedings of the ninth IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Vol. 2, San Antonio, Texas, Estados Unidos.* 593-598.

[15] Gehrke, M., Walker, C. y Walker, E. (1996). De morgan systems on the unit interval, *International Journal of Intelligent Systems, Vol. 11, No. 10,* 733-750.

[16] Gehrke, M., Walker, C. y Walker, E. (1997). A mathematical setting for fuzzy logic, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, Vol. 5, No. 3,* 223-238.

[17] Maes, K. y De Baets, B. (2005). Facts and figures on fuzzified normal forms, *IEEE Transactions On Fuzzy Systems, Vol. 13, No. 3,* 394-404.

[18] Detyniecki, M., Yager, R. R. y Bouchon-Meunier, B. (2002). Reducing t-norms and augmenting t-conorms, *International Journal of General Systems, Vol. 31, No. 3,* 265-276.

Omar Salazar Morales

Estudiante de último semestre en Ingeniería Electrónica de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, de Bogotá, Colombia. Actualmente desarrolla su trabajo de grado vinculado con el grupo de investigación Laboratorio de Automática, Microelectrónica e Inteligencia Computacional LAMIC de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital donde realiza estudios sobre la fundamentación matemática de modelos difusos aplicados a ingeniería.

José Jairo Soriano Méndez

Ingeniero Electrónico de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, de Bogotá, Colombia, e Ingeniero Químico de la Universidad Nacional de Colombia. Obtuvo su título de Maestría en Ingeniería Industrial en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Actualmente se desempeña como profesor en el área de Automática y Control en la facultad de Ingeniería de la Universidad Distrital, y es miembro del grupo de investigación Laboratorio de Automática, Microelectrónica e Inteligencia Computacional LAMIC donde realiza estudios sobre nuevos modelos difusos aplicados al control no lineal.