

Evaluando la efectividad de la descomposición MYT para la interpretación de señales fuera de control en la carta T^2

ALEX J. ZAMBRANO, LUZ A. ZAMBRANO

Departamento de Matemáticas y Estadística,
Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia*.

Resumen

En el control de procesos multivariados, la carta T^2 de Hotelling se ha utilizado ampliamente. Esta herramienta permite encontrar cambios en las medias como consecuencia de la flexibilidad necesaria para detectar señales. Por medio de la descomposición de una señal en componentes ortogonales, Mason, Young y Tracy han obtenido una interpretación de esta en la carta. Dado que un proceso es multivariado, cualquier señal fuera de control es determinado por una o más características. El propósito de este trabajo es evaluar la efectividad de la descomposición en la interpretación de señales.

Palabras y frases clave: control de calidad multivariado, estadístico T^2 de Hotelling, carta de control T^2 , selección de variables, descomposición MYT.

Abstract

In multivariate process control, Hotelling's T^2 chart has been widely used. This allows to finding changes in the mean vector as a result of the flexibility needed to detect signals. By means of decomposing of a signal into orthogonal components, Mason, Young and Tracy have obtained an interpretation of this in the chart. Since the process is multivariate, any signal out of control is determined by one or more characteristics. The purpose of this paper is to evaluate the goodness of the decomposed reports to signal interpretation.

Key words: multivariate quality control, Hotelling's T^2 statistic, T^2 control chart, selection of variables, decomposition MYT.

INTRODUCCIÓN

El uso del control estadístico de calidad es cada vez más popular, debido a la necesidad de establecer un registro frente a los productos y las variables de calidad controladas en los mismos, con el objetivo de mantener unos estándares de productividad y establecer criterios según los cuales se evaluará la calidad de una producción.

Una de las herramientas más conocidas, asociadas a este concepto, son los gráficos o cartas de control (introducidas por Shewart), las cuales permiten una mejor interpretación frente a la variabilidad que

suele presentar una producción, para poder caracterizar y controlar el comportamiento de un proceso.

En el control estadístico de calidad se han desarrollado técnicas univariadas como la carta de control de Shewart, la carta de control de sumas acumuladas (CUSUM) y la carta de control de promedios móviles ponderados exponenciales (EWMA) que permiten monitorear procesos individuales, las cuales han demostrado gran efectividad. Para aquellos procesos que combinan múltiples características de calidad, se han desarrollado técnicas como la carta de control T^2 de Hotelling y las cartas MCUSUM y MEWMA.

La carta T^2 de Hotelling, considerada como la extensión multivariada de la carta \bar{X} de Shewart, ha mostrado ser el más óptimo test estadístico en vector de medias que permite probar si un proceso está en control.

El uso de la carta de control T^2 de Hotelling para procesos multivariados es cada vez más popular por su eficacia, pero la interpretación adecuada de las causas que ocasionaron el proceso fuera de control no es efectivo.

Estudios recientes como el de Mason, Tracy y Young (1995) presentan una descomposición del estadístico T^2 de Hotelling para la interpretación de señales fuera de control, el cual no evalúa la eficacia en la interpretación.

Esta descomposición consiste en particionar el estadístico T^2 global en p componentes independientes, para un proceso con p variables, cada una de las cuales es similar a una variable T^2 individual; cada una de ellas refleja la contribución de una variable individual, siendo posible determinar qué variable o grupo de variables pudieron ocasionar la señal fuera de control.

El propósito de este trabajo es estudiar la descomposición de Mason, Young y Tracy (descomposición MYT) para evaluar su eficacia en la identificación de la variable o grupo de variables que ocasionaron que el proceso saliera de control, utilizando métodos de simulación.

1. ESTADÍSTICO T^2

Uno de los estadísticos más usados en el análisis multivariado es el estadístico T^2 de Hotelling en honor a Harold Hotelling, pionero en este campo. El T^2 no es más que un estadístico univariado calculado a partir de datos multivariados, y es una medida de la distancia estadística entre un vector de medias muestrales y el vector de medias poblacionales bajo la hipótesis nula, teniendo en cuenta la estructura de la covarianza.

Definición 1.1 (Estadístico T^2). Sea $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$ una muestra aleatoria con distribución $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Sea $\bar{\mathbf{X}} = (1/n) \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$, el vector de medias muestrales de la estimación de $\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{S} = (1/(n-1)) \sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})'$, la matriz de covarianzas muestrales de la estimación de $\boldsymbol{\Sigma}$ y $\boldsymbol{\mu}_0 = [\boldsymbol{\mu}_{10}, \boldsymbol{\mu}_{20}, \dots, \boldsymbol{\mu}_{p0}]'$. Se define:

$$T^2 = (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0)' (\mathbf{S}/n)^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \boldsymbol{\mu}_0), \tag{1}$$

donde \mathbf{S}/n es la estimación de la matriz de covarianzas de $\bar{\mathbf{X}}$.

$T^2 \sim k \cdot F_{(p, n-p)}$, con $k = (n-1)p/(n-p)$ (Johnson & Wicher, 1992), lo cual prueba que si $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_0$ v.s. $H_a : \boldsymbol{\mu} \neq \boldsymbol{\mu}_0$.

2. CARTA T^2 DE HOTELLING

La carta de control más usada en el caso multivariado está basada en el estadístico T^2 de Hotelling. Para una observación individual $\mathbf{X}_i = [X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}]'$, de una muestra aleatoria $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n$, se denota el estadístico como:

$$T^2 = (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})' \mathbf{S}^{-1} (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}}). \tag{2}$$

En las aplicaciones de control de calidad de varias variables se debe tener cuidado al seleccionar el límite de control para el estadístico T^2 de Hotelling, con base en la forma en que se esté usando la carta. Hay dos fases distintas en la utilización de las cartas de control (Maravelakis, 2003). La fase I es el uso de las cartas para establecer el control; es decir, para probar si el proceso se encontraba bajo control cuando se sacaron las p variables y se calcularon los estadísticos $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} . El objetivo en la fase I es obtener un conjunto de observaciones homogéneas bajo control a fin de poder establecer los límites de control para la fase II, la cual consiste en el monitoreo de la producción futura. En ocasiones se le denomina análisis retrospectivo (Montgomery, 2004).

Se asume que el proceso ha pasado la Fase I, por lo que se encuentra en control, la observación \mathbf{X}_i es independiente y se distribuye $N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Las estimaciones $\bar{\mathbf{X}}$ y \mathbf{S} son obtenidas usando un conjunto de datos históricos en control. El estadístico $T^2/d(n, p)$ sigue una distribución F con p y $(n-p)$ grados de libertad, multiplicado por una constante $d(n, p) = (p(n+1)(n-1))/(n(n-p))$, es decir:

$$T^2 \sim d(n, p) F_{(p, n-p)}. \tag{3}$$

El límite de esta carta por utilizar con estos supuestos es:

$$LCS = d(n, p) F_{(p, n-p)}. \tag{4}$$

Esta carta de control multivariada recibe el nombre de carta T^2 . En dicha carta no tiene importancia la línea central; tampoco hace falta el

límite inferior de control, ya que T^2 por ser un estadístico cuadrático nunca es negativo y además no se presenta ningún problema si es muy cercano a cero (eso indicaría que la observación es muy cercana al vector de medias de las variables).

Se observa una señal cuando el valor T^2 excede el limite de control dado en (4).

Las observaciones entrantes son fácilmente graficadas en una carta de control tal como se representa en la figura 1.

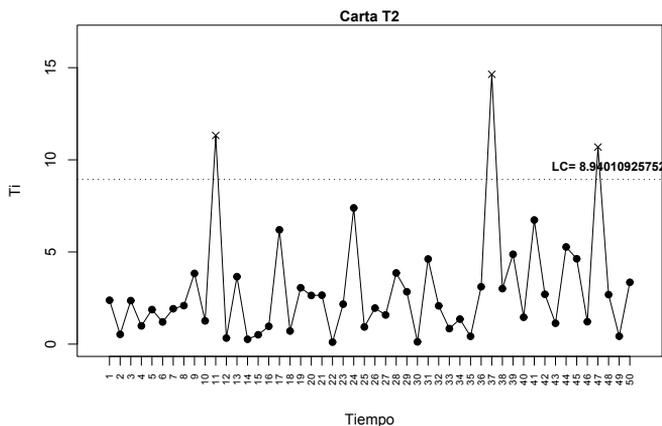


Figura 1. Carta de Control T^2

3. DESCOMPOSICIÓN MYT

Sea $\mathbf{X}_i = [X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}]'$ un vector p -dimensional de medidas hechas en un proceso de tiempo i . El valor X_{ij} representa una i -ésima observación individual en la j -ésima característica. Se asume que cuando el proceso está en control, $\mathbf{X}_i \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ e independiente.

La carta T^2 por utilizar para este proceso se obtiene con el estadístico T^2 como se describió en la ecuación (2), el cual sigue una distribución dada por la ecuación (3). Es de gran ayuda en esta carta determinar el efecto neto de cada una de las p variables en el estadístico T^2 en (2), lo que permitiría una mejor interpretación de la carta de control.

La propuesta realizada por Mason et al. (1995, 1997), plantea la descomposición del estadístico T^2 y es llamada descomposición MYT, la cual consiste en descomponer el estadístico T^2 en partes independientes, cada una de las cuales refleja la contribución de una variable individual. Se asume que se desea obtener el grupo de las primeras $p - 1$ variables juntas y separar la p -ésima variable así $\mathbf{X}_i = (\mathbf{X}_i^{(p-1)'}, X_{ip})'$, donde

$\mathbf{X}_i^{(p-1)}$ es un vector de medida $(p - 1)$ -dimensional excluyendo la p -ésima variable. El estadístico T^2 puede ser fraccionado en dos partes como:

$$T^2 = T_{p-1}^2 + T_{p-1,\dots,p-1}^2. \tag{5}$$

El término T_{p-1}^2 es el estadístico T^2 -Hotelling usando las primeras $p - 1$ variables, y este tiene la forma:

$$T_{p-1}^2 = \left(\mathbf{X}_i^{(p-1)} - \bar{\mathbf{X}}^{(p-1)} \right)' \mathbf{S}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}^{-1} \left(\mathbf{X}_i^{(p-1)} - \bar{\mathbf{X}}^{(p-1)} \right)$$

donde $\bar{\mathbf{X}}^{(p-1)}$ es el vector de media muestral de las n observaciones multivariadas en las primeras $p - 1$ variables y $\mathbf{S}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}$ es la $(p - 1) \times (p - 1)$ submatriz principal de \mathbf{S} . El estadístico $T_{p-1,\dots,p-1}^2$ es la p -ésima componente del vector \mathbf{X}_i ajustado por las estimaciones de la media y la desviación estándar de la distribución condicional de X_p dados X_1, X_2, \dots, X_{p-1} . Esto es dado por:

$$T_{p-1,\dots,p-1}^2 = (X_{ip} - \bar{X}_{p-1,\dots,p-1})^2 / s_{p-1,\dots,p-1}^2$$

donde $\bar{X}_{p-1,\dots,p-1} = \bar{X}_p + \mathbf{b}_p' (\mathbf{X}_i^{(p-1)} - \bar{\mathbf{X}}^{(p-1)})$, \bar{X}_p es la media muestral de las n observaciones en la p -ésima variable, $\mathbf{b}_p = \mathbf{S}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{s}_{x\mathbf{X}}$ es un vector $(p - 1)$ dimensional estimando los coeficientes de regresión de la p -ésima variable regresada en las primeras $p - 1$ variables,

$$s_{p-1,\dots,p-1}^2 = s_x^2 - \mathbf{s}'_{x\mathbf{X}} \mathbf{S}_{\mathbf{X}\mathbf{X}}^{-1} \mathbf{s}_{x\mathbf{X}} \quad \text{y} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\mathbf{X}\mathbf{X}} & \mathbf{s}_{x\mathbf{X}} \\ \mathbf{s}'_{x\mathbf{X}} & s_x^2 \end{bmatrix}.$$

Mientras tanto el primer término en (5) es un estadístico T^2 en $p - 1$ variables que puede ser separado en dos partes:

$$T_{p-1}^2 = T_{p-2}^2 + T_{p-1,1,\dots,p-2}^2.$$

El primer término, T_{p-2}^2 es un estadístico T^2 de Hotelling en las primeras $p - 2$ variables, y el segundo término, $T_{p-1,1,\dots,p-2}^2$ es el cuadrado de las $(p - 1)$ variables ajustada por las estimaciones de la media y desviación estándar de la distribución condicional de X_{p-1} dada X_1, X_2, \dots, X_{p-2} . Continuando las iteraciones y particiones, se obtiene la siguiente descomposición general del T^2 de Hotelling para p variables:

$$T^2 = T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,1,2}^2 + \dots + T_{p-1,\dots,p-1}^2 = T_1^2 + \sum_{j=1}^{p-1} T_{j+1,1,\dots,p-1}^2, \tag{6}$$

T_1^2 es el estadístico T^2 de Hotelling para la primera variable. Esto se reduce a el cuadrado del estadístico t univariado para la variable inicial:

$$T_1^2 = (X_{i1} - \bar{X}_1)^2 / s_1^2$$

donde \bar{X}_1 y s_1 es la media y desviación estándar de la variable X_1 .

Se considera (6) por notación tomar la siguiente representación dada por Mason y Young (1998) en la cual:

$$T^2(X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}, \dots, X_{ip}) = T_1^2 + T_{2,1}^2 + T_{3,1,2}^2 + \dots + T_{p-1, \dots, p-1}^2.$$

El orden de las componentes al permutar son invariantes, pero los términos son diferentes; por ejemplo, se considera la siguiente permutación:

$$T^2(X_{i2}, X_{i1}, X_{i3}, \dots, X_{ip}) = T_2^2 + T_{1,2}^2 + T_{3,1,2}^2 + \dots + T_{p-1, \dots, p-1}^2.$$

Mientras cada ordenación de \mathbf{X}_i genera el mismo valor T^2 global, ellos proporcionan separadamente una división del estadístico entre p términos independientes. Con $p!$ particiones posibles y p términos para cada partición, esto produce $p \times p!$ términos posibles en una descomposición MYT del T^2 .

Por ejemplo, los procesos para dos y tres variables se obtienen de la siguiente manera:

- Para $p = 2$, se obtienen $2! = 2$ descomposiciones del valor T^2 para una observación individual son posible:

$$T^2 = T^2(X_{i1}, X_{i2}) = T^2(X_{i2}, X_{i1}).$$

- Para $p = 3$, entonces se obtienen $3! = 6$ descomposiciones del valor T^2 para una observación individual son posible:

$$\begin{aligned} T^2 &= T^2(X_{i1}, X_{i2}, X_{i3}) = T^2(X_{i1}, X_{i3}, X_{i2}) = T^2(X_{i2}, X_{i3}, X_{i1}) \\ &= T^2(X_{i2}, X_{i1}, X_{i3}) = T^2(X_{i3}, X_{i1}, X_{i2}) = T^2(X_{i3}, X_{i2}, X_{i1}). \end{aligned}$$

4. INTERPRETACIÓN DE SEÑALES

La primera razón para particionar el estadístico T^2 en (6) es obtener información sobre cuál variable o conjunto de variables contribuyen significativamente para una señal fuera de control. La pregunta que surge es: ¿Cómo se usa la información dada en los diferentes términos de la descomposición?. Será útil reconocer cuál de los p términos con una descomposición en particular son independientes entre sí, aunque no todos los $p!$ términos de las descomposiciones son independientes. Además, cada uno de los términos está distribuido (bajo la apropiada hipótesis nula) de la siguiente manera (Mason & Young, 1998):

$$T_{j+1, \dots, j}^2 \sim ((n+1)(n-1))/(n(n-k-1))F_{(1, n-k-1)}, \tag{7}$$

donde k especifica los términos condicionados.

De este modo se puede comparar cada uno de los términos en (6) se puede comparar con la distribución F , para determinar si es significativa. Este proceso provee un mecanismo para decidir cuándo un término está señalando un problema.

Se asume para una observación dada, que el estadístico T^2 global dado en (2) es determinado significativo. Esto indica que existe un problema, pero no provee información acerca de las variables que contribuyeron a este problema. Considerando esto se utiliza la descomposición (6), se hallan los p términos condicionales, los cuales determinan cada una de las variables, en las $p - 1$ variables restantes, obteniendo el siguiente conjunto de valores:

$$T_{1,2,\dots,p}^2, T_{2,1,3,\dots,p}^2, \dots, T_{p-1,\dots,p-1}^2.$$

Cada uno de estos términos se puede comparar con la distribución F dada en (7) para determinar si este es significativo.

Análogamente, se pueden hallar los p términos T^2 no condicionales basados en el cuadrado del estadístico t univariado. Esto produce el siguiente conjunto de valores:

$$T_1^2, T_2^2, \dots, T_p^2.$$

Cada uno de estos términos también se puede comparar con la distribución F dada en (7) (donde $k = 0$ puesto que no existen términos condicionales) al determinar si este es significativo.

Para un vector de observaciones $\mathbf{X} = [X_1, X_2]'$, se consideran las dos descomposiciones del valor T^2 . Esto se puede escribir así:

$$\begin{aligned} T^2 &= T^2(X_1, X_2) = T_1^2 + T_{2,1}^2 \\ &= (X_1 - \bar{X}_1)^2/s_1^2 + (X_2 - \bar{X}_{2,1})^2/s_{2,1}^2, \end{aligned} \tag{8}$$

o alternativamente es

$$\begin{aligned} T^2 &= T^2(X_2, X_1) = T_2^2 + T_{1,2}^2 \\ &= (X_2 - \bar{X}_2)^2/s_2^2 + (X_1 - \bar{X}_{1,2})^2/s_{1,2}^2. \end{aligned} \tag{9}$$

Las dos componentes en (8) tiene información independiente sobre los efectos de X_1 y de X_2 dado X_1 sobre la señalización del T^2 . Similarmente, las componentes en (9) proveen información sobre los efectos de X_2 y X_1 dado X_2 sobre el valor T^2 . Tomando juntas, estas componentes puede usarse para determinar si una variable individual está fuera de control, o si la relación entre las dos variables tiene un cambio relativo que se observará en los datos históricos.

Una no señal sobre los términos no condicionales de la descomposición MYT para el vector implica que las observaciones sobre ambas componentes están dentro de la “caja” Shewhart (Johnson & Wicher, 1992). Sin embargo, esta es una condición necesaria y no suficiente. Se nota que el punto A (figura 2) está dentro de la “caja”, pero fuera de la región en control T^2 . Así, esta es una observación señalada.

Se ilustra este concepto más claramente usando la región de control elíptica en la figura 2, donde se observa que, para mantener en control

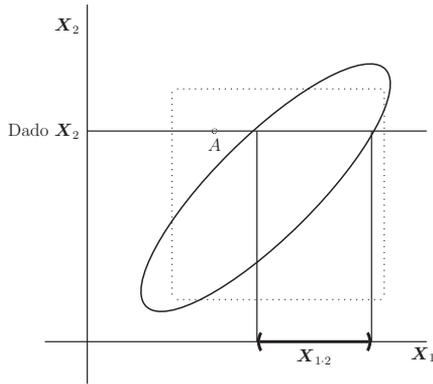


Figura 2. Interpretación del término condicional $T_{1.2}^2$.

el valor X_2 es necesario para X_1 contenerse en la región sombreada denotado como $X_{1.2}$ en el eje X_1 . Por otro lado, el punto \mathbf{X} quedará fuera de la región de control y

$$T_{1.2}^2 = (X_1 - \bar{X}_{1.2})^2 / s_{1.2}^2,$$

producirá una señal (como sucederá para el punto A).

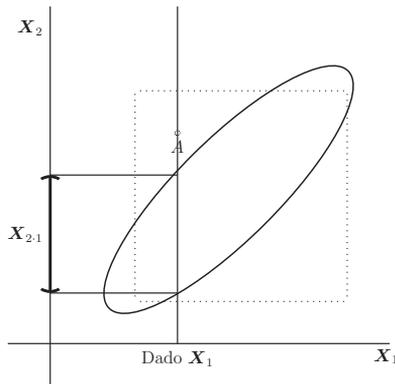


Figura 3. Interpretación del término condicional $T_{2.1}^2$.

Un argumento similar puede ser dado por:

$$T_{2.1}^2 = (X_2 - \bar{X}_{2.1})^2 / s_{2.1}^2.$$

Este término condicional producirá una señal cuando X_2 , no está contenido en la distribución condicional de X_2 dado X_1 . Esto es ilustrado en la figura 3. Dado X_1 , la observación correspondiente X_2 debe estar contenida en la región sombreada definida en la figura. Por otro lado, el punto caería fuera de la región de control elíptica y resultará una señal en el término $T_{2.1}^2$.

Señales producidas por términos condicionales tales como $T_{j-1,2,\dots,j-1}^2$ implican que algo está mal con la relación existente entre las variables X_1, X_2, \dots, X_j . Por ejemplo, una señal en $T_{2,1}^2$ indica que la observación en X_2 no es donde debe ser relativa al valor X_1 . Esto no está contenido en la distribución condicional de X_2 dado X_1 . Así, se concluye que la relación existente entre X_1 y X_2 tiene variación. Igualmente, una señal en $T_{1,2}^2$ implica que la observación en X_1 no es relativa para X_2 . Los términos $T_{1,2}^2$ y $T_{2,1}^2$ no son equivalentes, pues uno de ellos puede producir una señal, mientras el otro no la produce.

5. METODOLOGÍA

Se generan procesos en control bivariados y trivariados de tamaño $n = 50, 100$ donde $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$.

Cada matriz de covarianza permite experimentar diferentes grados de correlación en los procesos generados, para los cuales el límite de control está dado por (4). En seguida, se realizan cambios en el vector de medias, solo en una de las componentes, y se generan nuevos vectores hasta que la carta T^2 determine una señal fuera de control.

Luego de esto, se aplica la descomposición MYT, para obtener los términos condicionales y no condicionales. Cada uno de estos términos son comparados con un valor crítico dado por (7) con el cual se decide si son significativos.

El proceso anterior se repetirá 10.000 veces. Luego se procederá al conteo de los términos que en la descomposición fueron significativos entre los 10.000, formando probabilidades empíricas y organizándolas como sigue.

Para dos variables:
$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(T_1^2) & \mathcal{P}(T_{2,1}^2) \\ \mathcal{P}(T_2^2) & \mathcal{P}(T_{1,2}^2) \end{bmatrix}.$$

Para tres variables:
$$\begin{bmatrix} \mathcal{P}(T_1^2) & \mathcal{P}(T_{2,1}^2) & \mathcal{P}(T_{3,1,2}^2) \\ \mathcal{P}(T_1^2) & \mathcal{P}(T_{3,1}^2) & \mathcal{P}(T_{2,1,3}^2) \\ \mathcal{P}(T_2^2) & \mathcal{P}(T_{3,2}^2) & \mathcal{P}(T_{1,2,3}^2) \\ \mathcal{P}(T_2^2) & \mathcal{P}(T_{1,2}^2) & \mathcal{P}(T_{3,1,2}^2) \\ \mathcal{P}(T_3^2) & \mathcal{P}(T_{1,3}^2) & \mathcal{P}(T_{2,1,3}^2) \\ \mathcal{P}(T_3^2) & \mathcal{P}(T_{2,3}^2) & \mathcal{P}(T_{1,2,3}^2) \end{bmatrix}.$$

Lo que permite evaluar la eficacia de la descomposición de MYT en términos de estas probabilidades.

6. RESULTADOS

Algunos resultados obtenidos en el proceso de simulación ya descrito son presentados en tablas organizadas de la siguiente forma: inicialmente una tabla describe los procesos simulados con el vector de medias $\boldsymbol{\mu}$,

la matriz de covarianza Σ , con su respectiva matriz de correlación ρ , y cada uno de los cambios realizados en el vector de medias descritos como μ_i , donde i varía desde 1, 2, 3 hasta 4 en algunas simulaciones. En seguida, otra tabla presenta las matrices de probabilidades P_i obtenidas de los cambios μ_i , respectivamente, donde se indica el tamaño de muestra con el que se trabajó. Para cada una de estas se realiza la interpretación pertinente en ese caso.

A continuación se presentan las tablas con los resultados obtenidos en cada proceso de simulación:

Tabla 1. Proceso 1

μ	Σ			ρ			μ_1	μ_2	μ_3
7.5	5.4	2.64	4.36	1	0.75	0.60	7.5	7.5	0.1
12.8	2.64	2.3	2.37	0.75	1	0.50	12.8	18	12.8
9.7	4.36	2.37	9.8	0.60	0.50	1	10.5	9.7	9.7

Tabla 2. Matrices de probabilidad para proceso 1 con $n = 100$

P_1			P_2			P_3		
0.3474	0.3524	0.4473	0.0459	1	0.1175	0.8811	0.9417	0.5391
0.3474	0.4292	0.3713	0.0459	0.0544	1	0.8811	0.6569	0.9072
0.3385	0.4225	0.3914	0.9234	0.4997	0.9002	0.0504	0.0512	0.9999
0.3385	0.3623	0.4473	0.9234	0.9628	0.1175	0.0504	0.9982	0.5391
0.3930	0.3937	0.3713	0.0514	0.0503	1	0.0516	0.9782	0.9072
0.3930	0.3708	0.3914	0.0514	0.9749	0.9002	0.0516	0.0528	0.9999

Tabla 3. Matrices de probabilidad para proceso 1 con $n = 50$

P_1			P_2			P_3		
0.3329	0.3670	0.4859	0.0498	0.99	0.1569	0.8746	0.9241	0.5286
0.3329	0.4454	0.4150	0.0498	0.0599	0.99	0.8746	0.6321	0.8852
0.3342	0.4201	0.4344	0.9187	0.4993	0.8869	0.0475	0.0521	0.9998
0.3342	0.3701	0.4859	0.9187	0.9555	0.1569	0.0475	0.9989	0.5286
0.3768	0.3980	0.4150	0.0521	0.0524	0.99	0.0493	0.9748	0.8852
0.3768	0.3702	0.4344	0.0521	0.9738	0.8864	0.0493	0.0521	0.9998

En la tabla 2, para la matriz P_1 el cambio fue realizado en la tercera componente, y es de tan solo 8 décimas. Los valores de probabilidad obtenidos son pequeños, lo que pudo ocurrir debido a que el cambio en el vector de medias no es muy grande. Para la matriz P_2 la efectividad de detección fue buena. Los términos no condicionales muestran claramente que la variable 2 ocasionó la señal fuera de control. Igualmente los términos condicionales indican valores de probabilidad altos, en los términos que involucran la variable 2. Para la matriz P_3 se muestra que la probabilidad de detección fue buena, sin embargo se esperaba que hubiese sido más alta, tomando en cuenta que en el cambio realizado en μ_3 fue más grande que el de μ_2 , se puede determinar que los altos

valores de correlación de la variable 1 con las variables 2 y 3 son los que afectaron estos valores de probabilidad.

Para la tabla 3 se observa que los valores de probabilidad son similares a los obtenidos para $n = 100$, lo que indica que el cambio en el tamaño de muestra no afectó la efectividad de detección.

Tabla 4. Proceso 2

μ	Σ			ρ			μ_1	μ_2	μ_3
7.5	5.4	0.352	5.45	1	0.1	0.75	8.15	7.5	7.5
12.8	0.352	2.3	-2.37	0.1	1	-0.5	12.8	16.8	12.8
9.7	5.45	-2.37	9.8	0.75	-0.5	1	9.7	9.7	8.5

Tabla 5. Matrices de probabilidad para proceso 2 con $n = 100$

P_1			P_2			P_3		
0.3065	0.2742	0.5835	0.0488	0.7495	0.9970	0.1980	0.1977	0.7684
0.3065	0.3488	0.5236	0.0488	0.0476	1	0.1980	0.3493	0.6428
0.2605	0.2747	0.6243	0.7415	0.3270	0.9941	0.1908	0.2886	0.6998
0.2605	0.3185	0.5835	0.7415	0.0649	0.9970	0.1908	0.2048	0.7684
0.2576	0.3924	0.5236	0.0507	0.0462	1	0.2655	0.2885	0.6428
0.2576	0.2826	0.6243	0.0507	0.8541	0.9941	0.2655	0.2202	0.6998

Tabla 6. Matrices de probabilidad para proceso 2 con $n = 50$

P_1			P_2			P_3		
0.3021	0.2933	0.5914	0.0535	0.7382	0.9941	0.2019	0.2169	0.7686
0.3021	0.3531	0.5428	0.0535	0.0541	0.9999	0.2019	0.3554	0.6636
0.2650	0.2898	0.6338	0.7284	0.3280	0.9863	0.1976	0.3012	0.7067
0.2650	0.3291	0.5914	0.7284	0.0814	0.9941	0.1976	0.2251	0.7686
0.2623	0.3897	0.5428	0.0501	0.0559	0.9999	0.2549	0.2998	0.6636
0.2623	0.2904	0.6338	0.0501	0.8437	0.9863	0.2549	0.2500	0.7067

En la tabla 5, la matriz P_1 presenta valores de probabilidad muy pequeños. Para los términos no condicionales, se observa la primera variable un poco más grandes con respecto a las demás, lo que indicaría que esta es la variable fuera de control. Sin embargo no es un valor de probabilidad confiable, por ser un valor tan bajo, lo que pudo ocurrir porque el cambio en el vector de medias fue pequeño. Para la matriz P_2 el cambio realizado en μ_2 , fue de 4 unidades, los valores de probabilidad en los términos no condicionales indican claramente que la variable 2 ocasiono la señal, pues estos valores de probabilidad son los más altos de esta primera columna. En los términos condicionales, se observa que los valores de probabilidad que involucran la segunda variable son altos. En P_3 se observa que la probabilidades en los términos no condicionales de la tercera variable aumentan un poco, sin embargo no es un valor de probabilidad confiable, debido a que estos valores en los términos

condicionales de tres variables en P_3 muestran probabilidades más altas de detección.

En la tabla 6 se observa que los valores P_1 , P_2 , P_3 no difieren significativamente de los presentados en la tabla 5, lo cual indica que el cambio en el tamaño de muestra de 100 a 50 no afecta la efectividad de detección.

Tabla 7. Proceso 3

μ	Σ			ρ			μ_1	μ_2	μ_3
7.5	5.4	-1.76	5.09	1	-0.50	0.70	10	7.5	7.5
12.8	-1.76	2.3	0.95	-0.50	1	0.20	12.8	11	12.8
9.7	5.09	0.95	9.8	0.70	0.20	1	9.7	9.7	11

Tabla 8. Matrices de probabilidad para proceso 3 con $n = 100$

P_1			P_2			P_3		
0.2119	0.1067	0.9824	0.0701	0.3636	0.9145	0.1802	0.1895	0.7971
0.2119	0.2059	0.9722	0.0701	0.0700	0.9828	0.1802	0.3254	0.6917
0.0515	0.0607	0.9961	0.2879	0.0828	0.9321	0.1816	0.2581	0.7382
0.0515	0.2633	0.9824	0.2879	0.1504	0.9145	0.1816	0.1906	0.7971
0.0560	0.3639	0.9722	0.0674	0.0744	0.9828	0.2458	0.2578	0.6917
0.0560	0.0556	0.9961	0.0674	0.3024	0.9321	0.2458	0.1960	0.7382

Tabla 9. Matrices de probabilidad para proceso 3 con $n = 50$

P_1			P_2			P_3		
0.2087	0.1176	0.9794	0.0723	0.3792	0.9074	0.1830	0.2099	0.7971
0.2087	0.2104	0.9660	0.0723	0.0807	0.9814	0.1830	0.3444	0.6912
0.0560	0.0618	0.9955	0.2954	0.0925	0.9264	0.1846	0.2773	0.7459
0.0560	0.2703	0.9794	0.2954	0.1597	0.9074	0.1846	0.2047	0.7971
0.0584	0.3578	0.9660	0.0723	0.0812	0.9814	0.2551	0.2741	0.6912
0.0584	0.0631	0.9955	0.0723	0.3144	0.9264	0.2551	0.2105	0.7459

En la tabla 8, para P_1 se observa que, aunque el cambio realizado en μ_1 fue grande, los valores de probabilidad para los términos no condicionales no son altos, y aunque los términos que involucran la variable 1 son un poco más altos que los otros, igual es una probabilidad poco confiable. Para los términos condicionales en la tercera columna se observan valores de probabilidad altos en todos los términos, lo que dificulta la interpretación y puede crear confusión. Esto puede ser dado por la alta correlación entre la variable uno y la variable tres. En P_2 , y P_3 se observa una situación similar a la anterior, donde los valores de probabilidad no son muy grandes, y los valores que deben ser significantes son un poco más altos, pero con valores de probabilidad no muy confiables.

En la tabla 9 se observa que el cambio en el tamaño de muestra no afecta los valores de probabilidad para los cambios realizados, pues los valores que se obtienen son muy similares a los de $n = 100$.

Tabla 10. Proceso 4

μ	Σ			ρ			μ_1	μ_2	μ_3
23.7	9.1	3.77	2.03	1	0.70	0.55	29	23.7	23.7
17.4	3.77	3.2	1.095	0.70	1	0.50	17.4	17.4	18.1
8	2.03	1.095	1.5	0.55	0.50	1	8	1	8

Tabla 11. Matrices de probabilidad para proceso 4 con $n = 100$

P_1			P_2			P_3		
0.6137	0.5931	0.2259	0.0497	0.0492	1	0.2976	0.5131	0.3508
0.6137	0.3294	0.5014	0.0497	1	0.3156	0.2976	0.3205	0.5427
0.0825	0.0838	0.9675	0.0480	1	0.5931	0.3994	0.3663	0.4012
0.0825	0.9316	0.2259	0.0480	0.0545	1	0.3994	0.4154	0.3508
0.0825	0.7906	0.5014	0.9999	0.9332	0.3156	0.3052	0.3071	0.5427
0.0825	0.0869	0.9675	0.9999	0.8652	0.5931	0.3052	0.4492	0.4012

Tabla 12. Matrices de probabilidad para proceso 4 con $n = 50$

P_1			P_2			P_3		
0.6183	0.5987	0.2572	0.0500	0.0517	1	0.2969	0.5100	0.3877
0.6183	0.3512	0.5159	0.0500	1	0.3451	0.2969	0.3358	0.5522
0.0848	0.0929	0.9700	0.0493	1	0.5764	0.3911	0.3687	0.4376
0.0848	0.9275	0.2572	0.0493	0.0543	1	0.3911	0.4246	0.3877
0.0836	0.8013	0.5159	0.9998	0.9077	0.3451	0.3045	0.3222	0.5522
0.0836	0.0856	0.9700	0.9998	0.8357	0.5764	0.3045	0.4530	0.4376

En la tabla 11 los valores de P_1 muestran una buena probabilidad de detección para el cambio de μ_1 , el cual fue un cambio de 5.3 unidades respecto a la media, para la variable 1. Los valores de probabilidad de los términos no condicionales muestran a 1 como la variable que ocasionó la señal. Para P_2 , los valores de probabilidad muestran una buena efectividad de detección, ante el cambio dado en μ_2 , que fue grande. En P_3 , los valores de probabilidad no son muy altos, y es casi imperceptible localizar la variable causante de la señal debido a que los términos no condicionales que involucran a la variable son un poco más grandes, pero no es mayor la diferencia. Esto pudo ser debido a que el cambio realizado en μ_3 fue pequeño.

Para la tabla 12 se observa algo similar que en los casos anteriores, con el cambio en el tamaño de muestra no se afectan los valores de probabilidad, por lo que estos son semejantes.

A continuación se presentan algunos procesos simulados para dos variables, en los cuales se omiten los resultados dados para $n = 50$, al observar en los procesos presentados anteriormente que el cambio en el tamaño de muestra no afecta la efectividad de detección.

Tabla 13. Proceso 5

μ	Σ		ρ		μ_1	μ_2	μ_3
2	4	1	1	0.17	0	5	-1
4	1	9	0.17	1	4	4	4

Tabla 14. Matrices de probabilidad para proceso 5 con $n = 100$

P_1		P_2		P_3	
0.758	0.276	0.859	0.196	0.862	0.201
0.239	0.787	0.156	0.886	0.155	0.887

En la tabla 14, para P_1 , P_2 y P_3 , se observa que presentan una buena efectividad de detección. En los términos no condicionales, se identifica claramente el término que según las probabilidades causó la señal fuera de control. Igualmente en los condicionales es mayor el valor de probabilidad para el condicional de la variable 1, dado que halla pasado la variable 2.

Tabla 15. Proceso 6

μ	Σ	ρ		μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
2	4 1	1	0.17	10	2.5	3	-2
4	1 9	0.17	1	4	4	4	4

Tabla 16. Matrices de probabilidad para proceso 6 con $n = 100$

P_1		P_2		P_3		P_4	
0.997	0.131	0.526	0.489	0.597	0.421	0.925	0.152
0.052	0.999	0.461	0.552	0.395	0.622	0.106	0.944

En la tabla 16 se observa que las matrices P_1 y P_4 , muestran una efectiva detección de los cambios μ_1 y μ_4 , que fueron los más significantes. Para P_2 y P_3 disminuyen la efectividad de detección; sin embargo es significativa, tomando en cuenta que los cambios de μ_2 y μ_3 fueron pequeños.

7. CONCLUSIONES

En el análisis de las tablas se observan diversas situaciones y comportamientos de los datos, a través de las probabilidades obtenidas para cada termino de la descomposición MYT, lo que permite interpretarlos y dar algunas conclusiones:

1. La efectividad de detección de la variable que ocasionó la señal fuera de control es mayor cuando se ha realizado un cambio grande en el vector de medias de una variable, bien sea que este haya aumentado o disminuido la misma. Al realizar cambios muy pequeños la probabilidad de detección disminuye considerablemente.
2. Ante cambios del tamaño de muestra, los valores de probabilidad no son afectados pues la efectividad de detección es muy similar para cualquiera de los dos tamaños trabajados.

3. La matriz de correlaciones en cada proceso es un factor fundamental en la detección de cambios en el vector de medias. Para correlaciones altas entre algunas variables, la probabilidad de detección disminuye notablemente, sobre todo en los términos no condicionales, y aumenta en los términos condicionales donde están involucradas algunas o todas las variables con correlación alta.

Como se observó, la descomposición MYT es una buena alternativa para la detección de las causas de una señal fuera de control en un proceso multivariado. En estudios posteriores se podría aumentar el número de variables, y tamaños de muestra, para aplicar la descomposición y determinar su efectividad ante estos cambios; también se puede proponer observar metodologías diferentes en la detección de observaciones en procesos multivariados y comparar estas con la descomposición MYT y apreciar resultados.

REFERENCIAS

- Johnson, R. A., & Wicher, D. W. (1992). *Applied multivariate statistical analysis* (3a. ed.). New Jersey: Prentice Hall International.
- Maravelakis, P. E. (2003). *An investigation of some characteristics of univariate and multivariate control charts*. Unpublished doctoral dissertation, Department of Statistics, Athenas University of Economics and Business. (Available from internet: <http://stat-athens.aueb.gr/~jpan/diatrives/Maravelakis/Index.html>)
- Mason, R. L., Tracy, N. D., & Young, J. C. (1995, April). Decomposition of T^2 for Multivariate Control Chart Interpretation. *Journal of Quality Technology*, 27(2), 99-108.
- Mason, R. L., Tracy, N. D., & Young, J. C. (1997, October). A Practical Approach for Interpreting Multivariate T^2 Control Chart Signals. *Journal of Quality Technology*, 29(4), 396-406.
- Mason, R. L., & Young, J. C. (1998). Hotelling's T^2 : A Multivariate Statistic for Industrial Process Control. *Quality Congress. ASQ's 52nd Annual Quality Congress Proceedings*, 78-85.
- Montgomery, D. C. (2004). *Control estadístico de la calidad* (3a. ed.). México: Limusa Wiley. 

Referencia	Recepción	Aprobación
ZAMBRANO, A. J. y ZAMBRANO, L. A. Evaluando la efectividad de la descomposición MYT para la interpretación de señales fuera de control en la carta T^2 . <i>Revista Tumbaga (2008), 3, 141-156</i>	Día/mes/año 21/07/2008	Día/mes/año 08/10/2008