Sobre el nacimiento de la Geometría Riemanniana

Oscar M. Perdomo
Department of Mathematics, Central Connecticut State University, USA[1].

Resumen
El 10 de junio de 1854, George Friedrich Bernhard Riemann ofreció una conferencia a los profesores de la Universidad de Gotinga. Según los historiadores, dicha conferencia sólo fue entendida en su totalidad por Gauss. En la charla, Riemann, sin tan siquiera tener una definición precisa de variedad n-dimensional, introdujo el concepto de métrica riemanniana, explicó el tensor de curvatura, la curvatura seccional, ciertas relaciones entre la métrica y la curvatura, y una serie de resultados que fueron establecidos de una manera precisa y con una demostración rigurosa sólo después de 60 años. Esta conferencia, que mostraba el plan investigativo de Riemann, constituye la base de la Geometría Diferencial y la Teoría de la Relatividad. Aquí se explicará con sencillez gran parte de los conceptos y resultados introducidos por Riemann en aquella charla y cómo finalmente fueron formalizados.
Palabras y frases clave: Geometría Riemanniana, tensor de curvatura, curvatura seccional, métricas riemannianas, geometrías no euclidianas.

Abstract
On June 10th, 1854, George Friedrich Berhard Riemann gave a conference to the University of Göttingen's faculty. According to historians, this conference was only understood in its totality by Gauss. In this talk, Riemann without even having a precise definition of n-dimensional manifold, introduced the concept of Riemannian metric and explained the notion of the curvature tensor and sectional curvature. He also found relations between the metric and the curvature, and mentioned several results that were only rigorously proved 60 year later. The conference that was initially intended to show Riemann's research plan, ended up being the base of differential geometry and relativity areas. In this notes we will explain in a simple way most of the concepts and results introduced by Riemann and the way these concepts were formalized.
Key words and phrases: Riemannian Geometry, curvature tensor, sectional curvature, Riemannian metrics, non Euclidean geometries.

Clasificación de materias (AMS): 53A35,58A05,53A35.

Correo electrónico: perdomoosm@mail.ccsu.edu

1. Introducción

El tema central de este artículo es la conferencia *Über die Hypotheses, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Sobre las hipótesis que son cimientos de la geometría), ofrecida por Riemann el 10 de junio de 1854 como requisito para poder enseñar en la Universidad de Gotinga. Los otros requisitos eran la tesis doctoral, un artículo inaugural y presentar tres temas, uno de los cuales sería escogido por un jurado de la universidad para que el candidato ofreciera una charla inaugural. La tesis doctoral de Riemann se tituló *Fundamentos para una teoría general de funciones en una variable compleja* y fue presentada en 1851. El artículo inaugural que sometió se titulaba *Sobre la representación de una función por una serie trigonométrica* y, para los temas que debía escoger, tomó, además de los dos temas anteriores, el tema de fundamentos de geometría. Era costumbre que el jurado escogiera uno de los temas que el candidato ya había trabajado, pero esta vez Gauss, quien también había sido jurado de su tesis de doctorado, decidió que Riemann hiciese su charla sobre geometría, ya que conocía de los excelentes trabajos que Riemann había elaborado y porque, además, la geometría era uno de los temas en el que Gauss estaba trabajando en ese entonces.

La charla de Riemann fue planteada como su proyecto de investigación. Es interesante y asombroso darse cuenta de cómo este proyecto de investigación resultó ser el plan de trabajo de una gran cantidad de matemáticos, quienes a lo largo de casi cien años han venido desarrollándolo y verificando que, efectivamente, la intuición de Riemann era correcta. Hubiese sido grandioso que Riemann hubiera vivido 60 años más (murió a los 40), para que así hubiese tenido la satisfacción de ver cómo sus ideas, entendidas por pocos en su época, fueron evolucionando y aclarándose para dar lugar a una de las áreas más importantes de las Matemáticas. Me lo imagino haciendo los siguientes comentarios acerca de la bien conocida expresión "Gravedad es curvatura del espacio tiempo", de la Teoría General de la Relatividad: "Como lo dije en mi plan investigativo, la geometría es esencialmente la métrica que pongamos en nuestro espacio; la métrica queda determinada por la curvatura, y la curvatura debe sacarse de la física del espacio, de lo medible, es decir, de la experiencia". O haciendo el siguiente comentario sobre las limitaciones de la Teoría General de la Relatividad para explicar el comportamiento físico en lo relacionado con pequeñas distancias: "Sabía que la Geometría Riemanniana tendría dificultades modelando magnitudes pequeñas y presentía que para modelar la física de lo infinitamente pequeño se debía utilizar algo discreto".

Era bien conocido que Riemann era un amante de la Física; por ejemplo, cuando Gauss decidió que Riemann hiciese su conferencia en geometría, charla que Riemann no tenía preparada, este se encontraba investigando sobre las conexiones entre electricidad, magnetismo, luz y gravedad, además de estar asistiendo a un seminario de matemática física. Al analizar la conferencia de Riemann se puede observar la gran visión que tenía sobre la Física, tanto así que la charla bien se hubiese podido titular "Sobre las hipótesis que son cimientos de la Física", o 60 años más tarde, "Sobre las hipótesis que son cimientos de la Teoría General de la Relatividad".

Con el fin de que el lector aprecie mejor la belleza de la charla ofrecida por Riemann, en este documento se hará un breve recorrido en orden cronológico por la Geometría Diferencial partiendo de lo más básico. Durante este recorrido se motivarán, tomando algunos apartes de la conferencia de Riemann, los resultados que fueron explicados por él mismo y que presentía deberían ser ciertos.

2. Breve incursión en la Geometría Diferencial

2.1. Geometría de curvas planas. Empezaremos esta sección con algunos resultados bien conocidos sobre curvas planas.

Teorema 2.1. *Dada una curva diferenciable* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *con* $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$*, se define la longitud de* α *como*

$$\int_a^b |\alpha'(t)|dt, \ \ \textit{donde } |\alpha'(t)| = \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2}.$$

A pesar de la sencillez de esta fórmula, ella es la que motiva a Riemann a dar la noción de métrica en una variedad.

Teorema 2.2. *Dada una curva diferenciable* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *dada por* $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t))$*, con* $\alpha'(t) \neq (0,0)$*, existe un cambio de parámetro* $t = g(s)$ *donde* $g : [c,d] \to [a,b]$ *tal que* $\beta(s) = \alpha(g(s))$ *es una curva cuyo vector velocidad siempre mide* 1*. Nótese que la longitud de* α *es igual a la longitud de* β *y es igual a* $d - c$*.*

Las curvas cuyo vector velocidad mide siempre 1 son llamadas curvas parametrizadas por longitud de arco.

Definición 2.1. *Dada una curva diferenciable* $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$*, parametrizada por longitud de arco, diremos que* $n : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ *es un vector normal unitario a largo de* α *si* $n(t)$ *es perpendicular a* $\alpha'(t)$ *para todo* $t \in [a,b]$*. Definimos la curvatura de* α *en el punto* $\alpha(t_0)$ *con respecto a un vector normal unitario* n *como*

$$n(t_0)\cdot\alpha''(t_0),$$

donde $v{\cdot}w$ denotará el producto punto euclidiano.

De la Geometría Euclidiana, es bien conocido que tres puntos no colineales en $\mathbb{R}^2$ determinan una única circunferencia. Si p_1, p_2, p_3 son estos tres puntos, denotaremos por $C(p_1, p_2, p_3)$ al centro de esta circunferencia y por $r(p_1, p_2, p_3)$ al radio de la misma.

Teorema 2.3. *Consideremos una curva diferenciable $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, parametrizada por longitud de arco, y $n : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ un vector normal unitario a largo de α. Si para algún $t_0 \in (a, b)$ se tiene que la curvatura de α en el punto $\alpha(t_0)$ con respecto a un vector normal unitario n es $k \neq 0$, entonces*

1. *Existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $0 < h < \epsilon$ los puntos $\alpha(t_0 - h), \alpha(t_0), \alpha(t_0 + h)$ no son colineales.*
2. $\lim_{h\to 0} r(\alpha(t_0 - h), \alpha(t_0), \alpha(t_0 + h)) = \frac{1}{|k|}$.
3. $\lim_{h\to 0} C(\alpha(t_0 - h), \alpha(t_0), \alpha(t_0 + h)) = \alpha(t_0) + \frac{1}{k} n(t_0)$.

2.2. Superficies antes de Gauss. Continuaremos ahora con la teoría de superficies que se desarrolló antes de Gauss. Ya que esta teoría es esencialmente local, trabajaremos con la siguiente definición de superficie.

Definición 2.2. *Diremos que $S = \phi((a, b) \times (c, d))$ es una superficie parametrizada regular, si para algún $\epsilon > 0$,*

$$\phi : (a - \epsilon, b + \epsilon) \times (c - \epsilon, d + \epsilon) \to \mathbb{R}^3$$

es una función inyectiva tal que los dos vectores en $\mathbb{R}^3$, $\frac{\partial\phi}{\partial u_1}$ y $\frac{\partial\phi}{\partial u_2}$ son linealmente independientes para todo $(u_1^0, u_2^0) \in (a-\epsilon, b+\epsilon)\times(c-\epsilon, d+\epsilon)$.

Antes de Gauss, las superficies se estudiaron analizando las curvas que ellas contenían. Para ser más precisos, consideremos para cada $p \in \mathbb{R}^3$ y cada par de vectores linealmente independientes $v, w \in \mathbb{R}^3$ el plano que pasa por p y es paralelo al plano generado por v y w, es decir:

$$\pi(p, v, w) = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x = p + sv + tw \quad \text{con} \quad s, t \in \mathbb{R}\}.$$

El siguiente teorema muestra la forma como se estudiaba la superficie analizando las curvas que se obtienen cuando nuestra superficie se interseca con ciertos planos.

Teorema 2.4. *Sea $\phi(u_1^0, u_2^0) = p_0$ un punto en una superficie parametrizada regular S. Para cada $v(s, t) = s\frac{\partial\phi}{\partial u_1}(u_1^0, u_2^0) + t\frac{\partial\phi}{\partial u_2}(u_1^0, u_2^0)$ y $w = \frac{\partial\phi}{\partial u_1}(u_1^0, u_2^0) \times \frac{\partial\phi}{\partial u_2}(u_1^0, u_2^0)$, se tiene que*

1. *$\alpha_{s,t} = S \cap \pi(p_0, v(s, t), w)$ es una curva que se puede parametrizar por longitud de arco cerca de p_0.*

2. *Si denotamos $k(s,t)$ la curvatura de $\alpha_{s,t}$, se tiene que existen dos vectores propios perpendiculares $v(s_1,t_1)$ y $v(s_2,t_2)$ con valores propios $k_1 = k(s_1,t_1) = max\{k(s,t) : s,t \in \mathbb{R}\}$ y $k_2 = k(s_2,t_2) = min\{k(s,t) : s,t \in \mathbb{R}\}$ respectivamente, más aún:*
$$k(s,t) = k_1 \cos^2(\theta) + k_2 \operatorname{sen}^2(\theta),$$
donde θ es el ángulo que forma $v(s,t)$ con $v(s_1,t_1)$.

Este teorema fue probado inicialmente por Euler. Los números k_1 y k_2 son llamados curvaturas principales de S en el punto p_0.

2.3. Algunos aportes de Gauss a la teoría de superficies. Pasemos ahora a explicar dos teoremas sobre superficies en $\mathbb{R}^3$ demostrados por Gauss en su artículo "Disquisitiones generales circa superficies curvas", publicado en 1827, un año antes del nacimiento de Riemann.

Definición 2.3. *Diremos que dos superficies S_1 y S_2 son isométricas si existe una función biyectiva y diferenciable $\phi : S_1 \to S_2$ tal que para toda curva $\alpha : [a,b] \to S_1$ se tiene que la longitud de α es igual a la longitud de $\phi \circ \alpha : [a,b] \to S_2$. La función ϕ es llamada isometría.*

El siguiente teorema, conocido como *Theorema Egregium* de Gauss, es el que motiva el concepto de curvatura de una variedad riemanniana.

Teorema 2.5. *Si $\phi : S_1 \to S_2$ es una isometría, entonces el producto de las curvaturas principales de S_1 en $p \in S_1$ es igual al producto de las curvaturas principales de S_2 en $\phi(p) \in S_2$.*

Definición 2.4. *Dada una superficie S, definimos la curvatura de Gauss en $p \in S$ como el producto de las curvaturas principales. Denotaremos a esta función como $K : S \to \mathbb{R}$.*

El Teorema 2.5 establece que la curvatura de Gauss en una superficie no depende de la forma cómo la superficie yace en $\mathbb{R}^3$, sino de la forma de medir en ella, es decir, es un invariante isométrico. Esto explica por qué la curvatura de Gauss de un cilindro es cero, pues fácilmente se puede ver que localmente un cilindro es isométrico a un plano.

Definición 2.5. *Sea S una superficie regular. Dada una curva diferenciable $\alpha : [a,b] \to S$, diremos que α es una geodésica si $\alpha''(t)$ es perpendicular a la superficie para todo $t \in (a,b)$.*

Teorema 2.6. *Sea S una superficie regular y $g : \Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 0\} \to S$ una función diferenciable tal que las* *curvas* $\alpha_i : [0,1] \to S$ *dadas por* $\alpha_1(t) = g(t,0)$, $\alpha_2(t) = g(1-t,t)$ *y* $\alpha_3(t) = g(0,1-t)$ *son geodésicas, entonces*

$$\int_{g(\Delta)} K = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \pi,$$

donde los θ_i *son los ángulos internos del triángulo formado por las tres geodésicas, por ejemplo,* θ_1 *es el ángulo entre los vectores* $\alpha_1'(0)$ *y* $-\alpha_3'(1)$.

En el teorema anterior, una forma de definir $\int_{g(\Delta)} K$ es como la integral

$$\int_{\Delta} K(g(u,v))\Big|\frac{\partial g}{\partial u} \times \frac{\partial g}{\partial v}\Big|(u,v)dudv.$$

El Teorema 2.6 ratifica el hecho de que la curvatura de Gauss sólo depende de la forma de medir en S, pues el teorema nos dice que la curvatura de Gauss en un punto es, aproximadamente, el cociente $\frac{a}{b}$ donde a es la diferencia entre la suma de los ángulos internos de un triángulo geodésico pequeño que contiene a p y π, y b es el área del triángulo. Este teorema extiende el teorema de Geometría Euclidiana que establece que la suma de los ángulos internos de un triángulo en un plano es π.

2.4. Resultados de Geometría Riemanniana motivados por la conferencia de Riemann. La primera noción que trata de definir Riemann en su conferencia es la de *variedad* n*-dimensional*. Para Riemann era evidente que una variedad riemanniana n-dimensional es un conjunto que localmente es difeomorfo a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, un conjunto en el cual, localmente, todo punto queda completamente determinado por n números. Observemos los siguientes apartes de su conferencia que abordan el problema de definir el concepto de variedad.

> **Aparte 1:** ... una variedad extendida simple, cuya característica esencial es que a partir de un punto en ella, un movimiento contínuo sólo es posible en dos direcciones, hacia adelante y hacia atrás. Si uno imagina que de esta variedad se pasa a otra, completamente diferente y, una vez más, en una forma bien determinada, es decir, de forma que todos los puntos pasan a puntos bien determinados en la otra variedad, entonces el ejemplo construido es una variedad extendida doble. De la misma forma, uno obtiene una variedad extendida triple cuando uno imagina que de una variedad extendida doble, uno pasa a otra variedad extendida doble completamente diferente y de una manera bien determinada. Es fácil ver como se puede continuar con esta construcción.

> **Aparte 2:** ... En otras palabras, nosotros tomamos en una variedad dada una función continua que depende de la posición la cual no es constante en ninguna parte de la variedad. Cada sistema de puntos donde la función tiene un valor constante forma una variedad de dimensión menor que la original. Estas variedades pasan continuamente de una a la otra cuando la función cambia; así uno puede pensar que todas ellas emanan de una de ellas, y generalmente hablando, esto ocurrirá en tal forma que cada punto de la primera pasa a un punto bien definido de cualquier otra; los casos excepcionales, cuya investigación es importante, no será necesario considerarlos acá. De esta manera, la determinación de la posición en una variedad queda reducida a una determinación numérica y a la determinación de la posición en una variedad de menor dimensión. Es fácil mostrar que esta variedad tiene dimensión $n-1$, si la variedad inicial tiene dimensión n. Repitiendo este proceso n veces, se tiene que la determinación de la posición en una variedad extendida n-dimensional queda reducida a la determinación de n números...

Pasemos a dar una definición de variedad para avanzar en nuestro recorrido por la Geometría Diferencial.

Definición 2.6. *Diremos que un conjunto $M \subset \mathbb{R}^N$ es una variedad n-dimensional, si para cada $p \in M$ existe un abierto U de $\mathbb{R}^N$ que contiene a p y una función inyectiva y diferenciable*

$$\phi : (a_1 - \epsilon, b_1 + \epsilon) \times \cdots \times (a_n - \epsilon, b_n + \epsilon) \to M$$

tal que los vectores $\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^N$ para todo punto $(x_1, \ldots, x_n)$ en el dominio de ϕ, y tal que

$$\phi((a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)) = M \cap U.$$

Las n funciones a las que hace referencia Riemann y que determinan la posición de un punto en una variedad son las funciones coordenadas, más precisamente las funciones $f_i = \pi_i \circ \phi^{-1}$ donde $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la i-ésima proyección, $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Fácilmente se puede verificar que, efectivamente, el conjunto de puntos en $M \cap U$, que son enviados por la función f_i a una constante c_i, es una variedad $(n-1)$-dimensional; más precisamente la $(n-1)$-variedad dada por los puntos de la forma $\{\phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, c_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) : x_j \in (a_j, b_j)\}$. El paso continuo de las variedades de dimensión menor a las que se refería Riemann cuando la función cambia es el cambio de las variedades $f^{-1}(c)$ cuando c varía.

La definición que estamos brindando no es exactamente la que Riemann tenía en mente, pues él quería definir un modelo apropiado para el universo, y para él, nuestro universo no está contenido dentro de otro conjunto. La razón por la cual brindamos esta definición es que ella facilita la definición de vector tangente y porque, debido al teorema de encaje isométrico de Nash (1956), no se pierde generalidad con respecto a las definiciones abstractas de variedad. En su conferencia Riemann se refería a las variedades n-dimensionales también como variedades extendidas n-dimensionales y como cantidad extendida múltiple.

Antes de definir métricas riemannianas es necesario dar el concepto de vector tangente y de espacio tangente a la variedad en un punto dado.

Teorema 2.7. *Sea $M \subset \mathbb{R}^N$ una variedad n-dimensional y p un punto en M. El conjunto*

$$\{\alpha'(0) : \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \to M \quad con \quad \alpha(0) = p\}$$

es un espacio vectorial $n-$dimensional llamado espacio tangente a M en p y denotado T_pM; más aún, si ϕ es una función como en la definición de variedad y $\phi(x^0) = p$ entonces

$$T_pM = \textit{subespacio generado por los vectores } \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x^0), \ldots, \frac{\partial\phi}{\partial x_n}(x^0).$$

Una vez tenemos la noción de espacio tangente, la observación básica está en la fórmula para hallar la longitud de una curva dada en el Teorema 2.1. Nótese que para calcular la longitud de una curva basta saber cómo calcular la norma de los vectores velocidad en cada punto de la curva. Por tanto, si definimos una norma en cada espacio tangente, podremos calcular la longitud de cualquier curva en M (ver Apartes 5 y 6). Riemann supone que esta norma varía continuamente con respecto a los puntos en la variedad, y también supone que esta norma proviene de un producto interno como lo dicen los Apartes 4,5,6 y 7. Es decir, Riemann supone que en cada punto $p \in M$ se tiene una forma bilineal simétrica definida positiva $g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$. Ya que Riemann no tenía la definición moderna de espacio tangente, él trabajó estos conceptos localmente usando las funciones coordenadas; así, una curva en la variedad $\beta : [a, b] \to M$ determina una única curva que depende de las variables $\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. En el caso en que las coordenadas sean las funciones $\pi \circ \phi^{-1}$, entonces la curva α será la curva $\phi^{-1} \circ \beta$. La definición de esta curva es explicada por Riemann en el Aparte 3. Por la regla de la cadena tenemos que

$$\beta'(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \frac{\partial\phi}{\partial x_i}(\alpha(t)).$$

Por tanto, la norma del vector $\beta'(t)$ viene dada por

$$\sqrt{g(\beta(t))(\beta'(t),\beta'(t))} = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} x_i'(t)x_j'(t)g_{ij}(x_1(t),\dots,x_n(t))},$$

donde las funciones g_{ij} son funciones definidas en el dominio de ϕ dadas por la expresión

$$g_{ij}(x) = g(\phi(x))(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x), \frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x)).$$

La simetría de g implica que $g_{ij} = g_{ji}$; por consiguiente, sólo se necesitan $\frac{n(n+1)}{2}$ funciones para determinar una métrica riemanniana localmente en M. Pero ya que las funciones g_{ij} dependen de las coordenadas, y "casi toda" escogencia de n funciones determina un nuevo sistema de coordenadas, entonces la escogencia adecuada de coordenadas nos permite predeterminar n de las $\frac{n(n+1)}{2}$ funciones que definen la métrica y, por tanto, para determinar la métrica se necesitan $\frac{n(n-1)}{2}$ funciones. Este argumento de conteo hecho por Riemann en el Aparte 8 es de suma importancia, y como se explicará después, él establece un teorema probado casi cien años después por Cartan en una versión local, y por Ambrose en una versión global (1956), el cual establece esencialmente que la curvatura determina la métrica. La explicación del "casi toda"en el argumento que se acaba de hacer es que si tomamos n funciones en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y miramos sus gradientes en un punto dado, entonces ellos son n vectores en $\mathbb{R}^n$; si estos n vectores son linealmente independientes, entonces estas n funciones determinan un cambio local de coordenadas por el teorema de la función inversa. Pero ya que casi todas las matrices $n \times n$ son invertibles porque el conjunto de matrices invertibles $n \times n$ es denso en $\mathbb{R}^{n^2}$, entonces se tendrá que en general estos vectores gradientes serán linealmente independientes y, por tal razón, estas n funciones determinarán, casi siempre, un cambio de coordenadas.

> **Aparte 3:** ... la posición de un punto en una variedad extendida n-dimensional queda expresada por n cantidades x_1, x_2 hasta x_n, entonces para especificar una línea equivale a dar las cantidades $x = (x_1, \dots, x_n)$ como funciones de una variable.
>
> **Aparte 4:** ... me limitaré a líneas cuyas cantidades de radio dx -el incremento en la cantidad x- varía continuamente.
>
> **Aparte 5:** ... El problema entonces se reduce a encontrar una expresión del elemento de línea ds en cada punto, una expresión la cual involucre las cantidades x y las cantidades dx.

Aparte 6: ... Bajo estas condiciones, el elemento de línea debe ser una función homogénea de primer orden en la cantidad dx y debe permanecer igual cuando la cantidad dx cambia de signo, y en la cual los coeficientes de la función homogénea son funciones de la cantidad x.

Aparte 7: ... Consecuentemente me restringiré a aquellas variedades cuyo elemento de línea puede ser expresado por la raíz cuadrada de una expresión diferencial de segundo orden.

Aparte 8: ... Ya que la expresión contiene $n\frac{n+1}{2}$ coeficientes los cuales son funciones arbitrarias de las variables independientes, al introducir nuevas variables uno puede lograr que n de estos $n\frac{n+1}{2}$ coeficientes tomen valores dados. Por tanto los otros $n\frac{n-1}{2}$, quedan completamente determinados por la naturaleza de la variedad que ellos están representando; así, $n\frac{n-1}{2}$ funciones de la posición son necesarias para determinar las relaciones métricas.

Después del último argumento que expusimos (explicado por Riemann en el Aparte 8), él se da cuenta de que para continuar estudiando las propiedades de la métrica es necesario limitar esta flexibilidad del cambio de coordenadas, y toma unas coordenadas que se construyen de una manera geométrica. Antes de explicar las coordenadas que introdujo Riemann, mencionaremos un teorema, probado por Nash en 1956, que nos facilitará la definición de geodésica.

Definición 2.7. *Una variedad M donde se ha definido una métrica riemanniana es llamada una variedad riemanniana. Dada una curva diferenciable $\alpha : [a, b] \to M$, definimos la longitud de α como*

$$l(\alpha) = \int_a^b \sqrt{g(\alpha(t))(\alpha'(t), \alpha'(t))}dt.$$

Definición 2.8. *Diremos que dos variedades riemanniana n-dimensionales M_1 y M_2 son isométricas si existe una función diferenciable y biyectiva $h : M_1 \to M_2$ tal que para toda curva $\alpha : [a, b] \to M_1$ se tiene que la longitud de α es igual a la longitud de $h \circ \alpha : [a, b] \to M_2$. La función h es llamada una isometría.*

Teorema 2.8 (Nash, 1956). *Toda variedad riemanniana $M_1 \subset \mathbb{R}^{N_1}$ es isométrica a una variedad riemanniana $M_2 \subset \mathbb{R}^{N_2}$ con la propiedad de que el producto punto entre dos vectores tangentes a M_2 es el producto punto euclidiano en $\mathbb{R}^{N_2}$. En particular, las curvas en M_2 se miden como si estuviesen en $\mathbb{R}^{N_2}$.*

Haciendo uso de este teorema, en adelante supondremos que la métrica en las variedades que consideremos será tal que las curvas en ella se miden como si estuviesen en el espacio euclideano ambiente que las contiene.

Definición 2.9. *Sea M una variedad riemanniana. Dada una curva diferenciable $\alpha : [a,b] \to M$, diremos que α es una geodésica si $\alpha''(t)$ es perpendicular al espacio tangente $T_{\alpha(t)}M$ para todo $t \in (a,b)$.*

El siguiente teorema es una consecuencia del teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema 2.9. *Sea M una variedad riemanniana y $p \in M$ un punto en ella.*

a. *Para todo vector tangente $v \in T_pM$ en p, existe una única geodésica $\gamma_v : [0,a] \to M$ tal que $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma_v'(0) = v$.*
b. *La función definida por $exp_p(v) = \gamma_v(1)$ que toma vectores tangentes en p y los envía a puntos en M está bien definida en $W_\epsilon = \{v \in T_pM : g(p)(v,v) < \epsilon\}$ para algún ϵ.*
c. *La inversa de la función $\exp_p$ define coordenadas en M.*

La función exp_p es conocida como la función exponencial. Como se aprecia en el Aparte 9, las coordenadas dadas por la función exponencial eran las que Riemann decidió fijar para hacer su estudio de la métrica, pues no es difícil probar que para cada $v \in T_pM$, $exp_p(v)$ es un punto en la variedad que se encuentra a una distancia $|v|$, en la geodésica que parte de p con dirección v.

> **Aparte 9:** ... Construiremos un sistema de líneas más cortas que parten de un punto dado; así, la posición de un punto arbitrario puede ser determinado por la dirección inicial de la línea más corta el cual lo contiene, y su distancia, en esta línea, desde el punto inicial.

Lo siguiente que expone Riemann es la noción de curvatura. El significado geométrico de la curvatura de una variedad fue explicado de una manera muy clara por Riemann en el Aparte 10 usando el Teorema 2.5, probado por Gauss. Años después, para dar una definición precisa de la curvatura fue necesario introducir la noción de tensor, noción que fue elaborada principalmente por Ricci durante los años 1887 y 1896.

> **Aparte 10:** ... Para dar un significado tangible a la curvatura de una variedad extendida n-dimensional en un punto dado, y en la dirección de una superficie que pasa a través de él, nosotros primero mencionaremos que la linea más corta que emana de un punto está completamente determinada si su dirección inicial está dada. Consecuentemente nosotros obtendremos cierta superficie si nosotros prolongamos todas las direcciones, en líneas más

> cortas dentro de la variedad, a partir del punto dado que están en el elemento de superficie dado. Esta superficie que se obtiene posee una curvatura bien definida en el punto dado, la cual es la curvatura de la variedad extendida n dimensional en el punto dado en la dirección de la superficie dada.

Nótese que la primera frase del Aparte 10 hace referencia a la parte a. del Teorema 2.9. Ya que Riemann no tenía una definición precisa de espacio tangente, él hace referencia a la curvatura en la dirección de una superficie que pasa por un punto. Esta curvatura que define Riemann es conocida en la actualidad como la curvatura seccional, y ella asigna a cada subespacio bidimensional de T_pM un número real. Cabe destacar que en lugar de hablar de la curvatura en la dirección de la superficie, se habla de la curvatura seccional en un subespacio bidimensional, la identificación hecha es: todo subespacio bidimensional determina una dirección con respecto a una superficie que tenga este subespacio como su plano tangente. La superficie a la cual se le calcula la curvatura de Gauss, cuyo valor es la curvatura seccional en el subespacio bidimensional $\pi \subset T_pM$, es la superficie

$$\Sigma_\pi = \{exp_p(v) : |v| < \epsilon \quad \text{and} \quad v \in \pi\}.$$

Esta superficie es la que se obtiene al prolongar las geodésicas que parten de p con vector velocidad en el subespacio $\pi \subset T_pM$.

El siguiente aparte explica cómo las variedades con curvatura seccional constante modelan una de las propiedades primordiales del concepto que tenía Euclides sobre lo que debería ser una geometría. Más precisamente, la propiedad de la invariancia de los objetos bajo movimientos euclidianos.

> **Aparte 11:** ... Las variedades cuya curvatura es 0 en todas partes, pueden ser consideradas como un caso especial de aquellas variedades cuya curvatura es constante en todas partes. La característica común de estas variedades cuya curvatura es constante puede expresarse como sigue: toda figura puede moverse sin ser estirada. Obviamente, las figuras no podrían ser trasladadas libremente y rotadas dentro de la variedad si la curvatura no fuese la misma en todas las direcciones y en todos los puntos. Por otra parte, las propiedades métricas de una variedad están completamente determinadas por la curvatura;...

Usando la noción de geometría riemanniana, Riemann da un primer ejemplo concreto para una geometía no euclidiana, como lo muestra el Aparte 12. En 1829, Lobachevsky y Bolyai construyeron independientemente un sistema de geometría en el cual se tenía que a través de un punto exterior a una recta pasaba más de una paralela. En 1854 cuando Riemann dio su conferencia "Sobre las hipótesis que son cimientos de la geometría", aún había confusión sobre las geometrías no euclidianas y los ejemplos de Lobachevsky y Bolyai no eran aceptados por completo.

> **Aparte 12:** Las relaciones métricas de estas variedades con curvatura constante α, pueden ser mencionadas, con respecto a una presentación analítica, usando la siguiente expresión para el elemento de linea
> $$\frac{1}{1+\frac{\alpha}{4}|x|^2}\sqrt{\sum dx_i^2}.$$

El ejemplo concreto sería tomar $\alpha = -4$, $n = 2$ y el dominio de la métrica como el conjunto $B = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Se puede verificar que las geodésicas de esta variedad riemanniana son porciones de circunferencia en B que cortan perpendicularmente a la circunferencia unidad ∂B, o porciones de líneas que pasan por el origen. Todas las geodésicas en este espacio tienen longitud infinita; verifiquemos por ejemplo que efectivamente la geodésica $\alpha(t) = (t, 0)$ donde $-1 < t < 1$ tiene longitud infinita. Usando la fórmula de la Definición 2.7 se tiene que

$$l(\alpha) = \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{-1}dt = \frac{1}{2}(\int_{-1}^{1}(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}))dt = \infty.$$

Este modelo de geometría se puede apreciar en algunos cuadros de Escher; para citar uno en particular, pensemos en el cuadro que lleva como título "Límite circular IV, cielo e infierno" podemos ver que no todos los diablos y ángeles tienen la misma área, lo cual es cierto desde el punto de vista de métrica euclidiana; sin embargo, si medimos usando la métrica en el disco B dada por Riemman en el Aparte 12, se puede pensar que todos los diablos tiene la misma área al igual que los ángeles tienen la misma área, como un resultado; dadi que hay infinitos ángeles e infinitos diablos, se tiene que el área de la bola, con esta métrica, no es finita.

La demostración de que, en una variedad con curvatura seccional constante, toda porción de variedad puede trasladarse a cualquier otro punto de la variedad y rotarse en cualquier dirección fue realizada por Cartan (1951). En esta misma referencia, Cartan también demuestra que las curvaturas seccionales determinan la métrica como lo sugiere Riemann en el siguiente aparte:

> **Aparte 13:** ... Previamente se había discutido que eran necesarias $\frac{n(n-1)}{2}$ funciones para determinar las relaciones de la métrica en una variedad extendida $n-$dimensional, por tanto, si la curvatura es dada en $\frac{n(n-1)}{2}$ direcciones de superficies en cada punto,

> entonces las relaciones métricas de la variedad pueden ser determinadas ...

2.5. Fundamentos de la Teoría General de la Relatividad dados en la conferencia de Riemann. La tercera y última parte de la charla de Riemann se tituló *Aplicaciones al espacio*. Aquí, y en general en toda su charla, Riemann dio a entender que el objetivo principal de los conceptos que acababa de crear era el de entender el espacio donde vivimos. Para él, era claro que nuestro espacio era tridimensional, pero no aceptaba el hecho de que las mediciones en el universo debiesen hacerse usando el teorema de Pitágoras; para Riemann nuestro universo no tenía curvatura cero. Riemann afirmaba, como se puede apreciar en el siguiente aparte, que la métrica del espacio debía ser deducida de las propiedades físicas, de la experiencia.

> **Aparte 14:** ... A partir de esto, sin embargo, es una consecuencia necesaria que los teoremas de geometría no pueden ser deducidos de la noción general de variedad, sino de aquellas propiedades que distinguen el espacio de cualquier otra cantidad extendida triple concebible y que sólo pueden ser deducidas de la experiencia.

Combinando el Aparte 14 con el Aparte 13, observamos que para Riemann la naturaleza, o la experiencia, determina la métrica del espacio; la curvatura determina la métrica y, obviamente, la métrica determina la curvatura. Por tanto, para Riemann, de alguna forma había que determinar la métrica del espacio observando la naturaleza. Esto es lo que precisamente se hace en la Teoría General de la Relatividad: de la observación se deduce lo que es conocido como el tensor de energía-momento, conocer este tensor determina la curvatura del espacio (o ciertos promedios que son llamados curvatura de Ricci), y este conocimiento de la curvatura determina la métrica, como lo afirmaba Riemann.

Vemos así que la parte fundamental de la Teoría de la Relatividad se empezó a gestar desde el comienzo de la Geometía Riemanniana. Algunas diferencias entre la idea primera de Riemann y el resultado final de esta idea dado por Einstein, se dieron ya que, por razones físicas, fue necesario considerar el tiempo como parte de la variedad por estudiar; esto implicaba estudiar una variedad tetradimensional, el espacio-tiempo, en lugar de una variedad tridimensional. Al incluir el tiempo como nueva cantidad de la variedad, se observa de inmediato que esta cantidad no se comporta como las demás, pues fácilmente podemos ir y regresar a un lugar pero no podemos devolvernos en el tiempo. Esta observación implicó que debía usarse una forma de medir distancias que tuviese esto en cuenta. El trabajo de distinguir la variable tiempo de las demás lo hacen las métricas semi-riemannianas, que son esencialmente las mismas, pero cambiando la condición sobre las métricas riemannianas de ser una forma bilineal definida positiva, por la condición de ser una forma bilineal no degenerada.

El siguiente aparte muestra un muy bonito argumento dado por Riemann, que indica que es probable que nuestro universo sea finito (en el sentido de que tiene un diámetro finito). Este modelo de universo fue también sugerido por Einstein.

> **Aparte 15:** ... La carencia de frontera del espacio consecuentemente tiene una certeza empírica más grande que cualquier experiencia del mundo externo. Pero su infinitud no se tiene; es más, el espacio debería ser necesariamente finito si uno supone la independencia de los cuerpos con respecto a su posición, y si se supone que nuestro espacio tiene curvatura constante positiva, aun si el valor de la curvatura es muy pequeño.

El argumento parte del supuesto de que un cuerpo determinado se puede llevar a cualquier parte del universo y puede ser puesto en cualquier dirección sin que el cuerpo en cuestión se distorsione. Luego, teniendo en cuenta lo explicado en el Aparte 11, se tiene que la curvatura del espacio debe ser constante, y en caso de que esta curvatura sea positiva, Riemann afirma, en el Aparte 15, que el espacio debe ser finito. El Aparte 15 en el que Riemann afirma que espacios con curvatura constante positiva son finitos, se generalizó al siguiente corolario de un teorema probado por Myers.

Corolario 2.1 (Myers, 1941)**.** *Sea M una variedad riemanniana completa. Si M tiene curvatura seccional positiva, entonces M debe ser compacta.*

Riemann también considera el caso en que los cuerpos no se pueden transladar o rotar de un punto a otro sin ser distorsionados; al hacer esta consideración empieza a darse cuenta de la dificultad que se presenta al modelar el universo con una variedad riemanniana. Veamos el aparte donde anota esta observación.

> **Aparte 16:** ... Pero si suponemos que una independencia de los cuerpos con respecto a la posición no existe, entonces uno no puede sacar conclusiones acerca de las relaciones métricas en lo infinitamente pequeño de lo infinitamente grande; en cada punto la curvatura puede tener valores arbitrariamente pequeños en tres direcciones, bajo el solo supuesto de que las curvaturas en cada porción medible de espacio no sean perceptiblemente diferentes de cero.

Terminaremos esta sección citando los siguiente apartes que muestran que Riemann sospechaba que la Teoría de la Relatividad tendría limitaciones modelando la física de distancias pequeñas.

> **Aparte 17:** ... Estas circunstancias son importantes cuando las determinaciones empíricas son extendidas más allá de los límites de la observación en lo inmesurablemente grande y lo inmesurablemente pequeño; para lo último puede obviamente ser más inexacto más allá de la frontera de la observación que para el primero.
>
> **Aparte 18:** ... Ahora parece ser que las nociones empíricas en las cuales se basa la determinación de la métrica, los conceptos de cuerpos sólidos y el de rayos de luz, pierden su validez en lo infinitamente pequeño, y de esta manera es muy concebible que las relaciones métricas del espacio en lo relacionado con lo infinitamente pequeño no se puedan confrontar con las hipótesis de geometría.
>
> **Aparte 19:** La pregunta de la validez de las hipótesis de la geometría en lo infinitamente pequeño está conectada con la pregunta de las bases para determinar las relaciones métricas del espacio. En conexión con esta pregunta, la cual en realidad aún está en el marco del estudio del espacio, el comentario que hicimos anteriormente aplica en este caso, es decir: en una variedad discreta los principios de relaciones métricas están ya contenidos en el concepto de variedad, pero en una variedad continua deben de venir de algún otro sitio. De esta manera se tiene que, o la realidad que subyace nuestro espacio debe constituir una variedad discreta, o las bases de las relaciones métricas deben ser buscadas afuera de ellas, en conexión con las fuerzas que actúan sobre ellas.

El último aparte, a pesar de no ser muy claro, da a entender que Riemann intuía que para manejar distancias pequeñas era necesario trabajar con cantidades discretas. Esta es la esencia de la mecánica cuántica.

Referencias

1. Ambrose, W. (1956). Parallel translation of Riemannian curvature. *Ann. of Math.*, *64*, 337-363.
2. Cartan, e. (1951). *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann* (2ème édition). Paris, Gauthier-Villard.
3. Myers, S. B. (1941). Riemannian manifolds with positive mean curvatura. *Duke Math. J.*, *8*, 401-404.
4. Nash, J. F. (1956). The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of. Math.*, *63*, 20-63.

5. Riemann, B. (1854). *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Habilitationsschrift presentada a la Facultad de Filosofía de la Universidad de Göttingen y publicada después de la muerte de su autor en los Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 13 (1867), 133-152. Reimpresa en Mathematische Werke (1892), bajo la supervisión de H. Weber y R. Dedekind, segunda edición, 1892. Traducción inglesa de W. K. Clifford, On the Hypotheses which lie at the Bases of Geometry, Nature, *8* (183-184), 14-17, 36, 37.
6. Spivak, M. (1979). *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry* (Vol. II). Publish or Perish Inc.

Referencia	Recepción	Aprobación
PERDOMO, O. M. Sobre el nacimiento de la Geometría Riemanniana. *Revista Tumbaga (2008), 3, 157-173*	**Día/mes/año** 11/02/2008	**Día/mes/año** 03/04/2008