Sobre la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado

Arnold Oostra
Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias, Universidad del Tolima, Ibagué, Colombia[1].

Resumen
En este artículo divulgativo se muestran y se deducen las fórmulas que expresan las raíces de las ecuaciones polinómicas de primer hasta cuarto grado. Además se proponen ejemplos y ejercicios sobre la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado.
Palabras y frases clave: Ecuaciones polinómicas, raíces cúbicas, números complejos, fórmula de Tartaglia-Cardano, ecuación de Ferrari.

Abstract
We show and deduce the formulas that give the roots of first to fourth degree polynomial equations. Besides we give examples and exercises on how to solve third and fourth degree equations.
Key words and phrases: Polynomial equations, cube roots, complex numbers, Tartaglia-Cardano formula, Ferrari's equation.

Clasificación de materias(MSC2000): 00-01, 12D10, 01A40.

Introducción

Sin duda, una de las fórmulas más conocidas y usadas en la Matemática es la que provee las soluciones de una ecuación de segundo grado. En cambio para las ecuaciones de tercer y cuarto grado tal procedimiento es prácticamente desconocido, si bien se sabe que ellas pueden resolverse mediante fórmulas del mismo estilo. Aparecen algunas referencias en textos de historia pero en la bibliografía de uso general no se encuentran explicaciones sencillas ni mucho menos ejemplos o ejercicios. En esta nota se quiere llenar ese vacío, al menos para los lectores de Tumbaga.

Por supuesto, la importancia de este tema es más didáctica e histórica que técnica. En efecto, en la actualidad existen programas de computador que mediante métodos numéricos resuelven completamente y al instante cualquier ecuación polinómica de cualquier grado.

Correo electrónico: oostra@telecom.com.co

1. Solución de ecuaciones de primer y segundo grado

En todo este escrito, las "ecuaciones" son ecuaciones polinómicas con una sola indeterminada. Una ecuación de primer grado tiene la forma siguiente, donde los coeficientes a y b son números reales o complejos y $a \neq 0$.

$$\boxed{ax + b = 0}$$

Prácticamente a simple vista se observa que la única solución está dada por la igualdad siguiente:

$$\boxed{\boxed{x = -\frac{b}{a}}}$$

Mucho más interesante resulta una ecuación de segundo grado, que en general tiene la siguiente forma donde a, b y c son números reales o complejos y $a \neq 0$.

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

Multiplicando esta ecuación por a y agrupando algunos factores resultan las ecuaciones siguientes:

$$a^2x^2 + abx + ac = 0$$
$$(ax)^2 + b(ax) = -ac$$

Definiendo la indeterminada y como ax se obtiene la siguiente ecuación, en la cual se puede "completar el cuadrado" como se indica a continuación:

$$y^2 + by = -ac$$
$$y^2 + 2y\left(\frac{b}{2}\right) = -ac$$
$$y^2 + 2y\left(\frac{b}{2}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$
$$\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - ac$$
$$\left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$$

En general, la ecuación $z^2 = d$ tiene dos soluciones: si d es un número real positivo, son $\sqrt{d}$ y $-\sqrt{d}$; si es un real negativo, son $i\sqrt{-d}$ y $-i\sqrt{-d}$; si d es un número complejo no real, también existen dos raíces cuadradas, opuestas la una de la otra. En todos los casos se escribe simplemente

$z = \pm\sqrt{d}$, donde el signo $\pm$ (*más o menos*) no significa "casi" como en el lenguaje común, sino que significa "dos valores, opuestos el uno del otro".

Así las ecuaciones anteriores conducen a las siguientes:

$$
\begin{aligned}
y + \frac{b}{2} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}} \\
y + \frac{b}{2} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \\
y &= -\frac{b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2} \\
y &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}
\end{aligned}
$$

Sustituyendo de nuevo el valor asignado a y y dividiendo entre a (lo cual es posible porque $a \neq 0$) se llega a la muy conocida fórmula

$$
\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \tag{1.1}
$$

2. Raíces cúbicas complejas

En la sección anterior se hizo evidente que la solución de las ecuaciones cuadráticas está ligada a la existencia de raíces cuadradas. De igual manera la solución de las ecuaciones cúbicas está profundamente relacionada con las raíces cúbicas de números reales y complejos. Por ello se destina este apartado a revisar ese tema.

Un número real arbitrario r tiene una sola raíz cúbica real $\sqrt[3]{r}$. Un número complejo no nulo z tiene tres raíces cúbicas complejas. Viendo un número real como un complejo, entonces también todo real no nulo tiene tres raíces cúbicas complejas, de las cuales, como se verá, una es real y las otras dos son complejas conjugadas.

Para el cálculo de sus raíces cúbicas complejas, el número complejo $z \neq 0$ se expresa en su forma trigonométrica

$$
\begin{aligned}
z &= \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \\
&= \rho[\cos(\theta + 2\pi) + i\,\mathrm{sen}(\theta + 2\pi)] \\
&= \rho[\cos(\theta + 4\pi) + i\,\mathrm{sen}(\theta + 4\pi)] \\
&= \rho[\cos(\theta + 6\pi) + i\,\mathrm{sen}(\theta + 6\pi)] = \cdots
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

Aquí ρ es un número real positivo y θ es un real con $0 \leq \theta < 2\pi$.

Ahora bien, si $a(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ es una posible raíz cúbica de z, por el conocido teorema de De Moivre se tiene que

$$[a(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)]^3 = a^3\left(\cos(3\alpha) + i\operatorname{sen}(3\alpha)\right)$$

Igualando con la expresión (2.1) para z resultan los valores siguientes:

$$\begin{array}{lll}
a^3 = \rho & \text{luego} & a = \sqrt[3]{\rho} \\
3\alpha = \theta & \text{luego} & \alpha = \dfrac{\theta}{3} \\
3\alpha = \theta + 2\pi & \text{luego} & \alpha = \dfrac{\theta + 2\pi}{3} \\
3\alpha = \theta + 4\pi & \text{luego} & \alpha = \dfrac{\theta + 4\pi}{3} \\
3\alpha = \theta + 6\pi & \text{luego} & \alpha = \dfrac{\theta + 6\pi}{3} \equiv \dfrac{\theta}{3} \\
3\alpha = \theta + 8\pi & \text{luego} & \alpha = \dfrac{\theta + 8\pi}{3} \equiv \dfrac{\theta + 2\pi}{3}
\end{array}$$

Aquí el símbolo $\equiv$ designa ángulos *equivalentes* en el sentido de que la diferencia entre ellos es un múltiplo de 2π. Se observa que $\alpha \equiv \beta$ si y sólo si $t(\alpha) = t(\beta)$ para todas las funciones trigonométricas t.

Nótese que los muchos ángulos de (2.1), que allí representan todos el mismo número complejo, en el cálculo de las raíces dan lugar a tres ángulos no equivalentes y que dividen la circunferencia en tres partes iguales. Resumiendo, las raíces cúbicas complejas de $z = \rho(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ son las siguientes.

$$\begin{cases}
\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta}{3}\right) \\
\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+2\pi}{3}\right) \\
\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\theta+4\pi}{3}\right)
\end{cases}$$

En particular, si r es un número real positivo, se tiene $\rho = r$ y $\theta = 0$, de manera que hay una raíz real en el semiplano derecho y dos raíces complejas conjugadas en el semiplano izquierdo; si r es un número real negativo es $\rho = -r$ y $\theta = \pi$ luego hay una raíz real en el semiplano izquierdo y dos raíces complejas conjugadas en el derecho. En ambos casos las raíces cúbicas de r son las siguientes:

$$\sqrt[3]{r} \qquad \sqrt[3]{r}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) \qquad \sqrt[3]{r}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)$$

Cabe anotar que de la misma manera pueden obtenerse las raíces n-ésimas de un número complejo z no nulo, siendo n cualquier entero positivo. Si z se expresa como en (2.1), las n raíces están sobre la circunferencia de radio real $\sqrt[n]{\rho}$, la primera con un ángulo $\frac{\theta}{n}$ y las demás distribuidas de manera uniforme con diferencia de ángulos $\frac{2\pi}{n}$. En particular, si n es impar entonces todo número real tiene una sola raíz real n-ésima; si n es par entonces un real positivo tiene dos raíces reales mientras un real negativo no tiene ninguna.

3. Solución de ecuaciones de tercer grado

En esta sección se desarrolla para las ecuaciones de tercer grado un procedimiento similar al aplicado en la sección 1 a las de segundo grado.

Simplificación algebraica. Una ecuación cúbica tiene la forma siguiente, donde los coeficientes a, b, c d son números reales o complejos y $a \neq 0$.

$$\boxed{ax^3 + bx^2 + cx + d = 0} \tag{3.1}$$

Multiplicando por a^2 o por otra constante adecuada, esta ecuación toma la forma

$$(ex)^3 + fx^2 + gx + h = 0$$

Definiendo la indeterminada y como ex se obtiene la ecuación

$$y^3 + jy^2 + ky + l = 0$$

En esta ecuación se puede "completar el cubo" como sigue.

$$\left(y + \frac{j}{3}\right)^3 + my + n = 0$$

Definiendo finalmente la indeterminada z como $y + \frac{j}{3}$ la ecuación anterior deviene

$$z^3 + pz + q = 0 \tag{3.2}$$

En resumen, toda ecuación cúbica puede llevarse a la forma (3.2), esto es, con coeficiente principal 1 y sin término en el cuadrado de la indeterminada.

La fórmula de Tartaglia - Cardano. Las soluciones para la ecuación cúbica simplificada $z^3+pz+q = 0$ están dadas por la siguiente fórmula:

$$\boxed{\boxed{z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}}} \tag{3.3}$$

Si bien es seguro que ni Nicolo Fontana apodado Tartaglia –esto es, *Tartamudo*– (1500-1557) ni Girolamo Cardano (1501-1576) emplearon un simbolismo como este, sus aportes a la solución algebraica de las ecuaciones cúbicas amerita llamar a la expresión (3.3) la *fórmula de Tartaglia-Cardano.*

Puesto que los números dentro de los radicales pueden ser reales o complejos, lo cual depende del *discriminante* $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$, las dos raíces cúbicas de (3.3) son complejas. Así pues, esta expresión es la suma de dos números complejos que toman, cada uno, tres valores distintos. Las tres raíces de la ecuación (3.2) están entre las nueve posibles sumas. Finalmente basta volver a sustituir las indeterminadas para hallar las soluciones de la ecuación original (3.1).

Deducción de la fórmula. La fórmula de Tartaglia-Cardano (3.3) puede deducirse como sigue. Supóngase que la indeterminada z es suma de otras dos, es decir,

$$z = v + w$$

Efectuando este cambio de variable en la ecuación simplificada (3.2), se obtienen de manera sucesiva las ecuaciones siguientes:

$$\begin{gathered}
(v+w)^3 + p(v+w) + q = 0 \\
v^3 + 3v^2w + 3vw^2 + w^3 + p(v+w) + q = 0 \\
v^3 + 3vw(v+w) + w^3 + p(v+w) + q = 0 \\
v^3 + w^3 + (3vw + p)(v+w) + q = 0
\end{gathered}$$

Esta última ecuación se resuelve si se soluciona el sistema

$$\begin{cases} v^3 + w^3 + q = 0 \\ 3vw + p = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

Multiplicando la primera ecuación de (3.4) por v^3 y sustituyendo el valor dado por la segunda $vw = -\frac{p}{3}$, resultan las ecuaciones

$$\begin{gathered}
(v^3)^2 + v^3w^3 + qv^3 = 0 \\
(v^3)^2 + qv^3 = -(vw)^3 \\
(v^3)^2 + 2v^3\left(\frac{q}{2}\right) = \frac{p^3}{27} \\
(v^3)^2 + 2v^3\left(\frac{q}{2}\right) + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \\
\left(v^3 + \frac{q}{2}\right)^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}
\end{gathered}$$

En este caso basta considerar una sola raíz cuadrada. A continuación, la fórmula de la derecha en el primer renglón se obtiene de (3.4) y en el segundo resulta de sustituir el valor calculado a la izquierda.

$$v^3 + \frac{q}{2} = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad\qquad w^3 = -q - v^3$$
$$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \qquad\qquad w^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$
$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \qquad\qquad w = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

De donde se obtiene la fórmula (3.3).

La relación $vw = -\frac{p}{3}$ permite encontrar con mayor facilidad las parejas de raíces cúbicas (v, w) cuya suma es la solución efectiva de la ecuación (3.2).

Ejemplo. *Se desea resolver la ecuación cúbica*

$$25x^3 + 15x^2 - 9x + 1 = 0 \tag{3.5}$$

En este caso basta multiplicar por 5 para obtener las ecuaciones

$$125x^3 + 75x^2 - 45x + 5 = 0$$
$$(5x)^3 + 3(5x)^2 - 9(5x) + 5 = 0$$

Ahora se sustituye $5x$ por y y se completa el cubo:

$$y^3 + 3y^2 - 9y + 5 = 0$$
$$(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - 12y + 4 = 0$$
$$(y+1)^3 - 12y + 4 = 0$$
$$(y+1)^3 - 12(y+1) + 16 = 0$$

Sustituyendo $y + 1$ por z se llega a la ecuación simplificada

$$z^3 - 12z + 16 = 0 \tag{3.6}$$

Así que en este caso $p = -12$ y $q = 16$. En consecuencia $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{256}{4} - \frac{1728}{27} = 64 - 64 = 0$, y la fórmula de Tartaglia-Cardano se reduce a

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}} \\ &= \sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-8} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Aquí se debe tener mucho cuidado de no escribir $\sqrt[3]{-8} + \sqrt[3]{-8} = 2\sqrt[3]{-8}$ ni $\sqrt[3]{-8} = -2$ (aunque, como se verá a continuación, en este caso eso arrojaría *una* de las soluciones de (3.6)). En realidad, como se observó en la sección 2, las raíces cúbicas de -8 son las siguientes:

$$\begin{aligned}&-2\\&-2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)=1-\sqrt{3}\,i\\&-2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right)=1+\sqrt{3}\,i\end{aligned}$$

Luego la solución (3.7) podría expresarse como sigue:

$$z=\{-2,\ 1-\sqrt{3}\,i,\ 1+\sqrt{3}\,i\}+\{-2,\ 1-\sqrt{3}\,i,\ 1+\sqrt{3}\,i\}$$

Ahora se buscan parejas de complejos, uno del primer conjunto y otro del segundo, cuyo producto es $-\frac{p}{3}=4$.

v	w	$z=v+w$
-2	-2	-4
$1-\sqrt{3}\,i$	$1+\sqrt{3}\,i$	2
$1+\sqrt{3}\,i$	$1-\sqrt{3}\,i$	2

Así que las soluciones de la ecuación simplificada (3.6) son -4, 2 y 2, como se verifica fácilmente. Luego los valores para $y=z-1$ son -5, 1, 1, y finalmente sustituyendo $x=\frac{y}{5}$, las soluciones de la ecuación original (3.5) son -1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$.

Nota. Vale la pena advertir que en los ejemplos y en los ejercicios presentados en este artículo, los coeficientes se han escogido cuidadosamente de tal forma que los cálculos sean sencillos. Por supuesto, en ecuaciones arbitrarias estos cálculos pueden resultar considerablemente engorrosos, pero el procedimiento es el mismo y funciona a la perfección.

Ejercicios. *Resolver las siguientes ecuaciones cúbicas:*

1. $2x^3-3x^2+1=0$
2. $4x^3+6x^2-3x-7=0$
3. $27x^3+54x^2+27x+1=0$

4. Solución de ecuaciones de cuarto grado

Si se observa con cuidado, puede notarse que el método desarrollado en la sección 3 consiste en reducir la ecuación dada a una o varias ecuaciones de grado menor. Existe un procedimiento similar para las ecuaciones de cuarto grado, que se explica en esta sección.

Reducción a una ecuación de tercer grado. Una ecuación de cuarto grado tiene la forma siguiente, donde los coeficientes a, b, c, d, e son números reales o complejos.

$$\boxed{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0} \tag{4.1}$$

Siguiendo los mismos pasos que en la sección anterior, esta ecuación puede llevarse a una forma simplificada en la cual el coeficiente principal es 1 y no hay término en el cubo de la indeterminada, como se muestra a continuación:

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0 \tag{4.2}$$

Ahora se consideran dos casos.

Caso I. $q = 0$. Las soluciones de la ecuación simplificada (4.2) con $q = 0$ están dadas por la fórmula siguiente. Aunque no se escribe el signo $\pm$, aquí se trata de raíces cuadradas complejas, luego se entiende que cada raíz aporta dos valores y en principio resultan cuatro soluciones de la ecuación:

$$\boxed{\boxed{z = \sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}}}} \tag{4.3}$$

Caso II. $q \neq 0$. Ahora, las soluciones de (4.2) están dadas por la fórmula

$$\boxed{\boxed{z = \frac{\delta\sqrt{\varepsilon}}{2} + \sqrt{-\frac{\varepsilon}{4} - \frac{p}{2} - \frac{q\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}}}} \tag{4.4}$$

Aquí $\delta \in \{-1, 1\}$ dando lugar a dos fórmulas, en cada una de las cuales las raíces cuadradas complejas arrojan, en principio, dos raíces. Por otro lado, el complejo ε es cualquiera de las raíces de la siguiente ecuación cúbica auxiliar, llamada la *resolvente cúbica* de la ecuación (4.2), y $\sqrt{\varepsilon}$ es cualquiera de sus raíces cuadradas.

$$\boxed{\boxed{x^3 + 2px^2 + (p^2 - 4r)x - q^2 = 0}} \tag{4.5}$$

Revirtiendo las sustituciones hechas se encuentran las soluciones de la ecuación original (4.1).

La resolvente cúbica (4.5) podría llamarse la *ecuación de Ferrari* dado que Ludovico Ferrari (1522-1565) fue quien resolvió por primera vez ecuaciones de cuarto grado, reduciéndolas a ecuaciones de tercer grado.

Deducción de las fórmulas. En el primer caso, $q = 0$, definiendo una nueva indeterminada u como $u = z^2$, la ecuación (4.2) se reduce a

$$u^2 + pu + r = 0$$

Según la fórmula (1.1) de la sección 1 es $u = \frac{-p+\sqrt{p^2-4r}}{2} = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - r}$, lo cual conduce a la expresión (4.3).

Para justificar la fórmula correspondiente al segundo caso, $q \neq 0$, primero se observa el siguiente desarrollo con $\varepsilon \neq 0$:

$$\begin{aligned} \left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 &= z^4 + (p+\varepsilon)z^2 + \left(\frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 \\ &= z^4 + pz^2 + \varepsilon z^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon^2 + 2p\varepsilon + p^2) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Sustituyendo la expresión (4.6) en la ecuación simplificada de cuarto grado (4.2) se obtiene la siguiente cadena de ecuaciones equivalentes.

$$\begin{gathered} z^4 + pz^2 + qz + r = 0 \\ \left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \varepsilon z^2 - \frac{1}{4}(\varepsilon^2 + 2p\varepsilon + p^2) + qz + r = 0 \\ \left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \left[\varepsilon z^2 - qz + \frac{1}{4}(\varepsilon^2 + 2p\varepsilon + p^2 - 4r)\right] = 0 \\ \left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \left[(\sqrt{\varepsilon}\, z)^2 - \frac{q}{\sqrt{\varepsilon}}(\sqrt{\varepsilon}\, z) + \frac{1}{4}(\varepsilon^2 + 2p\varepsilon + p^2 - 4r)\right] = 0 \\ \left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \left[\left(\sqrt{\varepsilon}\, z - \frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + \frac{1}{4}(\varepsilon^2 + 2p\varepsilon + p^2 - 4r) - \frac{q^2}{4\varepsilon}\right] = 0 \\ \left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \left[\left(\sqrt{\varepsilon}\, z - \frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left(\varepsilon^3 + 2p\varepsilon^2 + (p^2 - 4r)\varepsilon - q^2\right)\right] = 0 \end{gathered}$$

En este punto es evidente que si ε es cualquiera de las soluciones de la ecuación de Ferrari (4.5), es decir, si $\varepsilon^3 + 2p\varepsilon^2 + (p^2 - 4r)\varepsilon - q^2 = 0$, entonces esta última ecuación se reduce a la siguiente diferencia de cuadrados (se observa que cualquier solución ε de (4.5) es diferente de cero puesto que $q \neq 0$).

$$\left(z^2 + \frac{p+\varepsilon}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\varepsilon}\; z - \frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 = 0 \tag{4.7}$$

Esta expresión puede factorizarse como sigue:

$$\left(z^2+\frac{p+\varepsilon}{2}+\sqrt{\varepsilon}\,z-\frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(z^2+\frac{p+\varepsilon}{2}-\sqrt{\varepsilon}\,z+\frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)=0$$

$$\left(z^2+\sqrt{\varepsilon}\,z+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{p}{2}-\frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(z^2-\sqrt{\varepsilon}\,z+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{p}{2}+\frac{q}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)=0$$

Las dos últimas ecuaciones de segundo grado pueden escribirse como una sola de la siguiente manera, con $\delta \in \{-1, 1\}$.

$$z^2-\delta\sqrt{\varepsilon}\,z+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{p}{2}+\frac{q\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}=0 \tag{4.8}$$

Aplicando de nuevo la fórmula (1.1) de la sección 1 se obtiene la expresión (4.4) como se indica a continuación.

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\left(\delta\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{(\delta\sqrt{\varepsilon})^2-4\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{p}{2}+\frac{q\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)}\right)\\ &= \frac{\delta\sqrt{\varepsilon}}{2}+\sqrt{\frac{\varepsilon}{4}-\left(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{p}{2}+\frac{q\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)}\\ &= \frac{\delta\sqrt{\varepsilon}}{2}+\sqrt{-\frac{\varepsilon}{4}-\frac{p}{2}-\frac{q\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}} \end{aligned}$$

Ejemplo. *Se desea resolver la siguiente ecuación de cuarto grado:*

$$9x^4+12x^3+18x^2+11x+6=0 \tag{4.9}$$

Multiplicando por 9 y agrupando, la ecuación se transforma en

$$81x^4+108x^3+162x^2+99x+54=0$$

$$(3x)^4+4(3x)^3+18(3x)^2+33(3x)+54=0$$

Ahora se sustituye $3x$ por y y se completa la cuarta potencia:

$$y^4+4y^3+18y^2+33y+54=0$$

$$(y^4+4y^3+6y^2+4y+1)+12y^2+29y+53=0$$

$$(y+1)^4+12y^2+29y+53=0$$

$$(y+1)^4+12(y^2+2y+1)+5y+41=0$$

$$(y+1)^4+12(y+1)^2+5(y+1)+36=0$$

Sustituyendo $y+1$ por z se llega a la ecuación en forma simplificada:

$$z^4+12z^2+5z+36=0 \tag{4.10}$$

En este caso $q = 5 \neq 0$, y la siguiente es la resolvente cúbica.

$$x^3 + 24x^2 - 25 = 0$$

Aunque a esta ecuación se puede aplicar todo el procedimiento de la sección 3 (este es otro ejercicio para el lector), la observación simple de los coeficientes permite afirmar que $x = 1$ es una solución y, como se indicó, para resolver la ecuación (4.10) basta conocer una de las raíces de la resolvente cúbica. Se toma pues $\varepsilon = 1$ y $\sqrt{\varepsilon} = 1$ de manera que en este caso la fórmula (4.4) es la siguiente:

$$\begin{aligned} z &= \frac{\delta}{2} + \sqrt{-\frac{1}{4} - \frac{12}{2} - \frac{5\delta}{2}} \\ &= \frac{\delta}{2} + \sqrt{-\frac{25}{4} - \frac{5\delta}{2}} \\ &= \frac{\delta}{2} + \frac{\sqrt{-25 - 10\delta}}{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta + \sqrt{-25 - 10\delta}\right) \end{aligned}$$

Para $\delta = -1$ se obtienen las soluciones $z = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{15}\, i)$ y para $\delta = 1$ resulta $z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{35}\, i)$. Finalmente, sustituyendo $y = z - 1$ y $x = \frac{y}{3}$ se obtienen las cuatro soluciones de la ecuación propuesta (4.9):

$$\frac{1}{6}(-3 - \sqrt{15}\, i), \quad \frac{1}{6}(-3 + \sqrt{15}\, i), \quad \frac{1}{6}(-1 - \sqrt{35}\, i), \quad \frac{1}{6}(-1 + \sqrt{35}\, i).$$

Ejercicios. *Resolver las siguientes ecuaciones de cuarto grado.*

1. $4x^4 + 32x^3 + 91x^2 + 108x + 45 = 0$
2. $4x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 5x + 2 = 0$
3. $4x^4 + 16x^3 + 33x^2 + 23x + 5 = 0$

5. Acerca de las ecuaciones de quinto grado ... y más allá

Después de los trabajos exitosos de Cardano, Tartaglia y Ferrari, durante siglos muchos matemáticos buscaron de manera infructuosa una fórmula que diera las soluciones de cualquier ecuación de quinto grado. Fue Niels Henrik Abel (1802-1829) quien demostró de manera concluyente que tal fórmula general no existe. Por poco tiempo aún subsistió el problema de decidir para cuáles ecuaciones de grado 5 o superior sí existen tales fórmulas, pero este interrogante fue resuelto de manera final por Evariste Galois (1811-1832). Además de mostrar la imposibilidad de resolver por fórmulas generales las ecuaciones de cualquier grado mayor que 4, sus trabajos dieron origen a la Teoría de Grupos.

Agradecimientos

El autor agradece profundamente a Joaquín Álvarez, profesor titular del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad del Tolima, no sólo por su permanente ejemplo como maestro, sino además por haberle regalado la idea para escribir este artículo.

Bibliografía

1. Albis V. (1984). *Temas de Aritmética y Álgebra*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
2. Castro I. (1994). *Temas de Teoría de Cuerpos, Teoría de Anillos y Números Algebraicos*, vol. III. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.
3. Fraleigh J. B. (1982) *A First Course in Abstract Algebra* (3rd ed.). Reading (Massachusetts): Addison-Wesley.

Referencia	Recepción	Aprobación
Oostra, A. Sobre la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado. *Revista Tumbaga (2008), 3, 174-186*	**Día/mes/año** 01/07/2008	**Día/mes/año** 22/07/2008