ANALES
de la Universidad Metropolitana

El factor de descuento estocástico en la valoración de proyectos de inversión

María del Carmen Valls Martínez[1]
Salvador Cruz Rambaud[2]
Universidad de Almería
Departamento de Dirección y Gestión de Empresas
mcvalls@ual.es[1]
scruz@ual.es[2]

Resumen

Este trabajo proporciona una expresión aproximada para calcular el valor actual neto (VAN) de una inversión en el caso de tipos de interés variables. En efecto, si los tipos de interés son variables aleatorias, la mayor dificultad que presenta el cálculo del VAN es encontrar una expresión matemática para el factor de descuento, puesto que el tipo de interés está incluido en el denominador. En tal situación, el primer problema es determinar la función de densidad del factor de descuento aleatorio y después calcular su valor. No cabe ninguna duda de que este procedimiento es muy complicado, incluso cuando la función de densidad de la variable aleatoria inicial es elemental. En este trabajo, a partir de los momentos de primer y segundo orden del tipo de interés aleatorio, se obtiene un resultado muy aproximado, salvando los problemas mencionados.

Palabras clave: VAN, tipo de interés aleatorio, esperanza matemática, momentos.

Abstract

This paper provides an approximated expression for the net present value (NPV) of an investment in the case of random interest rates. In effect, if the rates of interest are random variables, the most difficulty when trying to calculate the NPV is to find the mathematical expectation of the discount factor because the interest rate is included in the denominator. In this way, the first problem is to determine the density function of the random discount factor and after to calculate its mean. There is not any doubt that this is a very complicated procedure even when the density function of the initial random variable is elementary. In this paper, starting from the moments of the first and the second orders of the random interest rate, we obtain a very approximated result avoiding the aforementioned problems.

Key words: NPV, random interest rate, mathematical expectation, moments.

Introducción

En el mundo financiero es bien conocida la fórmula que determina el valor actual, V_0, de un proyecto de inversión de duración n años, desembolso inicial A, flujos netos de caja Q_1, Q_2, ..., Q_n y valor residual V_n:

$$V_0 = -A + \sum_{k=1}^{n} \frac{Q_k}{\prod_{h=1}^{k}(1+i_h)} + \frac{V_n}{\prod_{h=1}^{n}(1+i_h)},$$

suponiendo que i_h es el tipo de interés variable vigente en el h-ésimo año. Análogamente, los modelos de valoración de empresas basados en su capacidad de generación de rentas futuras, determinan el valor de rendimiento de la firma (VR) a partir de la actualización de las rentas potenciales estimadas (R_k):

$$VR = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_k}{\prod_{h=1}^{k}(1+i_h)}.$$

En esta fórmula podría considerarse que todos sus elementos, a excepción del desembolso inicial, son estocásticos:

- los flujos de caja o las rentas potenciales estimadas;
- el valor residual;
- la duración; y
- los tipos de interés.

Si los flujos de caja y/o el valor residual son aleatorios, estos valores podrían ser sustituidos por sus equivalentes ciertos y la expresión anterior quedaría así:

$$V_0 = -A + \sum_{k=1}^{n} \frac{E(Q_k)}{\prod_{h=1}^{k}(1+i_h)} + \frac{E(V_n)}{\prod_{h=1}^{n}(1+i_h)}.$$

La elección de los tipos de interés es, quizá, la mayor dificultad que el evaluador debe resolver para determinar el valor actual de una inversión (sea ésta individual o una empresa en su conjunto), debido a que pequeñas variaciones en los tipos pueden ocasionar grandes variaciones en el valor actual. Si los tipos elegidos son altos, se obtendrá una infravaloración del proyecto y si, por el contrario, se utilizan unos tipos bajos, obtendremos una sobrevaloración de aquél. Por ello, los empresarios con aversión al riesgo elegirán tipos más altos y los propensos al riesgo optarán por tipos más reducidos. Es, por tanto, en la determinación de los mismos donde probablemente estribe la mayor subjetividad de esta forma de evaluación.

La cuantía de los tipos de interés dependerá tanto de la coyuntura general del país en el que se encuentre la empresa, como de la situación futura estimada para la propia empresa. Cuando las perspectivas propias o del entorno sean desfavorables, los tipos de interés serán mayores, para minimizar el riesgo.

En la metodología clásica la tasa de actualización representa la rentabilidad que el inversor exige a su proyecto. Una posibilidad es considerar que esta rentabilidad viene determinada por el coste de capital, en cuyo caso, para obtener el valor objetivo (válido para cualquier inversor) de la inversión, el tipo de interés que se debe emplear es el coste medio ponderado de capital que tendrá el inversor, que es un indicador de la rentabilidad mínima que exigirá un empresario a sus inversiones. La utilización de este coste supone ignorar las opciones de inversión más rentables que pudiera tener dicho empresario.

Pero, si lo que el evaluador pretende obtener es el valor subjetivo (válido para un inversor específico y determinado), entonces sí habrán de considerarse las inversiones alternativas que se le presentan al sujeto concreto base de la valoración. En este caso, el coste de capital será aquel que coincida con la rentabilidad de las oportunidades de inversión.

Si se usa como tasa de actualización el coste de capital, se estará utilizando la rentabilidad mínima que exigirá el inversor y se obtendrá, en consecuencia, el máximo valor del proyecto. Ahora bien, otra alternativa es considerar que la rentabilidad exigida debe ser superior al coste de capital, por lo que la tasa a emplear será, asimismo, más elevada. En este caso, hay dos opciones para su determinación:

1. Estimar que la tasa debe ser la rentabilidad de las inversiones alternativas.
2. Obtener los tipos de interés de actualización como la suma de un *tipo base* (entre las distintas opciones, la más adecuada es considerar el tipo de interés de las operaciones a largo plazo sin riesgo debido a la solvencia del deudor, representado por el tipo legal del dinero, el tipo de la deuda pública a largo plazo, EURIBOR, etc.) más una *prima de riesgo* (que incluya el riesgo económico, financiero y de iliquidez) y corregir el nivel de inflación. En tal caso la tasa de actualización i vendría dada por:

$$i = g + b + br + bg + brg,$$

siendo:

- b el tipo base,
- r la prima por riesgo, y
- g el nivel general de inflación.

CUADRO Nº 1

<table>
<tr><th colspan="3">TASA DE ACTUALIZACIÓN</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Rentabilidad mínima:
coste de capital</td><td colspan="2">Valor objetivo: coste medio ponderado de capital del inversor.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Valor subjetivo: coste de capital coincidente con la rentabilidad de las oportunidades de inversión.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Rentabilidad superior</td><td colspan="2">Rentabilidad de las inversiones alternativas.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Tipo base
+
Prima de riesgo
+
Inflación</td><td>Tipo base (b):
– Tipo interés operaciones a largo plazo sin riesgo:
• tipos básicos de interés;
• tipos mercados nacionales;
• tipos mercados internacionales.
– Tipo de rendimiento del sector de la empresa.
– Tipo de interés medio del sector y del país.
– Tipo de rendimiento medio de las acciones.</td></tr>
<tr><td>Prima de riesgo (r):
– Riesgo económico.
– Riesgo financiero.
– Riesgo de iliquidez.</td></tr>
<tr><td>Inflación (g): aplicar r al tipo deflactado.</td></tr>
</table>

La previsión futura de la tasa de actualización (tipos de interés) puede realizarse mediante una extrapolación de los valores pasados, a través, por ejemplo, de un análisis de regresión.

La metodología tradicional, analizada hasta el momento, considera los tipos de interés de forma determinista, es decir, baraja un único valor posible para los mismos en cada período. Sin embargo, dado que el futuro no es conocido, será más razonable formular varias hipótesis posibles, que posteriormente serán reducidas a una sola con ayuda del tratamiento estadístico[1]. La forma más correcta de actuar racionalmente es utilizar la esperanza matemática de los distintos valores, puesto que la esperanza matemática es el valor para el cual la suma de todas las desviaciones posibles es cero. En definitiva, se trata de considerar la tasa de actualización de cada año como una variable aleatoria.

Para ello, la estructura de este trabajo es la siguiente: en la Sección 2 se plantea el problema desde un punto de vista matemático, haciéndose especial hincapié en la dificultad de los algoritmos conducentes a la determinación del factor de descuento medio conocida la función de distribución de la variable aleatoria que describe el tipo de interés aplicable a un período. La Sección 3 propone tres posibles soluciones a esta cuestión, de mayor a menor complejidad operativa, aportándose un caso práctico donde se pone de manifiesto la bondad de las aproximaciones propuestas. Por último, en la Sección 4 se resumen las aportaciones realizadas.

Planteamiento del problema

Uno de los problemas más debatidos en la Matemática Financiera es el de la estocasticidad de los tipos de interés, ya que, como puede observarse, de ellos depende la valoración de bienes y proyectos de inversión, siendo, por tanto, de vital importancia para la toma de decisiones financieras. Ahora bien, este problema puede ser abordado al menos desde dos puntos de vista:

– Desde la perspectiva de la estructura temporal de los tipos de interés.
– Conociendo la función de distribución de la variable aleatoria que describe el comportamiento del tipo de interés durante su período de vigencia.

[1] Cruz y Valls, 2002a.

Pues bien, en este trabajo seguiremos el segundo de los enfoques, suponiendo que los flujos netos de caja, que también son variables aleatorias, son independientes del tipo de interés.

Antes de comenzar el desarrollo del trabajo, y para facilitar su exposición, vamos a suponer que lo que se conoce son las funciones de densidad de los factores de capitalización aleatorios X_h que establecen la equivalencia financiera entre capitales de años consecutivos:

$$X_h = 1 + I_h \; ; \quad h = 1, 2, ..., n,$$

siendo I_h la variable aleatoria vigente durante el h-ésimo período de capitalización.

Esto no supone ninguna restricción ya que, si $f(i)$ es la función de densidad de la variable aleatoria I representativa del tipo de interés, la función de densidad de $X = 1 + I$ es:

$$g(x) = f(i)\left|\frac{di}{dx}\right| = f(i) \cdot 1 = f(i) = f(x-1),$$

por tanto, con la única diferencia de que mientras I está definida en un intervalo [a, b], X lo estará en el intervalo [a + 1, β + 1].

Más concretamente, si X_h es la variable aleatoria que describe el factor de capitalización durante el h-ésimo período:

$$V_0 = -A + \sum_{k=1}^{n} E[Q_k] \cdot E\left(\frac{1}{\prod_{h=1}^{k} X_h}\right) + E[V_n] \cdot E\left(\frac{1}{\prod_{h=1}^{n} X_h}\right)$$

y, suponiendo que los X_h son independientes:

$$V_0 = -A + \sum_{k=1}^{n} E[Q_k] \cdot \prod_{h=1}^{k} E\left(\frac{1}{X_h}\right) + E[V_n] \cdot \prod_{h=1}^{n} E\left(\frac{1}{X_h}\right).$$

En esta igualdad, no debemos pensar que $E\left(\frac{1}{X_h}\right)=\frac{1}{E(X_h)}$. Esto podría ser una aproximación, pero es posible conseguir mejores aproximaciones con un poco de esfuerzo adicional.

Soluciones propuestas

En efecto, sea (*Q*, *X*) un vector aleatorio continuo con densidad de probabilidad conjunta $f(q,x)$. Si $P(X=0)=0$, entonces el cociente de variables aleatorias:

$$Z=\frac{Q}{X}$$

es también una variable aleatoria continua y su densidad de probabilidad viene dada por[2]:

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(xz,x)|x|dx\,,$$

con lo cual su esperanza, si existe, viene dada por:

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty} zf_z(z)dz.$$

Se había definido un proceso aleatorio continuo que da lugar a una ley financiera cuando, para todo t_1, t_2 Î *T*, con $t_1 < t_2$, se cumple[3]:

$$E\left[\frac{X(t_2)}{X(t_1)}\right]>1\,,$$

2 Papoulis, 1980.

3 En Cruz y Valls, 2002b.

es decir, cuando la siguiente integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x_2}{x_1}\,dF(x_1,x_2,t_1,t_2)$$

es convergente y mayor que 1, siendo $F(x_1,x_2,t_1,t_2)$ la función de distribución de la variable aleatoria conjunta.

El inconveniente de la expresión anterior es que, para su cálculo, es necesario conocer la distribución conjunta de probabilidad. Esto requiere la búsqueda de soluciones aproximadas que eviten el complejo cálculo que hay que realizar para hallar dicha esperanza matemática. En este sentido, utilizaremos la siguiente aproximación[4]:

$$E\left(\frac{Q}{X}\right)\approx\frac{E(Q)}{E(X)}-\frac{1}{[E(X)]^2}\operatorname{cov}(Q,X)+\frac{E(Q)}{[E(X)]^3}\operatorname{var}(X).$$

Si en ella aceptamos que:

$$E\left(\frac{Q}{X}\right)\approx\frac{E(Q)}{E(X)},$$

estamos considerando que:

$$\frac{E(Q)}{[E(X)]^3}\operatorname{var}(X)\approx\frac{1}{[E(X)]^2}\operatorname{cov}(Q,X),$$

de donde:

$$\frac{E(Q)}{E(X)}\approx\frac{\operatorname{cov}(Q,X)}{\operatorname{var}(X)}.$$

[4] Rice, 1995; pp. 152-154.

En efecto, este cociente puede funcionar como factor de capitalización, ya que si *X* está fuertemente correlacionado con *Q*, es decir, $|\mathrm{cov}(Q, X)|$ es grande, el valor del cociente aumenta, por lo que estaremos dispuestos a realizar en *Q* más ajustes, ya que tenemos más confianza en lo que la desviación de *X* respecto de su media nos está diciendo acerca de cuál puede ser la desviación de *Q* respecto de su media.

Además, si *X* tiene menos dispersión, esto es, $\mathrm{var}(X)$ es pequeña, podemos alcanzar un valor mayor del cociente (y un mayor ajuste de *X*), puesto que tenemos más confianza en la precisión del valor observado para *X*.

Obsérvese que, sin embargo, no queda garantizada la escindibilidad de este factor.

Resulta evidente la enorme dificultad que supone calcular el valor exacto de $E(Z)$, incluso en el caso de que el numerador sea igual a 1, esto es, que la esperanza a calcular sea:

$$E\left(\frac{1}{X}\right),$$

suponiendo, para ello, la independencia entre los flujos netos de caja y el factor de capitalización.

La primera solución consiste en hallar la función de densidad de la variable aleatoria $\frac{1}{X}$ a partir de la función de densidad de la variable aleatoria *X* y calcular, posteriormente y con exactitud, $E\left(\frac{1}{X}\right)$. No cabe duda de que este procedimiento es muy laborioso porque, en primer lugar, requiere el cálculo de la función de densidad de la variable aleatoria $\frac{1}{X}$, lo que no es fácil. Este estudio fue llevado a cabo[5] obteniendo la función de densidad de $\frac{1}{X}$ para algunas distribuciones básicas como la uniforme, la triangular y la beta generalizada.

[5] Pérez, 1997.

Así pues, si al tipo de interés se le asigna una distribución uniforme, cuya función de densidad es:

$$f(i) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{si } a < i < b \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

entonces la función de densidad de la variable aleatoria $\dfrac{1}{X}$ es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \cdot \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } \dfrac{1}{1+b} < x < \dfrac{1}{1+a} \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

siendo los dos primeros momentos respecto al origen:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{b-a} \ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)$$

y

$$E\left[\left(\frac{1}{X}\right)^2\right] = \frac{1}{(1+a)(1+b)}.$$

Si al tipo de interés se le asigna un modelo triangular, cuya función de densidad es:

$$f(i) = \begin{cases} 0, & \text{si } i < a \\ \dfrac{2(i-a)}{(m-a)(b-a)}, & \text{si } a < i \leq m \\ \dfrac{2(i-b)}{(m-b)(b-a)}, & \text{si } m \leq i < b \\ 0, & \text{si } b < i \end{cases}$$

entonces la función de densidad de la variable aleatoria $\frac{1}{X}$ es:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{(b-m)(b-a)}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left[(1-b)-\frac{1}{x}\right], \text{si } \frac{1}{1+b}<x\leq\frac{1}{1+m}\\ \frac{2}{(m-a)(b-a)}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\left[(1-b)-\frac{1}{x}\right], \text{si } \frac{1}{1+m}\leq x<\frac{1}{1+a}\\ 0, \qquad \text{resto}\end{cases}$$

siendo los dos primeros momentos respecto al origen:

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\frac{2}{b-a}\left[\frac{b+1}{b-m}\ln\left(\frac{1+b}{1+m}\right)-\frac{a+1}{m-a}\ln\left(\frac{1+m}{1+a}\right)\right]$$

y

$$E\left[\left(\frac{1}{X}\right)^2\right]=\frac{2}{b-a}\left[\frac{1}{m-a}\ln\left(\frac{1+m}{1+a}\right)-\frac{1}{b-m}\ln\left(\frac{1+b}{1+m}\right)\right]$$

Si se supone que el tipo de interés toma valores en el intervalo (a,b) según una distribución beta, con parámetro *k* (positivo), de moda *m*, entonces su función de densidad es:

$$f(i)=\begin{cases}\frac{1}{(b-a)^{p+q-1}}\cdot\frac{1}{\beta(p,q)}\cdot(i-a)^{p-1}\cdot(b-i)^{q-1}, \text{si } a<i<b\\ 0, \qquad \text{resto}\end{cases}$$

siendo:

$$p=1+k\frac{m-a}{b-a}$$

$$q=1+k\frac{b-m}{b-a}$$

En este caso, la función de densidad de la variable aleatoria $\frac{1}{X}$ es:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^{p+q-1}} \cdot \frac{1}{\beta(p,q)x^2} \cdot \left[\frac{1}{x} - (a+1)\right]^{q-1} \left[(b+1) - \frac{1}{x}\right]^{q-1}, \text{si } \frac{1}{1+b} < x < \frac{1}{1+a} \\ 0, \qquad \text{resto} \end{cases}$$

siendo complejo el cálculo de los dos primeros momentos[6], para cuya resolución podemos recurrir a algún programa informático que nos facilite la labor.

El problema anterior puede ser resuelto también siempre que podamos calcular, de forma aproximada a su valor exacto, el valor de $E\left(\frac{1}{X}\right)$. Para ello, recurrimos a la aproximación[7]:

$$E\left(\frac{Y}{X}\right) \approx \frac{E(Y)}{E(X)} - \frac{1}{[E(X)]^2}\operatorname{cov}(X,Y) + \frac{E(Y)}{[E(X)]^3}\operatorname{var}(X).$$

En este caso, como $Y = 1$, entonces $E(Y) = 1$ y $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$. Por tanto:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) \approx \frac{1}{E(X)} + \frac{1}{[E(X)]^3}\operatorname{var}(X).$$

Haciendo operaciones:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) \approx \frac{[E(X)]^2 + \operatorname{var}(X)}{[E(X)]^3}.$$

6 Véase Pérez, 1997; pp. 118-123.

7 Mood *et al*., 1974.

Teniendo en cuenta que $\operatorname{var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, entonces:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) \approx \frac{[E(X)]^2 + E(X^2) - [E(X)]^2}{[E(X)]^3} = \frac{E(X^2)}{[E(X)]^3} = \frac{m_2}{m_1^3},$$

siendo $m_1 = E(X)$ y $m_2 = E(X^2)$ los momentos de orden 1 y 2, respectivamente, de la variable aleatoria *X*.

La expresión anterior:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) \approx \frac{1}{E(X)} + \frac{1}{[E(X)]^3}\operatorname{var}(X)$$

podría escribirse así:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) \approx \frac{1}{E(X)}\left[1 + \frac{\operatorname{var}(X)}{[E(X)]^2}\right] = \frac{1}{E(X)}(1 + CV^2),$$

siendo *CV* el coeficiente de variación de la variable aleatoria X. Es decir, que si aceptamos $\frac{1}{E(X)}$ como una aproximación de $E\left(\frac{1}{X}\right)$, estamos suponiendo que $1 + CV^2$ es un factor de corrección de dicha media.

Desde ahora en adelante, consideraremos factores de capitalización distintos para cada período, por lo que utilizaremos el subíndice *h*.

Ahora bien, para que el cociente $\frac{m_{2,h}}{m_{1,h}^3}$, donde $h = 1,2,\ldots,n,$ represente al factor de descuento de cada período, debe cumplir al menos las siguientes propiedades:

1ª) $\frac{m_{2,h}}{m_{1,h}^3} < 1.$

En efecto:

$$m_1^3 = \left[\int x \cdot f(x) \cdot dx\right]^3 > \left[\int x \cdot f(x) \cdot dx\right]^2 > \int x^2 \cdot f(x) \cdot dx = m_2,$$

siendo $\left[\int x \cdot f(x) \cdot dx\right]^3 > \left[\int x \cdot f(x) \cdot dx\right]^2$, por ser los valores del factor de capitalización, esto es de *X*, mayores que 1:

$$X_h\ [\mathrm{L}, +\infty] \to \Re.$$

Por tanto:

$$m_{1,h}^3 > m_{2,h}\text{, de donde } \frac{m_{2,h}}{m_{1,h}^3} < 1.$$

2ª) Si $h = 0, X_h = 1$ y, por tanto, $E\left(\frac{1}{X_h}\right) = 1.$

3ª) $\prod_{h=1}^{r+1} E\left(\frac{1}{X_h}\right) < \prod_{h=1}^{r} E\left(\frac{1}{X_h}\right),$

lo cual es cierto, puesto que $X_h > 1.$

Por otra parte, aplicando la fórmula aproximada de la varianza para el ratio de dos variables aleatorias[8]:

$$\operatorname{var}\left(\frac{Y}{X}\right) \approx \left(\frac{E(Y)}{E(X)}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{var}(Y)}{[E(Y)]^2} + \frac{\operatorname{var}(X)}{[E(X)]^2} - 2\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{E(X) \cdot E(Y)}\right)$$

[8] Mood *et al*., *op. cit*.

al caso en que $Y = 1$, tenemos:

$$\operatorname{var}\left(\frac{1}{X}\right) \approx \left(\frac{E(1)}{E(X)}\right)^2 \left(\frac{\operatorname{var}(1)}{[E(1)]^2} + \frac{\operatorname{var}(X)}{[E(X)]^2} - 2\frac{\operatorname{cov}(X,1)}{E(X)\cdot E(1)}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{E(X)}\right)^2 \left(\frac{0}{1} + \frac{\operatorname{var}(X)}{[E(X)]^2} - 2\frac{0}{E(X)\cdot 1}\right) = \frac{1}{[E(X)]^2}\cdot\frac{\operatorname{var}(X)}{[E(X)]^2} = \frac{\operatorname{var}(X)}{[E(X)]^4}.$$

En la tabla 1 se encuentran los valores de $\operatorname{var}\left(\frac{1}{X}\right)$, tomando los valores obtenidos de las funciones de densidad y tomando sus valores aproximados. Como podemos observar, los resultados son bastante similares.

En el caso particular de que la variable aleatoria que describe el tipo de interés sea la misma:

$$i_1 = i_2 = \cdots = i_n = I,$$

entonces:

$$1 + i_1 = 1 + i_2 = \cdots = 1 + i_n = 1 + I.$$

En este caso:

- $1 + i_1 = 1 + I = X.$
- $(1 + i_1)\cdot(1 + i_2) = (1 + I)^2 = X^2.$

$$\vdots$$

- $(1 + i_1)\cdot(1 + i_2)\cdots(1 + i_n) = (1 + I)^n = X^n.$

TABLA Nº 1

			Solución exacta			Primera solución aproximada			Segunda solución aproximada		
			Uniforme	**Triangular**	**Beta (k=2)**	**Uniforme**	**Triangular**	**Beta (k=2)**	**Uniforme**	**Triangular**	**Beta (k=2)**
Desembolso inicial		A	50.000,00	50.000,00	50.000,00	50.000,00	50.000,00	50.000,00	50.000,00	50.000,00	50.000,00
Año 1	Flujo neto de caja	Q_1	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00	15.000,00
	Valor mínimo	a	0,0310	0,0310	0,0310	0,0310	0,0310	0,0310	0,0310	0,0310	0,0310
	Valor modal	m		0,0375	0,0375	º	0,0375	0,0375	º	0,0375	0,0375
	Valor máximo	b	0,0390	0,0390	0,0390	0,0390	0,0390	0,0390	0,0390	0,0390	0,0390
	Momento orden 1	m_1		º	º	1,03500000	1,03583333	1,03625000	1,03500000	1,03583333	1,03625000
	Momento orden 2	m_2		º	º	1,07123033	1,07295371	1,07381695	º	º	º
	Factor descuento	$1/(1+i)$	0,96618839	0,96540899	0,96502072	0,96618839	0,96540899	0,96502069	0,96618357	0,96540628	0,96501809
	Varianza de $1/X$	var($1/X$)	0,00000465	0,00000262	0,00000251	0,00000465	0,00000262	0,00000250	º	º	º
Año 2	Flujo neto de caja	Q_2	21.000,00	21.000,00	21.000,00	21.000,00	21.000,00	21.000,00	21.000,00	21.000,00	21.000,00
	Valor mínimo	a	0,0330	0,0330	0,0330	0,0330	0,0330	0,0330	0,0330	0,0330	0,0330
	Valor modal	m	º	0,0375	0,0375	º	0,0375	0,0375	º	0,0375	0,0375
	Valor máximo	b	0,0430	0,0430	0,0430	0,0430	0,0430	0,0430	0,0430	0,0430	0,0430
	Momento orden 1	m_1	º	º	º	1,03800000	1,03783333	1,03775000	1,03800000	1,03783333	1,03775000
	Momento orden 2	m_2	º	º	º	1,07745233	1,07710221	1,07693005	º	º	º
	Factor descuento	$1/(1+i)$	0,96339859	0,96354959	0,96362769	0,96339859	0,96354959	0,96362769	0,96339114	0,96354585	0,96362322
	Varianza de $1/X$	var($1/X$)	0,00000718	0,00000360	0,00000430	0,0000718	0,00000360	0,00000430	º	º	º
Año 3	Flujo neto de caja	Q_3	26.000,00	26.000,00	26.000,00	26.000,00	26.000,00	26.000,00	26.000,00	26.000,00	26.000,00
	Valor residual		10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00	10.000,00
	Valor mínimo	a	0,0350	0,0350	0,0350	0,0350	0,0350	0,0350	0,0350	0,0350	0,0350
	Valor modal	m	º	0,0392	0,0392	º	0,0392	0,0392	º	0,0392	0,0392
	Valor máximo	b	0,0460	0,0460	0,0460	0,0460	0,0460	0,0460	0,0460	0,0460	0,0460
	Momento orden 1	m_1	º	º	º	1,04050000	1,04006667	1,03985000	1,04050000	1,04006667	1,03985000
	Momento orden 2	m_2	º	º	º	1,08265033	1,08174381	1,08129399	º	º	º
	Factor descuento	$1/(1+i)$	0,96108536	0,96148139	0,96168247	0,96108536	0,96148139	0,96168247	0,96107641	0,96147683	0,96167716
	Varianza de $1/X$	var($1/X$)	0,00000860	0,00000438	0,00000510	0,00000860	0,00000439	0,00000510	º	º	º
Valor capital		VC	16.245,81	16.213,74	16.198,03	16.245,81	16.213,74	16.198,03	16.244,78	16.213,20	16.197,43

Conocidos los momentos de *X*, es posible conocer los momentos de X^h, donde $h = 1,2,...,n$, de la siguiente forma:

$$m_{1,x^h} = m_{h,x}$$

y:

$$m_{2,x^h} = m_{2h,x} \ .$$

Conclusiones

A la hora de valorar proyectos de inversión donde los tipos de interés futuros son aleatorios, surge el problema de calcular $E\left(\frac{1}{X}\right)$, siendo *X* la variable aleatoria que modeliza el tipo de interés vigente en un período futuro. En este trabajo apuntamos tres posibles soluciones a esta cuestión que van de mayor a menor exactitud y, por tanto, de mayor a menor complejidad operativa.

La primera de las soluciones consiste en calcular directamente la a $E\left(\frac{1}{X}\right)$ partir de la función de densidad de $\frac{1}{X}$. Pero, en este caso, no es fácil calcular ni la función de densidad ni la esperanza matemática buscada, aunque la exactitud queda garantizada.

La segunda solución consiste en aplicar la fórmula aproximada[9] de $E\left(\frac{1}{X}\right)$, con la que obtenemos resultados muy buenos con bastante menos dificultad. Una de las causas de esta exactitud en el resultado podría pensarse que es debido a que las distribuciones empleadas (rectangular, triangular y beta) tienen un recorrido muy pequeño, lo cual es lógico, porque se trata de modelizar, tipos de interés y, en este caso, un rango de, por ejemplo, una décima es una cuantía considerable.

9 Mood *et al.*, *op. cit.*

Por otra parte, hemos de decir que el valor esperado que calculamos en este trabajo es el del valor capital de la inversión y es conocido que una pequeña variación del tipo de interés puede dar lugar a fluctuaciones muy grandes del valor actual neto.

Por último, la tercera de las soluciones consiste en utilizar $\frac{1}{E(X)}$ como una aproximación de $E\left(\frac{1}{X}\right)$, lo cual conduce a soluciones peores, pero no alejadas del verdadero valor financiero. Pensamos que el esfuerzo que requiere la segunda de las alternativas presentadas es muy pequeño (concretamente, tener en cuenta, además, el momento de orden 2 con respecto al origen de *X*) frente a lo que ganamos en exactitud.

Referencias bibliográficas

CALOT, G. (1974). *Introducción a la Estadística Descriptiva*. Paraninfo. Barcelona.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. (2002a). "La determinación de la tasa de actualización para la valoración de empresas". *Análisis Financiero*, nº 87, 2º cuatrimestre, pp. 72-85.

CRUZ RAMBAUD, S. y VALLS MARTÍNEZ, M.C. (2002b). "Financial Laws Associated with Continuous Stochastic Processes"*, 5th Italian-Spanish Conference on Financial Mathematics*, Valencia, publicación en CD-ROM.

MOOD, A.M.; GRAYBILL, F.A. y BOES, D.C. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics.* Mc-Graw Hill Series in Probability and Statistics (Third Edition), New York.

PAPOULIS, A. (1980). *Probabilidad, variables aleatorias y procesos estocásticos*. Editorial Universitaria de Barcelona.

PÉREZ RODRÍGUEZ, E. (1997). "Evaluación de proyectos cuando existe incertidumbre sobre los tipos de descuento". *Actas de la I Reunión Científica: Programación, Selección y Control de Proyectos.* Almería, pp. 113-130.

RICE, JOHN A. (1995). *Mathematical Statistics and Data Analisis* (Second Edition). Duxbury Press. California.