

RIESGOS

Dinámica del riesgo en el Modelo IS-LM con retraso

Eric Ávila-Vales Gerardo E. García-Almeida Noé Chan-Chí *

Fecha de Envió: 11 de Octubre 2011

Fecha de Aceptación: 28 de Marzo 2012

Resumen.

En este artículo presentamos un análisis de la estabilidad para un modelo IS-LM (Fuente de dinero de la preferencia de la Ahorro-Liquidez de la inversión) y según Kalecki consideraremos la idea retraso en el modelo. Establecemos condiciones para probar que retrasa aumento o perdemos estabilidad cuando ocurre una bifurcación Hopf. Para el análisis de la estabilidad consideramos el caso particular donde están no lineales la inversión (I) y la demanda para el dinero (L).

Palabras clave: Retraso, modelo IS-LM, bifurcación de Hopf.

Abstract.

In this paper we present a stability analysis for a IS-LM model (Investment Saving-Liquidity preference Money supply) and according to Kalecki we considered the idea of a time delay in the model. We establish conditions to prove that the delay gain or lose stability and a Hopf bifurcation occurs. For the stability analysis we consider the particular case where the investment (I) and the demand for money (L) are nonlinear.

Keywords: Delay, IS-LM model, Hopf Bifurcation.

Classification JEL: C62.

Los Autores tiene adscripción en la Universidad Autónoma de Yucatán* noe.chan.86@hotmail.com

1. Introducción

Inversión es un tema de gran importancia en la economía. Los modelos de ciclo de negocios de Kaldor y Kalecki usan una función de inversión la cual se basa más en el principio de ganancia que en el principio de aceleración. En el modelo de Kaldor, la inversión bruta depende del nivel de rendimiento y stock de capital. Para una cantidad dada de capital real, la inversión depende del nivel de ganancia, el cual depende del nivel de actividad. Kaldor presenta las suposiciones de una inversión no lineal y funciones de ahorro y su cambio sobre el tiempo que dan lugar a un ciclo. Sobre este modelo se ha estudiado la posibilidad de que posea un único ciclo límite, un avance importante fue cuando se establecieron condiciones necesarias y suficientes para la existencia de un ciclo límite en el modelo, también se ha estudiado la coexistencia de un ciclo límite y un equilibrio.

El ciclo de negocios macroeconómico de Kaldor [1] de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \alpha [I(Y, K) - S(Y, K)] \\ \frac{dK}{dt} &= I(Y, K) - \delta K, \end{aligned} \tag{1}$$

Donde I es la inversión, S la función de ahorro, Y el producto interno bruto, K el stock de capital, α el coeficiente de ajuste de mercado y δ es la tasa de depreciación del stock de capital. Kaldor asume que la función de inversión I es no lineal en Y y tiene forma de “s”. Como ejemplo de este tipo de función podemos mencionar el propuesto por Bischi et al [2] para su modelo, esta función es:

$$I(t) = \sigma\mu + \gamma \left(\frac{\sigma\mu}{\delta} - K(t) \right) + \arctan(Y(t) - \mu), \tag{2}$$

Donde $\sigma\mu/\delta$ es el nivel normal de stock de capital. Y se consideran dos componentes cortos de inversión, el primero es proporcional a la diferencia entre el stock de capital normal y el stock actual, de acuerdo a un coeficiente $\gamma > 0$, usualmente explicado por la presencia de ajuste de costos; el segundo es una función creciente de la diferencia entre los ingresos y su nivel “normal”, indicado por μ . Esta función tiene forma de “s” vista como una función que depende del ingreso Y .

El modelo de ciclo de negocios de Kalecki [3] se propuso unos años antes que el de Kaldor. Kalecki asumió que la parte de la ganancia por ahorro se invierte y el capital crece debido a decisiones de inversión del pasado. Hay un período de gestación o retardo en el tiempo, después del cual los bienes están disponibles para producción.

En la teoría de Kalecki el papel fundamental lo desempeña el retardo en el tiempo T relacionado con decisiones de inversión. El distingue tres estados de inversión: ordenes de inversión I , producción de bienes de capital A , y bienes de capital finalizados D . El cambio en el stock de capital es debido a órdenes de inversión en el pasado,

$$\frac{dK(t)}{dt} = D(t) - U = I(t - T) - U, \quad (3)$$

Donde U denota la depreciación del capital. Krawiec y Szydlowski [4] formulan el modelo de ciclo de negocios Kaldor-Kalecki basado en la dinámica del multiplicador que es la base de ambos enfoques, siguiendo el enfoque de Kalecki de la inversión y el retardo en el tiempo entre decisiones de inversión e implementación, obtienen el sistema de ecuaciones diferenciales con retardo:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \alpha [I(Y(t), K(t)) - S(Y(t), K(t))] \\ \frac{dK}{dt} &= I(Y(t - T), K(t)) - \delta K(t), \end{aligned} \quad (4)$$

Donde $T = \text{constante}$ es el retardo en el tiempo. La inversión depende de la ganancia en el tiempo en que las decisiones de inversión se toman y el stock de capital cuando el tiempo de inversión termina. Lo último es consecuencia del hecho de que al tiempo $t - T$, hay algunas inversiones que finalizarán entre $t - T$ y t . Se asume que el stock de capital producido en este periodo es tomado en cuenta cuando se planean nuevas inversiones.

Los autores concluyen que el modelo reconstruido del ciclo de negocios con base en el modelo de Kaldor y el parámetro del retardo en el tiempo de Kalecki asociado con decisiones de inversión genera ciclos límite en el espacio fase. El papel crucial en la creación del ciclo límite es el retardo en el tiempo, más que la suposición de la función de inversión $I(Y)$ con forma de "s".

Torre [5] revisó y actualizó el modelo reemplazando el stock de capital $K(t)$ con la tasa de interés $R(t)$ para formular el siguiente modelo de ciclo de negocios IS-LM estándar:

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \alpha [I(Y(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))] \\ \frac{dR}{dt} &= \beta [L(Y(t), R(t)) - M], \end{aligned} \quad (5)$$

Donde M es la constante de flujo de dinero, β es el coeficiente de ajuste en el mercado de dinero y L es la demanda de dinero.

Al parecer Torre fue quien originalmente introdujo a economía el teorema de bifurcación de Hopf [6] como herramienta para establecer la existencia de órbitas cerradas en sistemas dinámicos.

Como combinación del modelo de Kaldor y Torre, Gabisch y Lorenz [7] consideraron un modelo IS-LM modificado como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha [I(Y(t), K(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))] \\ \frac{dK}{dt} &= I(Y(t), K(t), R(t)) - \delta K(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \beta [L(Y(t), R(t)) - M],\end{aligned}\tag{6}$$

Donde δ es la tasa de depreciación del stock de capital. Basado en la idea de Kalecki de retardo en el tiempo, Cai [8] presentó el siguiente modelo IS-LM con retardo:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha [I(Y(t), K(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))] \\ \frac{dK}{dt} &= I(Y(t - \tau), K(t), R(t)) - \delta K(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \beta [L(Y(t), R(t)) - M].\end{aligned}\tag{7}$$

En este modelo τ es el retardo en el tiempo necesario para que el nuevo capital sea instalado, Cai dio resultados acerca de la estabilidad local y bifurcación de Hopf local.

Kaddar y Talibi [9] consideraron un modelo donde el retardo τ es introducido en el producto interno bruto, stock de capital y tasa de interés, argumentando que el cambio en el stock de capital es debido a decisiones de inversión pasadas, obteniendo el siguiente modelo:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dt} &= \alpha [I(Y(t), K(t), R(t)) - S(Y(t), R(t))] \\ \frac{dK}{dt} &= I(Y(t - \tau), K(t - \tau), R(t - \tau)) - \delta K(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \beta [L(Y(t), R(t)) - M].\end{aligned}\tag{8}$$

Kaddar y Talibi estudian la dinámica del modelo de manera local y describen la bifurcación de Hopf. Lo anterior asumiendo las funciones de inversión I , la función de ahorro S , y la de demanda por dinero L como:

$$\begin{aligned} I(Y, K, R) &= \eta Y - \delta_1 K - \beta_1 R \\ S(Y, R) &= l_1 Y + \beta_2 R \\ L(Y, R) &= l_2 Y - \beta_3 R, \end{aligned}$$

Donde $\delta_1, l_1, l_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ son constantes positivas.

De acuerdo con Rocsoreanu [10], condiciones económicas nos llevan a las siguientes limitaciones sobre las variables económicas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial I}{\partial R} < 0, \quad \frac{\partial I}{\partial K} < 0, \\ \frac{\partial S}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial S}{\partial R} > 0, \\ \frac{\partial L}{\partial Y} > 0, \quad \frac{\partial L}{\partial R} < 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Con base en lo anterior tomamos las funciones de inversión, ahorro y demanda de dinero como sigue, siendo estas funciones consideradas de acuerdo a la idea de Rocsoreanu [10] y De Cesare [11]:

$$\begin{aligned} I(Y, K, R) &= A \frac{Y^a}{R^b} - cK \\ S(Y) &= sY \\ L(Y, R) &= \gamma Y + \frac{h}{R - \tilde{R}}, \end{aligned} \tag{10}$$

Donde las constantes siguientes satisfacen $a, b, A, \gamma, h > 0$, $0 < s < 1$ y $\tilde{R} > 0$ es una tasa de interés muy pequeña fija generando una trampa de liquidez cuando $R(t)$ tiende a \tilde{R} , es decir, $\frac{h}{R - \tilde{R}} \rightarrow +\infty$ cuando $R(t) \rightarrow \tilde{R}$. Nótese que estas funciones satisfacen las limitaciones dadas en (9) y además, el valor que se le asigne al exponente a nos permite controlar la forma de la gráfica de I como función de Y (Cóncava para $a < 1$, convexa para $a > 1$ y lineal para $a = 1$.); el exponente b nos permite controlar la convexidad de la gráfica de I como función de R ; L permite la existencia de una trampa de liquidez y finalmente S se propone como una función lineal de Y como se hace con frecuencia en la literatura.

Considerando el sistema (8) y las funciones como se describen en (10) el sistema que analizaremos es:

$$\begin{aligned}
 \frac{dY}{dt} &= \alpha \left(A \frac{Y^a(t)}{R^b(t)} - cK(t) - sY(t) \right) \\
 \frac{dK}{dt} &= A \frac{Y^a(t-\tau)}{R^b(t-\tau)} - cK(t-\tau) - \delta K(t) \\
 \frac{dR}{dt} &= \beta \left(\gamma Y(t) + \frac{h}{R(t) - \hat{R}} - M \right).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

2. Análisis de estabilidad.

En esta sección realizamos un análisis de estabilidad del sistema (11) mediante el cálculo de su ecuación característica en un punto de equilibrio.

El punto de equilibrio (Y^*, K^*, R^*) para el sistema anterior esta dado, por las soluciones constantes del sistema, note que si las soluciones son constantes el lado derecho de cada ecuación del sistema (11) es igual a cero y $Y(t) = Y(t - \tau) = Y^*$ para todo t , lo mismo se satisface para K^* , R^* , por tanto el punto de equilibrio se obtiene al resolver el sistema siguiente:

$$\begin{aligned}
 0 &= A \frac{(Y^*)^a}{(R^*)^b} - cK^* - sY^* \\
 0 &= A \frac{(Y^*)^a}{(R^*)^b} - cK^* - \delta K^* \\
 M &= \gamma Y^* - \frac{h}{R^* - \hat{R}}.
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Para la linealización consideramos el sistema como:

$$\begin{aligned}
 \frac{dY}{dt} &= f_1(Y, K, R, Y_\tau, K_\tau, R_\tau) \\
 \frac{dK}{dt} &= f_2(Y, K, R, Y_\tau, K_\tau, R_\tau) \\
 \frac{dR}{dt} &= f_3(Y, K, R, Y_\tau, K_\tau, R_\tau).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Las funciones f_i , $i = 1,2,3$ que dependen de Y , K , R , $Y_\tau = Y(t - \tau)$, $K_\tau = K(t - \tau)$ y $R_\tau = R(t - \tau)$, son el lado derecho del sistema (11) asociado a $\partial Y/\partial t$, $\partial K/\partial t$ y $\partial R/\partial t$ respectivamente. La linealización está dada por:

$$\dot{x}(t) = Jx(t) + J_D x(t - \tau), \tag{14}$$

Con $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ donde J y J_D son jacobianos de (13) evaluados en el equilibrio (Y^*, K^*, R^*) , que están dados por:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Y} & \frac{\partial f_1}{\partial K} & \frac{\partial f_1}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Y} & \frac{\partial f_2}{\partial K} & \frac{\partial f_2}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3}{\partial Y} & \frac{\partial f_3}{\partial K} & \frac{\partial f_3}{\partial R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \left(\frac{Aa(Y^*)^{a-1}}{(R^*)^b} - s \right) & -\alpha c & -\alpha Ab \frac{(Y^*)^a}{(R^*)^{b+1}} \\ 0 & -\delta & 0 \\ \beta \gamma & 0 & -\frac{\beta h}{(R^* - \hat{R})^2} \end{pmatrix}$$

$$J_D = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial Y_\tau} & \frac{\partial f_1}{\partial K_\tau} & \frac{\partial f_1}{\partial R_\tau} \\ \frac{\partial f_2}{\partial Y_\tau} & \frac{\partial f_2}{\partial K_\tau} & \frac{\partial f_2}{\partial R_\tau} \\ \frac{\partial f_3}{\partial Y_\tau} & \frac{\partial f_3}{\partial K_\tau} & \frac{\partial f_3}{\partial R_\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Aa \frac{(Y^*)^{a-1}}{(R^*)^b} & -c & -Ab \frac{(Y^*)^a}{(R^*)^{b+1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar la ecuación característica del sistema, buscamos soluciones de la forma $(c_1 e^{\lambda t}, c_2 e^{\lambda t}, c_3 e^{\lambda t})$ para el sistema linealizado (14) que sean no triviales. La condición para que ocurra lo anterior es que el determinante de la matriz del sistema igualado a cero $\Delta(\lambda, \tau) = \lambda I - J - e^{-\lambda \tau} J_D$ (Aquí I es la matriz identidad de 3x3), obtenida al considerar las soluciones de la forma previamente mencionada, sea igual a cero. En nuestro caso

$$\Delta(\lambda, \tau) := \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 + (b_2 \lambda^2 + b_1 \lambda + b_0) e^{-\lambda \tau} = 0, \tag{15}$$

Donde:

$$a_2 = as + \delta + \alpha a A \frac{(Y^*)^{a-1}}{(R^*)^b}$$

$$a_1 = as\delta + \alpha a A \delta \frac{(Y^*)^{a-1}}{(R^*)^b} + Ab\alpha\beta\gamma \frac{(Y^*)^a}{(R^*)^{b+1}} + \frac{\beta h}{(R^* - \hat{R})^2} \left(as + \delta - \alpha a A \frac{(Y^*)^{a-1}}{(R^*)^b} \right)$$

$$a_0 = Ab\alpha\beta\gamma\delta \frac{(Y^*)^a}{(R^*)^{b+1}} + \frac{\alpha\beta\delta h}{(R^* - \hat{R})^2} \left(s - aA \frac{(Y^*)^{a-1}}{(R^*)^b} \right)$$

$$b_2 = c$$

$$b_1 = asc + \frac{c\beta h}{(R^* - \hat{R})^2}$$

$$b_0 = \frac{asc\beta h}{(R^* - \hat{R})^2}$$

Con base en la ecuación característica podremos establecer la estabilidad del equilibrio considerando que una solución de equilibrio es estable si todas las raíces λ de la ecuación característica (15) se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo, esto es la parte real de λ , $\Re(\lambda)$, es negativa para todas las raíces λ .

Cuando $\tau = 0$ la ecuación característica se reduce al polinomio

$$\Delta(\lambda, 0) := \lambda^3 + (a_2 + b_2)\lambda^2 + (a_1 + b_1)\lambda + a_0 + b_0 \tag{16}$$

Para decidir la estabilidad en este caso utilizamos el criterio de Routh-Hurwitz.

Este criterio en su forma general establece que si un sistema es de orden n , el polinomio puede ser tomado en la forma:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

Donde los coeficientes $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ son todos reales. Asumiendo que $a_j = 0$ para $j > n$, requerimos condiciones en los coeficientes tales que los ceros de $P(\lambda)$ tengan $\Re(\lambda) < 0$. Las condiciones necesarias y suficientes para que esto se cumpla son:

$$D_1 := a_1 > 0, \quad D_2 := \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 := \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

$$D_k := \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_k \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Para el caso de una ecuación cúbica

$$\lambda + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3 = 0 \tag{17}$$

Con coeficientes reales c_1, c_2, c_3 las condiciones para $\Re(\lambda) < 0$ son:

$$c_1 > 0, c_3 > 0, c_1c_2 - c_3 > 0.$$

Así en nuestro caso el equilibrio (Y^*, K^*, R^*) es localmente asintóticamente estable si y solo si

$$a_1 + b_1 > 0, a_0 + b_0 > 0 \text{ y } (a_2 + b_2)(a_1 + b_1) - (a_0 + b_0) > 0 \tag{18}$$

Para el caso $\tau > 0$ determinaremos condiciones de modo que $\lambda = i\omega$ sea una raíz de la ecuación característica, esto es, que se presente la posibilidad de una bifurcación de Hopf [6]. Sustituyendo el valor anterior de λ en la ecuación característica (15) tenemos:

$$\begin{aligned} \Delta(i\omega, \tau) &= -\omega^3 i - a_2\omega^2 + a_1\omega i + a_0 + (-b_2\omega^2 + b_1\omega i + b_0)e^{-i\omega\tau} \\ &= -\omega^3 i - a_2\omega^2 + a_1\omega i + a_0 + (-b_2\omega^2 + b_1\omega i + b_0)(\cos(\omega\tau) - i\text{sen}(\omega\tau)) \end{aligned}$$

Y separando la ecuación anterior en parte real e imaginaria obtenemos, respectivamente, las siguientes ecuaciones:

$$-\omega^2 a_2 + a_0 = (\omega^2 b_2 - b_0) \cos(\omega\tau) - b_1 \omega \text{sen}(\omega\tau) \tag{19}$$

$$-\omega^3 + a_1 \omega = -b_1 \omega \cos(\omega\tau) + (-\omega^2 b_2 + b_0) \text{sen}(\omega\tau) \tag{20}$$

Para eliminar las funciones trigonométricas elevamos ambos lados de (19) y (20) al cuadrado y sumamos, después de simplificaciones algebraicas obtenemos la siguiente ecuación en términos de ω :

$$\omega^6 + A_1\omega^4 + B_1\omega^2 + C_1 = 0, \tag{21}$$

Donde

$$A_1 = a_2^2 - 2a_1 - b_2^2,$$

$$B_1 = a_1^2 - 2a_0a_2 + 2b_0b_2 - b_1^2,$$

$$C_1 = a_0^2 - b_0^2$$

Tomando $z = \omega^2$ podemos escribir la ecuación anterior como una ecuación de grado tres, $z^3 + A_1z^2 + B_1z + C_1 = 0$.

Así para encontrar una raíz $\lambda = i\omega$ de la ecuación característica buscaremos soluciones positivas de la ecuación anterior de modo que $\omega = \sqrt{z}$. Nótese que también $\lambda = -i\omega$, el conjugado de la raíz anterior es raíz de la ecuación característica.

Lema 1.

Considerando $D = A_1^2 B_1^2 - 4B_1^3 - 4A_1^3 C_1 - 27C_1^2 + 18A_1 B_1 C_1$, el discriminante de la ecuación anterior, las raíces de la ecuación (21) satisfacen:

	Número de soluciones positivas	Condiciones
(i)	0	$A_1 > 0, B_1 > 0, C_1 > 0, A_1 B_1 - C_1 > 0$ $C_1 < 0$, y $(B_1 \leq 0 \text{ o } A_1 \geq 0)$ o $C_1 < 0, B_1 > 0, A_1 < 0, D_1 > 0$ o $C_1 = 0, B_1 < 0$ o $C_1 = 0, B_1 = 0, A_1 < 0$
(ii)	1	$C_1 > 0, B_1 < 0 \text{ o } A_1 < 0, D_1 \leq 0$ o $C_1 = 0, B_1 > 0, A_1 < 0$
(iii)	2	$C_1 < 0, B_1 > 0, A_1 < 0, D_1 \leq 0$
(iv)	3	

En el caso (i) cuando no hay soluciones positivas de la ecuación cúbica, entonces la ecuación (21) no puede tener una raíz real $z = \sqrt{\omega}$, así por el teorema de Rouché [6] el número de raíces con parte real positiva no se modifica. Por tanto en este caso la solución de equilibrio es estable cuando (18) se satisface.

En los casos (ii)-(iv) podemos encontrar $\omega = \sqrt{z}$ real, de modo que $\lambda = \pm i\omega$ sea raíz de la ecuación característica (15), retomando entonces el sistema (19)-(20) podemos multiplicar la ecuación (19) por $b_0 - \omega^2 b_2$, (20) por $b_1 \omega^2$ y sumando las ecuaciones eliminamos la función trigonométrica $sen(\omega\tau)$ y despejamos $cos(\omega\tau)$ obteniendo:

$$\cos(\omega\tau) = \frac{\omega^4(b_1 - a_2 b_2) + \omega^2(a_2 b_0 + a_0 b_2 - a_1 b_1) - a_0 b_0}{(b_1 \omega)^2 + (b_0 - b_2 \omega^2)^2}, \quad (22)$$

Considerando ω^* como una raíz dada por el lema 1, despejando τ obtenemos el valor del parámetro τ donde se presenta un par de raíces imaginarias puras conjugadas:

$$\tau^* = \frac{1}{\omega^*} \arccos \left(\frac{((\omega^*)^4(b_1 - a_2 b_2) + (\omega^*)^2(a_2 b_0 + a_0 b_2 - a_1 b_1) - a_0 b_0)}{(b_1 \omega)^2 + (b_0 - b_2 (\omega^*)^2)^2} \right). \quad (23)$$

Existe más de un valor de τ^* debido a la periodicidad de la función coseno y a la posible existencia de 2 o 3 valores de ω^* (Casos (iii) y (iv) del lema 1). De todos estos valores de τ^* se toma el valor positivo más pequeño. Para los otros valores de τ^* puede haber otro cambio de estabilidad dependiendo de la dirección en la que se cruce de nuevo el eje imaginario en cada uno de estos valores de τ^* . Note que en la expresión anterior es necesario fijar primero los parámetros del sistema (11), a excepción de τ , para tener ω^* y el τ^* asociado al par de raíces imaginarias. En lo sucesivo τ^* será el valor positivo más pequeño dado por (23) y ω^* la raíz de (21) de la cual proviene.

Ahora, para establecer la bifurcación de Hopf en $\tau = \tau^*$, necesitamos mostrar que se cruza el eje imaginario de izquierda a derecha. Para ello se determina si $d\Re(\lambda(\tau))/d\tau|_{\tau=\tau^*} > 0$, es decir, la derivada de la parte real de la raíz $\lambda(\tau)$ de la ecuación característica evaluada en τ^* es positiva. Derivando entonces (15) respecto a τ tenemos:

$$(3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1) \frac{d\lambda}{d\tau} + \left(-\tau e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0) \right) \frac{d\lambda}{d\tau} - \lambda e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0) + e^{-\lambda\tau} (2b_2\lambda + b_1) \frac{d\lambda}{d\tau} = 0$$

Despejando $d\lambda/d\tau$ tenemos $\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{\lambda e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)}{3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1 - \tau e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0) + e^{-\lambda\tau} (2b_2\lambda + b_1)}$ esto

da:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} &= \frac{3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1 - \tau e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0) + e^{-\lambda\tau} (2b_2\lambda + b_1)}{\lambda e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)} \\ &= \frac{3\lambda^2 + 2a_2\lambda + a_1 + e^{-\lambda\tau} (2b_2\lambda + b_1)}{\lambda e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ &= \frac{3\lambda^3 + 2a_2\lambda^2 + a_1\lambda + e^{-\lambda\tau} (2b_2\lambda^2 + b_1\lambda)}{\lambda^2 e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ &= \frac{2\lambda^3 + a_2\lambda^2 - e^{-\lambda\tau} b_2\lambda^2 + \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda - e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda)}{\lambda^2 e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ &= \frac{2\lambda^3 + a_2\lambda^2 - e^{-\lambda\tau} b_2\lambda^2 - a_0 - e^{-\lambda\tau} b_0}{\lambda^2 e^{-\lambda\tau} (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)} - \frac{\tau}{\lambda} \\ &= \frac{2\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_0}{-\lambda^2 (\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)} + \frac{b_2\lambda^2 - b_0}{\lambda^2 (b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)} - \frac{\tau}{\lambda} \end{aligned}$$

Es importante notar que usamos la ecuación (15) en varias igualdades. Ahora hallaremos el signo o dirección de la parte real, la ecuación (15) ayudará de nuevo a simplificar algunas expresiones:

$$\begin{aligned} \text{signo} \left\{ \frac{d\Re(\lambda(\tau))}{d\tau} \right\} \Big|_{\lambda=i\omega^*} &= \text{signo} \left\{ \Re \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right\} \Big|_{\lambda=i\omega^*} \\ &= \text{signo} \left\{ \begin{aligned} &\Re \left[\frac{2\lambda^3 + a_2\lambda^2 - a_0}{-\lambda^2(\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0)} \right] \Big|_{\lambda=i\omega^*} \\ &+ \Re \left[\frac{b_2\lambda^2 - b_0}{\lambda^2(b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0)} \right] \Big|_{\lambda=i\omega^*} - \Re \left[\frac{\tau}{\lambda} \right] \Big|_{\lambda=i\omega^*} \end{aligned} \right\} \\ &= \text{signo} \left\{ \begin{aligned} &\Re \left[\frac{-2i(\omega^*)^3 - a_2(\omega^*)^2 - a_0}{(\omega^*)^2(-\omega^3i - a_2(\omega^*)^2 + a_1\omega^*i + a_0)} \right] + \\ &\Re \left[\frac{-b_2(\omega^*)^2 - b_0}{-(\omega^*)^2(-b_2(\omega^*)^2 + b_1\omega^*i + b_0)} \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

En el siguiente paso consideramos la parte real de la igualdad anterior, note que τ/λ es imaginario puro, obteniendo:

$$= \text{signo} \left\{ \frac{2(\omega^*)^6 + (a_2^2 - 2a_1)(\omega^*)^4 - a_0^2}{(\omega^*)^2[(a_2(\omega^*)^2 - a_0)^2 + ((\omega^*)^3 - a_1\omega^*)^2]} + \frac{b_0^2 - b_2^2(\omega^*)^4}{(\omega^*)^2[(b_0 - b_2(\omega^*)^2)^2 + (b_1\omega^*)^2]} \right\}$$

Los denominadores de las fracciones anteriores son iguales, esto se puede ver del sistema (19)-(20) del cual podemos elevar ambos lados al cuadrado y al sumar tenemos la igualdad mencionada:

$$= \text{signo} \left\{ \frac{2(\omega^*)^6 + (a_2^2 - 2a_1 - b_2^2)(\omega^*)^4 + b_0^2 - a_0^2}{(\omega^*)^2[(a_2(\omega^*)^2 - a_0)^2 + ((\omega^*)^3 - a_1\omega^*)^2]} \right\}$$

Sustituyendo $b_0^2 - a_0^2$ de la ecuación (21) y simplificando tenemos:

$$= \text{signo} \left\{ \frac{3(\omega^*)^4 + 2(a_2^2 - 2a_1 - b_2^2)(\omega^*)^2 + (a_1^2 - 2a_2a_0 + 2b_2b_0 - b_1^2)}{[(a_2(\omega^*)^2 - a_0)^2 + ((\omega^*)^3 - a_1\omega^*)^2]} \right\}$$

Puesto que $(a_2(\omega^*)^2 - a_0)^2 + ((\omega^*)^3 - a_1\omega^*)^2$ es positivo, se presentará una bifurcación de Hopf si:

$$3(\omega^*)^4 + 2(a_2^2 - 2a_1 - b_2^2)(\omega^*)^2 + a_1^2 - 2a_2a_0 + 2b_0b_2 - b_1^2 > 0. \tag{24}$$

Con base en lo anterior podemos establecer lo siguiente:

Teorema 1.

Si la condición (18) se satisface, el punto de equilibrio (Y^*, K^*, R^*) es localmente asintóticamente estable cuando $\tau = 0$. También lo es si cumple adicionalmente la primera condición del lema 1 cuando $\tau > 0$.

Teorema 2.

Supóngase que se satisface (18) y una de las últimas tres condiciones del lema 1, con ω^* como la raíz y τ^* el valor del retardo asociado a esta raíz dado en (23). Entonces una bifurcación de Hopf ocurre si (24) se satisface. Observación: También se puede tener una bifurcación de Hopf en $\tau = \tau^*$ cuando la ecuación característica para $\tau = 0$ tiene exactamente 2 raíces con parte real positiva (punto de equilibrio (Y^*, K^*, R^*) inestable) y $d\Re(\lambda(\tau))/d\tau|_{\tau=\tau^*} < 0$, es decir, (24) se satisface con “<” en vez de “>”.

3. Simulaciones Numéricas

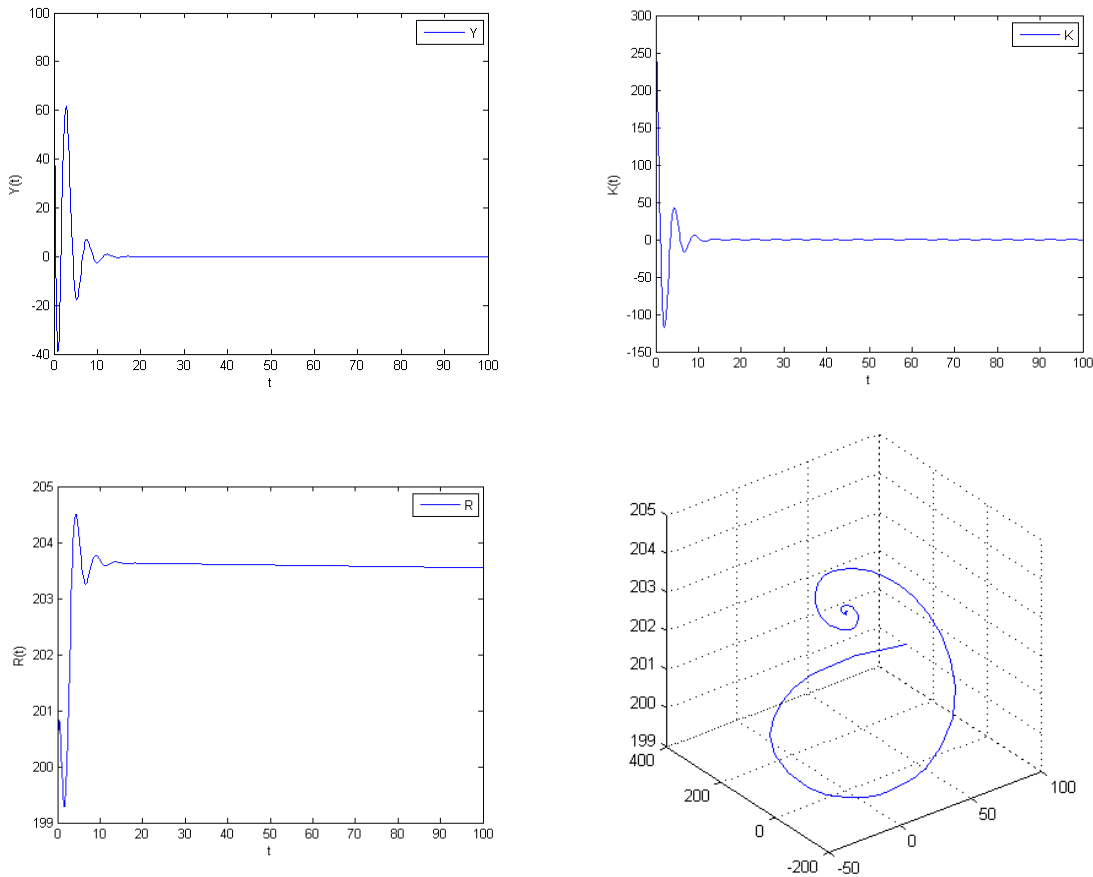
En esta sección presentamos algunas simulaciones numéricas para ciertos valores fijos en los parámetros para ilustrar el cambio de estabilidad del sistema (11) dependiendo del valor del retardo τ . Para nuestras simulaciones consideramos los siguientes valores para los parámetros:

Parámetro	Valor
α	1
A	0.01
a	1
b	0.5
c	0.9
s	1
δ	0.1

β	1
γ	0.5
h	0.2
\bar{R}	0.0001
M	200

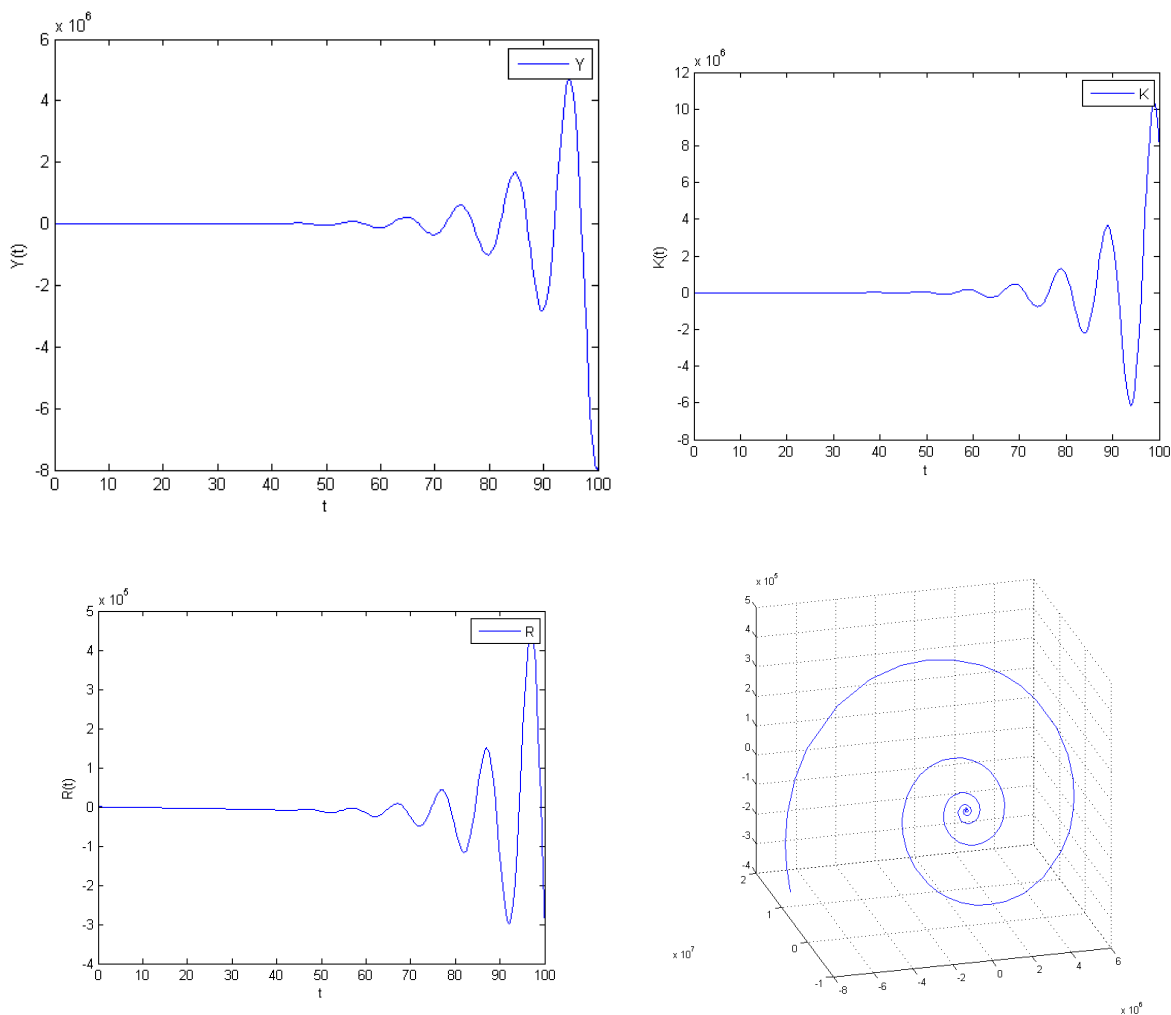
Para el retardo consideramos los valores $\tau = 1,3$ para ilustrar la estabilidad con el primer valor y la inestabilidad con el segundo.

Figura 1. Las gráficas anteriores ilustran la estabilidad del sistema (11), al tomar como valor de retardo $\tau = 1$.



Las primeras tres ilustran la dinámica de $Y(t)$, $K(t)$ y $R(t)$, y la última refleja el comportamiento tipo atractor del punto de equilibrio.

Figura 2. Las gráficas anteriores ilustran la pérdida de estabilidad del sistema (11), al tomar como valor de retardo $\tau = 3$.



Las primeras tres ilustran la dinámica de $Y(t)$, $K(t)$ y $R(t)$, y la última refleja el comportamiento tipo repulsor del punto de equilibrio

4. Conclusiones.

En este trabajo nos enfocamos en el análisis de manera matemática, establecimos condiciones para garantizar un cambio de estabilidad del equilibrio de acuerdo al retardo y la ocurrencia de una bifurcación de Hopf. En las simulaciones numéricas podemos apreciar la pérdida de estabilidad del equilibrio al aumentar el valor del retardo. Como posible trabajo a futuro se puede estudiar el modelo.

5. Referencias.

- [1] N. Kaldor, A model of the trade cycle, *Economic Journal* 50(1940)78–92.
- [2] G. Bischi, R. Dieci, G. Rodano and E. Saltari, Multiple attractors and global bifurcations. *Journal Evolutionary Economics* (2001) 11: 527-554.
- [3] M. Kalecki, A macrodynamic theory of business cycles, *Econometrica* 3(1935)327–344.
- [4] A. Krawiec and M. Szydlowski, The Kaldor-Kalecki business cycle model, *Annals of Operations Research* 89(1999)89-100.
- [5] V. Torre, Existence of limit cycles and control in complete Keynesian systems by theory of bifurcations, *Econometrica* 45 (1977) 1457-1466.
- [6] Hal Smith, *An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the life sciences*, Springer Science+Business Media, 2011.
- [7] G. Gabish, H. W. Lorenz, *Business Cycle Theory: A Survey of Methods and Concepts*, second edition, Springer-Verlag, New York 1989.
- [8] J. Cai, Hopf Bifurcation in the IS-LM business cycle model with time delay, *Electron J. Differential Equations* 15 (2005) 1-6.
- [9] A. Kaddar and H. Talibi Alaoui, On the Dynamic Behavior of a Delayed IS-LM Business Cycle Model, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 2, 2008, no. 31, 1529-1539.
- [10] C. Rocsoreanu and M. Sterpu, Bifurcation Model in Nonlinear Business Cycle Model, *Romai J.*, 5, 2 (2009), 145-152.
- [11] L. De Cesare and M. Sportelli, A dynamic IS-LM model with delayed taxation revenues, *Chaos, Solitons and Fractals* 25 (2005) 233-244.