Búsqueda de patrones en la matriz de rigidez de una estructura

(*)MARIO PAPARONI M.
Escuela de Ingeniería Civil
Universidad Metropolitana
Distribuidor Universidad, Terrazas del Ávila
Caracas, Venezuela
Universidad Católica Andrés Bello

Resumen

Se presenta en este trabajo el camino seguido para tratar de conectar la enseñanza clásica de Estructuras para Ingeniería Civil con los Métodos Matriciales Modernos, con la intención de simplificar drásticamente la enseñanza de la materia, tratando de llevarla hacia el aprendizaje de un sólo método de solución capaz de resolver estructuras planas malladas de todo tipo, a través de la simplificación de los procedimientos normalmente seguidos en la aplicación del Método Matricial de las Deformaciones, o a veces llamado del ensamblaje directo de la Matriz de Rigidez.

Se pudo obtener una metodología que al combinar los viejos procedimientos de Rotaciones, Cross y Takabeya con los Procedimientos Matriciales permite al alumno llenar directamente la Matriz a mano, sin el auxilio de algoritmos computacionales.

Ello ha sido posible al utilizar la Teoría de Grafos y el Análisis Dimensional, además de un cambio de punto de partida en el «elemento finito» tomado como punto de partida, pues en lugar de partir de un miembro lineal libre en el espacio, se ha partido de un Nodo con su Radiación de Miembros conectados a otros nodos, además, en lugar de limitarse sólo a las operaciones permitidas en el Álgebra Cayleana de Matrices, se han utilizado las posibilidades de la programación por Objetos, en su versión sencilla de Hojas de Cálculo tipo Excel, en especial la multiplicación de tablas casilla a casilla.

El Método ha sido probado durante varios semestres en la UNIMET y ha sido contrastado con resultados obtenibles con el Programa SAP 2000, con resultados muy satisfactorios.

Existe un juego de Notas de clase en vías de convertirse en libro donde se detallan los procedimientos y las justificaciones operativas desarrolladas. El método ha sido creado sin contar con precedentes conocidos de metodologías parecidas, nos hemos basado sólo en conocimientos contenidos en Libros de Análisis Matricial, reformulados con el auxilio de otras disciplinas.

Palabras clave: Análisis matricial, teoría de grafos aplicada, matriz de rigidez, método matricial simplificado, isomorfismos en la matriz de rigidez.

Abstract

This paper deals with and describes the original path followed by the author with the purpose of connecting the classical teaching of Structures with that of of Matrix Analysis of Structures, with the intended goal of drastically simplifying the material handed to the students as one single method, the Displacement Method, based on a newly developed way of assembling the Stiffness Matrix of the Structure. This allows the student to solve any plane structural problem with a single set of learned procedures, which eventually can also be applied to three dimensional problems. The student deals with the same concepts employed in the classical methods of Slope-Deflection, Cross and Takabeya, which was the grandaddy of the Matrix Methods, even if it is seldom mentioned in our present academic media.

To make this possible it was necessary to introduce Graph Theory and Dimensional Analysis as simplifying and ordering tools, as well as changing the starting point of the matrix methods, which takes as finite element the free beam in space. We went back instead to the classical Slope-Deflection and Cross building block, that is to consider a central node with irradiating members which connect to peripheral nodes, and so on, which allows the building up of structural systems. This resurrects the Cross criteria of carry-over factors, allowing Direct hand-filling of the Rigidity Matrix.

We also had to lift some algebraical restrictions of Cayley's Matrices, to allow the direct use of modern tools like EXCEL, which can be considered as an Object Programming in an elementary level.

Tests have been performed comparing results of typical exam problems solved with this simplified method with the outcomes of a reliable SAP 2000 Program, with very satisfactory results

An abundant set of notes already exists as manuscripts, and they are in the way of becoming a book, especially after testing this method in real teaching during several semesters at the UNIMET.

Keywords: Matrix Analysis; Applied Graph Theory; Stiffness Matrix; Simplified Matrix Method; Isomorphism in the Stiffness Matrix.

Introducción

Modernamente los Métodos Matriciales han prácticamente desplazado a los Métodos Clásicos de resolución de Estructuras, y dentro de los Métodos Matriciales, el método de las Deformaciones a su vez ha desplazado al Método de las Fuerzas, debido a su mayor facilidad de aplicación y a su mayor generalidad. Desafortunadamente la forma en la cual se presentan estos métodos en la bibliografía normalmente utilizada en la enseñanza de pregrado, con una clara orientación hacia la programación algorítmica, hace que desde el punto de vista docente, estas metodologías, como se suele decir, no suministran al estudiante el «sentido físico» de lo que hacen. Tampoco los ejemplos que se presentan en la mayoría de los textos que hemos consultado guardan algún parecido con los cálculos que un ingeniero estructural realiza, es decir, son ejemplos demasiado simples, o son ejemplos rebuscados. La Metodología aquí presentada pretende, a través de la enseñanza de PATRONES repetitivos (isomorfismos), reducir al mínimo la necesidad de utilizar los conceptos y las reglas operativas del Álgebra Matricial, las cuales no tienen sentidos físicos perceptibles «prima facie». Esta nueva forma de pensar cuadra perfectamente con las formas de pensar de un estudiante que sepa utilizar programas tipo Excel, las cuales pueden definirse como Programación por Objetos, es decir, una forma más moderna de pensar que el de la programación Algorítmica Clásica.

Objetivos de tipo Docente en este Trabajo

El objetivo de este trabajo es presentar los resultados de una experiencia docente llevada a cabo en la Universidad Metropolitana durante un lapso de cuatro años, durante el cual se pudo demostrar que las metodologías matriciales podían simplificarse y relacionarse con las metodologías clásicas de resolución de estructuras aporticadas, ya conocidas por el estudiante: Cross, Rotaciones, Takabeya; este objetivo es alcanzable si cambiamos los puntos de partida de las metodologías matriciales clásicas; introducimos conceptos elementales de la Teoría de Grafos; utilizamos el Análisis Dimensional y además propiciamos el uso intensivo de la programación con hojas de cálculo tipo Excel, o con calculadoras manuales avanzadas (tipo HP-48 0 TI-89).

Se ha podido lograr que los alumnos de Estructuras de Pregrado de Ingeniería Civil puedan resolver problemas estructurales complicados, llegando hasta el análisis completo de edificios aporticados ortogonales, ello en un lapso no mayor de dos semestres, dependiendo sólo de recursos que ya estén en poder de los estudiantes, es decir, sin grandes inversiones en hardware y software de parte de las universidades.

Síntesis del Método Propuesto

Para justificar los fundamentos del Método que proponemos podemos seguir dos vías, una de ellas sería la de demostrar, a través de primeros principios, cuáles tienen que ser necesariamente las cualidades de la Matriz de Rigidez de una Estructura como objeto y, partiendo de allí, deducir todo lo demás. Esto es posible y lo hemos hecho, pero esta vía nos lleva a formas de razonamiento relativamente abstractas, más difíciles de asimilar por parte de estudiantes de pregrado.

Nos parece más sencillo seguir un procedimiento inductivo, ligado a la interpretación de los resultados que ya se hayan obtenido de la aplicación del Análisis Matricial Clásico, y de allí buscar los patrones que evidentemente deben poseer tanto la Matriz de Rigidez Global de la Estructura como las Matrices de Miembros. Puede demostrarse que la cantidad de información por manejar para ensamblar la Matriz de Rigidez Global se reduce a casi la cuarta parte, en comparación con los métodos que típicamente aparecen en los textos más populares de Análisis Matricial de Estructuras.

De hecho, esta metodología surgió precisamente de la búsqueda de patrones en los resultados de los análisis matriciales que los textos de estructuras presentan al estudiantado.

Unos ejemplos bastante completos que se pueden tomar como punto de partida están en (West, 93) el libro de *Harry L. West, FUNDAMENTALS OF STRUCTURAL ANALYSIS, John Wiley & Sons, 1993, páginas 606, 607 y 609 (Matrices Globales de la Estructura) y páginas 551, 552 y 553. (Matrices del Miembro)*; hay otros ejemplos en la bibliografía consultada, pero tomamos este por ser muy clara su presentación, y por tratarse de un libro de muy reciente edición destinado a la enseñanza de Estructuras en Pregrado.

Para ensamblar la Matriz de Rigidez de la Estructura según las metodologías clásicas se deben recorrer los siguientes pasos

1) Se crea la matriz de rigidez de un miembro lineal libre en el espacio, definido en coordenadas locales y sujeto a deformaciones unitarias impuestas en ambos extremos, aceptando que el miembro queda equilibrado al producirse las solicitaciones que esas deformaciones impuestas generen.

2) Se llevan esos resultados a Coordenadas Globales (las de la Estructura que se analice), a través de Matrices de Transformación de Coordenadas.

2) Se obtiene un conjunto de coeficientes aplicables a la solución general en forma directa, ya en coordenadas globales, esos coeficientes están compuestos del producto de tres partes: a) Un número puro (depende de la relación utilizada: deformación impuesta-solicitación obtenida), b) Un grupo dimensional que transforma la deformación impuesta en alguna acción generalizada, c) Un grupo trigonométrico que nos indica la influencia en los

resultados de la dirección y el sentido del miembro a que nos referimos (Azimut y condición de llegada o salida a un nodo). En esta fase se trabaja con una estructura que debe estar vinculada para hacerla estable. (Habrá nodos activos que reciben las solicitaciones y nodos pasivos que las lleven a “tierra”).

4) Se propone un Procedimiento de Llenado de esa Matriz de Rigidez Global como la superposición de matrices de rigidez locales, las cuales se apilan a través de unas ciertas rutinas de computación que escriben o suman valores que constituirán los términos de esa matriz. No se utilizan ni aquí ni en los demás textos consultados los conceptos de la Teoría de Grafos. Para ello es necesario crear algoritmos *ad hoc*, no fácilmente captables por el lector, de hecho los libros no suelen mencionarlos en detalle, dada su aplicación particularizada.

5) Esos resultados parciales y totales (matrices de coeficientes) presentan una mezcla aparentemente heterogénea de términos con dimensiones diversas y no presentan un orden claramente explícito de ensamble. Podríamos decir que el llenado de la Matriz Global y el llenado de las matrices de miembros se han basado en la secuencia numérica (ordinales) que haya sido seleccionada para los grados de libertad. Es esta secuencia la que determina la arquitectura de la Matriz de Rigidez Global que se busca calcular. El llenado puede llevarse a cabo sólo a través de procedimientos algorítmicos, debiendo correlacionar en el proceso las relaciones mutuas entre miembros y grados de libertad.

6) Si observamos matrices de ese tipo mostradas en ese mismo libro o en los demás consultados, en busca de Patrones de Llenado (Arquitectura de las Matrices), se observa que estos patrones no son fácilmente perceptibles y tipificables pues, dependen de decisiones arbitrarias a juicio del usuario, es decir la numeración a través de los grados de libertad, no necesariamente ligada a lo que podríamos llamar un GRAFO, es decir, no parece ser representable por un grafo deducible de la topología (conectividades) o de la geometría o de la métrica de la estructura. Son sólo un conjunto de ecuaciones de equilibrio cuyo ordenamiento o relación con la estructura no es EVIDENTE, en especial cuando se presentan en forma puramente numérica, pues en ese caso no es posible distinguir, de entrada, sus dimensiones físicas (excepto por su formato), las cuales permitirían agruparlas de acuerdo a ese criterio, por ejemplo.

7) Tampoco es fácil ubicar en la matriz final el nodo al cual se refieren, por la misma razón de haber sido clasificadas en base a la numeración de los grados de libertad, la cual puede diferir, p. ej., en secuencias, de la numeración nodal. Es obvio que la numeración nodal debió ser utilizada para definir los miembros, pero esa relación no se mantiene necesariamente para los grados de libertad.

8) Las matrices extendidas (completas) de los miembros y las dos matrices de coeficientes de las páginas 606 y siguientes (West 93), tienen informaciones REDUNDANTES, ya que podemos notar que si practicamos una partición doblemente simétrica en cuatro cuadrantes del mismo tamaño, cada cuadrante situado a lo largo de cada diagonal es una repetición del otro, y los cuadrantes adyacentes horizontalmente están relacionados entre sí por factores numéricos que, curiosamente, recuerdan fuertemente a los “factores de transporte” del “Método de Cross” a su vez derivados del Método de las Rotaciones que lo precedió históricamente. Este patrón aparece sólo para miembros de sección uniforme; en miembros de sección variable aparecen particiones con otras propiedades, también tipificables. No entraremos en estos detalles aquí, simplemente habrá factores de transporte individuales y transposiciones de submatrices.

9) Esos factores numéricos son siempre los mismos para todos aquellos valores de la Matriz de Rigidez Global que correspondan a términos que se refieran a las mismas relaciones “deformación impuesta-acción producida” y a las mismas dimensiones físicas de los términos. Lo cual indican que pueden agruparse de acuerdo a esos criterios. Este es el patrón que hemos buscado y encontrado. Existe en las matrices que hemos tornado como paradigmas. Solo faltan introducir los conceptos ordenadores de la Teoría de Grafos y del Análisis Dimensional, además del cambio en el “elemento finito” de partida, no más un miembro sino una radiación de miembros que parten de un nodo común.

10) Si ahora volvemos al pasado y buscamos lo que se llamó en su tiempo el Método que Takabeya propuso para resolver estructuras por el Método de las *Rotaciones (F. Takabeya; “Rahmentafel”, Springer Verlag, Berlin, 1930) (inasequible)*, libro mencionado por (Belluzzi, 55) O. Belluzzi en su tratado, notaremos varias casas que indican que el mérito de Takabeya fue, simplemente, el de saber ordenar de manera ingeniosa las ecuaciones de equilibrio NODALES y las ecuaciones de equilibrio de PISO del Método de las Rotaciones, además de haber manejado el Análisis Dimensional.

11) Un ejemplo lo encontramos en las páginas 405 a 410 del libro *“Scienza delle Costruzioni” (Belluzzi 55) de Odone Belluzzi, Nicola Zanichelli Editore, 1955.* En este libro se explica el método de Takabeya con ejemplos muy claros. Lo que sigue se deduce de los ejemplos mostrados, Belluzzi no lo pone de manifiesto en sus comentarios, pero esto es evidente en sus figuras ilustrativas:

Veamos que hizo Takabeya

1) Ordena las ecuaciones de EQUILIBRIO nodo a nodo, y piso a piso convirtiendo todas las incógnitas en GIROS (adimensionales), con lo cual obtiene una MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA dimensionalmente

homogénea. En teoría parecería posible escribir toda matriz de rigidez en base a giros, dividiendo los desplazamientos por longitudes características que sean normales a ellos.

2) Todos los coeficientes de rigidez valen allí EI/L, variando sólo los coeficientes numéricos que los multiplican (4; 6; 12). El método original (1930) que llamaremos Takabeya-piso trabaja con matrices dimensionalmente homogéneas y con Cortantes de Piso, esto último limita su uso irrestricto en pórticos con columnas incompletas, por ello hubo que modificarlo y al nuevo lo hemos llamado Takabeya-losa, basándonos en un procedimiento similar que se ha utilizado tradicionalmente en el Método de Cross. Ver (Hsieh) Yuan- Yu Hsieh, “Elementary Theory of Structures”; Prentice Hall International, 1988, cuando se analizan pórticos con cargas horizontales aplicadas en las vigas del pórtico alineadas por pisos. (Se trabaja con Cargas individuales de Losa). Esto elimina esa limitación en el Método de Takabeya Original cuando haya cortantes de piso que no son claramente distribuibles entre porciones de pórticos, como en el caso de tener columnas o vigas interrumpidas.

2) La decisión de Takabeya de homogeneizar dimensionalmente los productos [coeficientes*incognitas] la toma para poder escalar convenientemente las magnitudes relativas de los coeficientes y de los giros (coeficientes dimensionalmente homogéneos, incognitas adimensionales), de tal manera que el sistema de ecuaciones que se ve obligado a resolver tenga coeficientes con valores numéricos parecidos, con objeto de facilitar las operaciones MANUALES que eran necesarias en ese tiempo, y además reducir los errores numéricos inherentes al proceso de resolución. Este detalle de escalar los valores hace el método original bastante enredado de entender ante una primera lectura.

3) Compartimenta su “Matriz” de acuerdo a las secuencias de nodos según vigas continuas (losas) y de acuerdo a la secuencia vertical de pisos (de abajo hacia arriba) que tenga el pórtico. De esta forma crea una “Arquitectura Matricial Fija” para su método, basada en las secuencias de la numeración nodal que se fije. De hecho recomienda una secuencia “serpentina ascendente” que NO produce la menor anchura de banda del sistema, probablemente porque al hacerlo así facilitaba la resolución manual del sistema de ecuaciones. El método funciona con cualquier secuencia numérica nodal, ésta fue una limitación artificial por razones que parecen ser sólo operativas, de carácter no fundamental. Otra característica es la de numerar con guarismos romanos los nodos pasivos, para distinguirlos claramente de los nodos “activos” (capaces de moverse en algún modo). De hecho, distingue claramente el concepto de “adherir” las articulaciones y los rodillos a los miembros y no a los nodos. Esto permite utilizar los conceptos de Cross de Rigideces; Factores de Transporte y Momentos de Empotramiento Modificados.

4) A lo largo de la fase inicial del desarrollo de la metodología que aquí ilustramos, fue relativamente sencillo generalizar el Método de Takabeya a casos bastante elaborados que no eran contemplados por la metodología original de 1930, es decir, extender su empleo a pórticos externamente hiperestáticos, o sea, aquellos en los cuales el reparto de Cortantes Horizontales no es isostático, al caso de Pórticos con columnas o vigas interrumpidas y, luego a la solución de parrillas, es decir, pórticos con cargas normales a sus planos. Todo ello sin cambiar conceptos de uso. También ha sido posible llevar el método extendido hacia la resolución de estructuras espaciales de edificios con pórticos con vanos rectangulares y ortogonales entre sí, sujetos a fuerzas horizontales y a torsiones de planta. De hecho todo ello equivale a decir que podemos trabajar con Matrices Reducidas, resultado de la eliminación de variables que se consideran poco influyentes, o bien de condensar filas y columnas de la matriz de rigidez simplemente sumando ecuaciones y términos independientes, lo cual es lo que hacemos en las Ecuaciones de Piso de Takabeya (suma de fuerzas nodales horizontales en un mismo nivel = fuerzas de losa).

6) La extensión del Método de Takabeya la logramos entonces al conectar ciertos procedimientos seguidos para el Método de Cross (Desplazamiento horizontal de losas en lugar de la distorsión angular del piso originalmente aplicada por Takabeya). Estos últimos desarrollos demostraron que el paso del Método de Takabeya al Método Matricial era sólo una cuestión de simple generalización del primero, aumentando el número de desplazabilidades. Luego se vio que el proceso inverso, pasar de la Matriz de Rigidez con tres grados de libertad aplicada a estructuras planas al Método de Takabeya era sólo una cuestión de «condensación» de filas y columnas de nodos con iguales desplazabilidades. Las fuerzas nodales sumadas pasaban a ser fuerzas de piso y las ecuaciones de equilibrio de losa eran la suma de las ecuaciones de equilibrio de nodos.
De hecho, desde el punto de vista pedagógico ha resultado más fácil para los estudiantes conocer primero la matriz completa y luego condensarla o reducirla por bloques. De hecho, el principio pedagógico que facilita el empleo de estas metodologías es el de «mover o cambiar particiones de la matriz» en lugar de trabajar con valores individuales. Se enseña a manejar «arquitecturas» o «mosaicos», no casillas.

7) Es decir que sin llamarlos así, ya en 1930 se usaron Métodos que podemos llamar con toda propiedad, del tipo de «Ensamble directo de la Matriz de Rigidez», limitándose al caso de Pórticos Ortogonales. Curiosamente, el proceso ordenador de Takabeya parece haberse perdido al iniciarse la difusión de los métodos matriciales, ya que la popularidad de los Métodos de Cross había opacado al método de Takabeya-Ecuaciones, el cual había sido sustituido a su vez por sus propias variantes, basadas en metodologías iterativas (algunas de ellas con el nombre de Takabeya). Tal parece que por

haber sido un autor japonés quien publicó su trabajo en alemán, y que no fue difundido ampliamente en el idioma inglés, quedó circunscrito en Occidente a los medios ingenieriles centroeuropeo y ruso. Esto demuestra que también en la ingeniería el avasallamiento editorial o lingüístico puede cambiar el rumbo de los desarrollos metodológicos, y que tenemos que admitir que no necesariamente las ediciones de textos más recientes son siempre las mejores, y que muchas veces la enseñanza queda supeditada a la habilidad de mercadeo de las editoriales y a la natural inercia de la enseñanza universitaria, donde al evitar el riesgo de «equivocarnos ante los estudiantes y quedar mal», muchas veces nos apegamos a lo conocido y probado, aunque no sea lo mejor,

8) Vayamos ahora a un ejemplo del Método de Cross explicado en textos modemos y aplicado a problemas parecidos a los que trató Takabeya. Nos referiremos a varios libros: al de *R. C. Hubbeler, (Hubbeler, 2000) «Análisis Estructural», Ed. Prentice-Hall & Simon and Schuster, México;* al libro *"Elementary Theory of Structures" de Yuan- Yu Hsieh (Hsie 88), Ed. Prentice-Hall, 1988;* y al libro *"Análisis de Estructuras-Métodos Clásico y Matricial" por Jairo Uribe Escamilla (Uribe 2000), Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería, Bogotá, Segunda Edición, 2000.* Estos libros dedican aún un espacio considerable al Método de Cross, y presentan ejemplos de pórticos sencillos con desplazamientos laterales, incluyendo casos con miembros inclinados, Deberíamos también incluir en este grupo el libro ya citado de "*Scienza delle Costruzioni*" de Odone Belluzzi (Belluzzi 55), el cual abunda en ejemplos resueltos y bien comentados de la aplicación de los métodos "clásicos".

¿Qué encontramos en estos libros que nos permita ver patrones de semejanza con los métodos matriciales?

1. El elemento de partida del Método de Cross (su "elemento finito") no es el Miembro (viga o columna), sino **el ensamble de todos los miembros que concurran a un nodo central, uniéndolo a los correspondientes nodos periféricos.** Es perfectamente posible generar cualquier estructura mallada partiendo de este elemento primario repetitivo. Es también claro que, en lugar de hablar de sentidos ij o ji, puede hablarse de nodos centrales y de nodos periféricos, lo cual es más general y útil. Todas las solicitaciones (Momentos Z, Fuerzas X, Fuerzas Y) aplicadas a un nodo central irradian hacia los nodos periféricos de maneras semejantes entre sí, dicho de otro modo, sufren un proceso de "transporte" (si representamos esas propagaciones dándoles dirección y sentido) y a esas "propagaciones" las representamos con "Grafos Dirigidos", esos Grafos son Isomorfos. Si representamos los "caminos" de cada solicitación (Momentos, Cortantes y Axiales) por las diferentes aristas de un grafo, tendremos una idea bastante clara de cómo se propagan esas acciones aplicadas a un nodo hacia los demás. Esos caminos pueden "cortarse" si hay apoyos "aislantes", es decir, que permiten un determinado grado de libertad. Para comprender o aceptar el isomorfismo general de los patrones matriciales, debemos incluir en los Grafos esas aristas cortadas, que

no transmiten ciertas acciones, o que las hacen depender del sentido de propagación (hablamos de Grafos Planares Dirigidos).

2. Ello significa que si compartimentamos la Matriz de Rigidez Global de la estructura a través de criterios adecuados (Análisis Dimensional), tendremos arquitecturas semejantes en todos los compartimentos de la matriz global. Esta es la base de la Teoría de los Modelos Estructurales, la aplicación de isomorfismos a sistemas que modelamos con otros sistemas más sencillos, sean ellos físicos o sean ellos matemáticos. No hay que olvidar que un Grafo es un Modelo analógico de un sistema, y su Matriz de Conectividades es la versión Digital de ese grafo. Un "Sistema de Ecuaciones" es un Modelo de un "Sistema Físico", valen por tanto las Leyes Sistémicas de Semejanza, Homotecia, Similitud, Isomorfismo y Analogía que aplicamos en las Teorías de Semejanza aplicadas a Modelos Estructurales Físicos o a modelos Hidráulicos. Caemos entonces en el "Pensamiento Sistémico", siempre fructífero.

2. En el Método de Cross hay, directamente, una suma de Rigideces de los Miembros para convertirlas en Rigideces Nodales. Tenemos que hacer esa suma para poder calcular los Factores de Distribución para cada miembro que converja al nodo. Ello se parece a la operación matricial de suma de rigideces de los miembros que concurran a un nodo. Sin decirlo, Cross establece los convenientes criterios de "extremos de miembro centrípetos" y "extremos de miembro centrífugos", referidos al nodo del cual parte la radiación de miembros. (Distribución y Transporte de Momentos en el lenguaje de Cross). Un miembro tiene dos sentidos, relativos al nodo que consideremos como origen de su radiación.

4. Los "Factores de Transporte" del Método de Cross, lo que hacen es transformar lo que en Análisis Matricial se suele llamar Kij (Rigidez del extremo deformado del miembro)en la Rigidez Kji ("fuerza" inducida en el extremo opuesto j, cuando el extremo i sufre una deformación unitaria y el extremo opuesto esta fijo), sólo que Cross no trabaja ni con Coeficientes ni con Desplazabilidades, trabaja directamente con Momentos y Fuerzas. En el Método Matricial Clásico usamos una matriz cuatro veces mayor de lo necesario al no aplicar el concepto de Factor de Transporte, el cual se hace visible examinando las matrices de rigidez de miembros que aparecen en los libros de Análisis Matricial. Esos factores de transporte son pocos y son constantes para los coeficientes de rigidez de igual naturaleza dimensional y para miembros prismáticos con las mismas condiciones de apoyo. Se puede generalizar el concepto a miembros prismáticos y a miembros curvos, en cuyo caso hay que particularizar por miembro los factores de transporte.

5. El Cross original limita estos conceptos, innecesariamente, a sólo el caso de Momentos, pero los Factores de Transporte pueden aplicarse **también a los**

demás casos de deformaciones “axiales” o “cordales”. Los ángulos cordales se encargan de las solicitaciones a “Cortante”, las cuales también se transportan; el “transporte de axiales” es casi intuitivo, lo que entra por un extremo pasa de forma idéntica al otro, con signo cambiado.

6. El hecho de ser los factores de transporte en estos casos iguales a +1; -1 ó eventualmente cero o fracciones, quizá indujo a Cross a no introducirlos en su Método, puesto que las solicitaciones transportadas no se atenuaban como en el caso de los Momentos. Además, los momentos, como se utilizan en el Método de Cross, se propagan sin problemas en cualquier dirección (miembros inclinados), es decir, no tienen términos trigonométricos en las definiciones de rigidez, lo cual simplifica las cosas. De hecho, es posible realizar un Cross iterativo con Fuerzas Nodales de manera idéntica a como lo hacemos con los Momentos, la convergencia es más lenta, pero el método sí funciona.

7. Es fácil demostrar que el “transporte” del Método de Cross implica una transposición de Matrices y que esa transposición es una consecuencia de la ley de Maxwell, tal como ocurre en Cross cuando se dice que, para miembros no prismáticos, los productos Factor de Transporte a la Derecha por Rigidez Izquierda son iguales a los productos Factor de Transporte a la Izquierda por Rigidez Derecha. Esta transposición garantiza la simetría de la Matriz de Rigidez Global, la cual a su vez puede tener submatrices no simétricas respecto a sus subdiagonales sin destruirse por ello la simetría de la matriz global. Manejamos las mismas cosas con diferentes idiomas.

8. En el Método de Cross todas las peculiaridades de las cargas, de las condiciones de rigidez y de las condiciones de apoyo se resuelven a nivel de los miembros, no a nivel de los grados de libertad (su vinculación a los nodos). Es decir, no manejamos en Cross el concepto de GRADOS DE LIBERTAD y, sin embargo, somos capaces de resolver con él problemas relativamente complejos.

9. En el Método de Cross es APARENTE, aunque no EVIDENTE, el que la solución de un problema hiperestático es siempre la suma de un Estado Inicial Coaccionado más lo que realmente resuelve Cross, el resultado de Desbloquear los vínculos artificiales que vamos liberando y bloqueando sucesivamente a través de las distintas iteraciones que realicemos. Los Métodos Matriciales sólo se ocupan de este caso, a sus resultados deben sumársele los casos de partida (Solicitaciones con nodos bloqueados). Es el mismo concepto de Estructura Primaria y Estructura Secundaria que se usa al resolver tradicionalmente estructuras hiperestáticas. (O cuando usamos el Método Matricial de las Fuerzas). Es decir que lo que resolvemos usando matrices lo resolvemos en Cross sólo con los Momentos que repartimos y

transportamos; los Momentos de Empotramiento se quedaron donde estaban, sólo repartimos sus sumas algebraicas.

10. Tenemos entonces ya montado un escenario para poder demostrar, a través de los actores, que los métodos clásicos de resolución de estructuras planas (las Estructuras de Pregrado típicas), son todos una misma cosa, y que podemos integrarlos de una manera tal que nos permitan, paradójicamente, situarnos en la época en que vivimos, es decir, en la época de la Programación por Objetos, en la época de los Grafos y en la época en que es ya raro encontrar un estudiante de Ingeniería que NO posea un computador en su casa cargado con algún programa de "Hojas de Cálculo" en su versión más frecuente, es decir, EXCEL.

Para ello tenemos que tomar algunas decisiones

1. No limitarnos al Álgebra Matricial de Cayley-Sylvester, y aceptar que pueda haber operaciones que aunque no sean de esa Algebra son factibles en una hoja de cálculo, por ejemplo:
   - suma de los términos de un renglón para colocarla en una casilla de ese renglón;
   - el poder multiplicar los números colocados en una hoja de cálculo por otros números colocados en otra hoja de cálculo en las casillas con la misma identificación (Multiplicación Término a Término);
   - el poder aplicar reiteradamente operaciones parciales del tipo de "cortar y pegar" en porciones de la hoja y con "bloques" de valores.
   - el poder operar reiterativamente sobre una hoja de cálculo preprogramada.

3. Aplicar la teoría elemental de Grafos, pues es fácil aceptar que si representamos una estructura como una red plana de nodos unidos con vértices (nodos y miembros), sólo nos falta un paso para admitir que todos los procesos que, por ejemplo, aplica el Método de las Rotaciones (o Cross), son representables por Multígrafos Planares Dirigidos. Ver *"Introduction to Graph Theory" por Richard J. Trudeau, Editorial Dover, Mineola, NY: USA, 1993. (Trudeau 93).*

4. Esos Multígrafos (una arista para cada tipo de solicitación pasante entre nodos conectados) deben basarse en los Nodos y no en los Grados de Libertad, puesto que lo que vamos a llevar al grafo no pueden ser los grados de libertad (los grados de libertad son entes "libres" es decir matemáticamente ortogonales, no se relacionan entre sí, por ello son "grados de LIBERTAD"). Uno siempre se preguntaba ¿Por qué desaparecen de las Matrices de Rigidez la Geometría y las Dimensiones de la Estructura? ¿Por qué siempre es posible pasar de una estructura a SU Matriz de Rigidez, pero lo contrario no es posible? o bien ¿por qué los resultados de cualquier análisis estructural "exacto" o "correcto" no permiten redescubrir ni las dimensiones de la

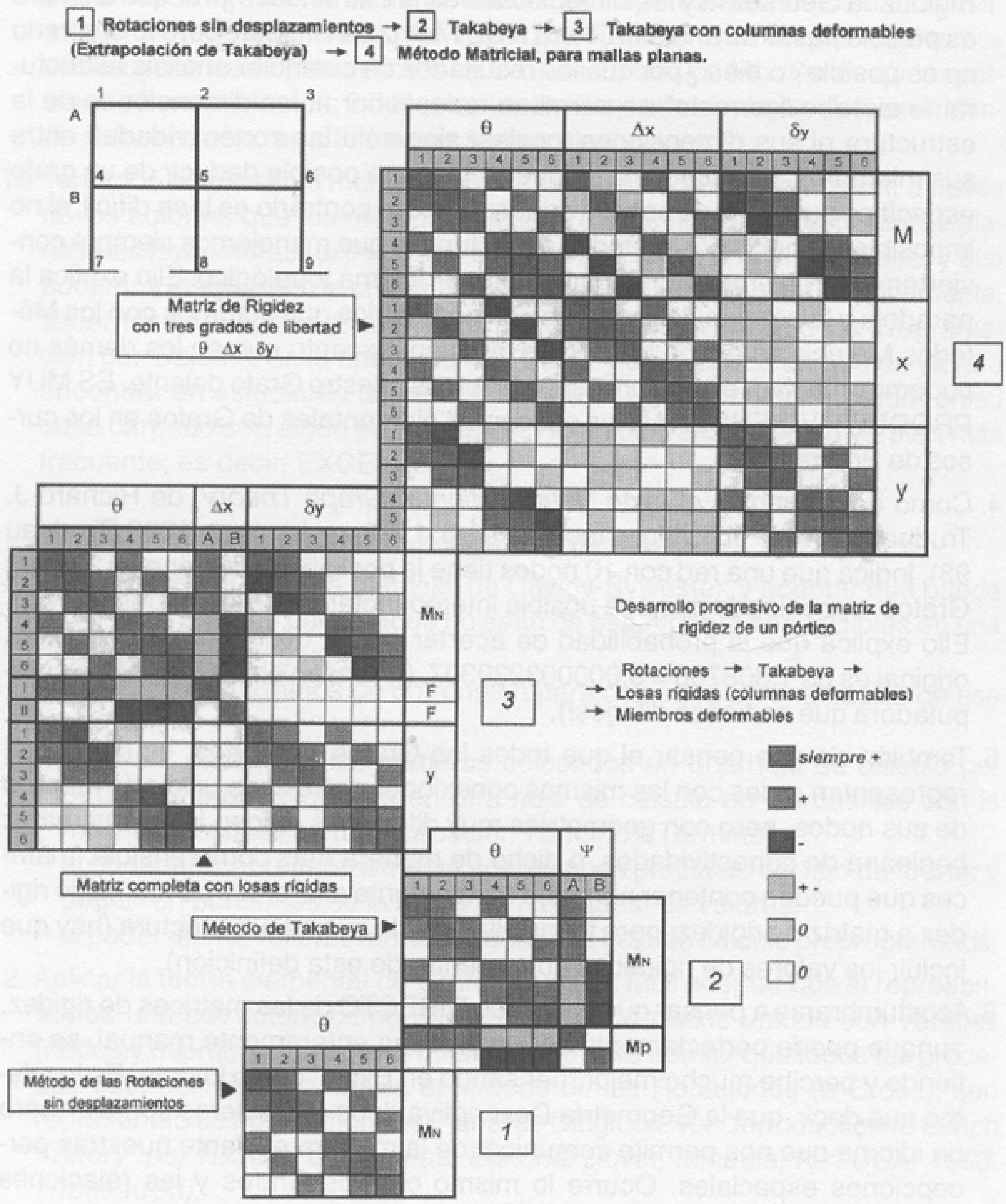
estructura ni sus dimensiones locales, sino sólo las conectividades entre sus miembros. La respuesta es que es siempre posible deducir de un grafo específico su matriz de conectividades, pero lo contrario es bien difícil, si no imposible, de hecho los métodos estructurales que manejamos siempre convierten un problema geométrico en otro problema topológico. Ello explica la paradoja y la pérdida de la percepción geométrica que sufrimos con los Métodos Matriciales (y con los demás también, excepto que en los demás no podemos resolver el problema si no tenemos nuestro Grafo delante. ES MUY PRODUCTIVO ENSEÑAR los conceptos elementales de Grafos en los cursos de Pregrado.

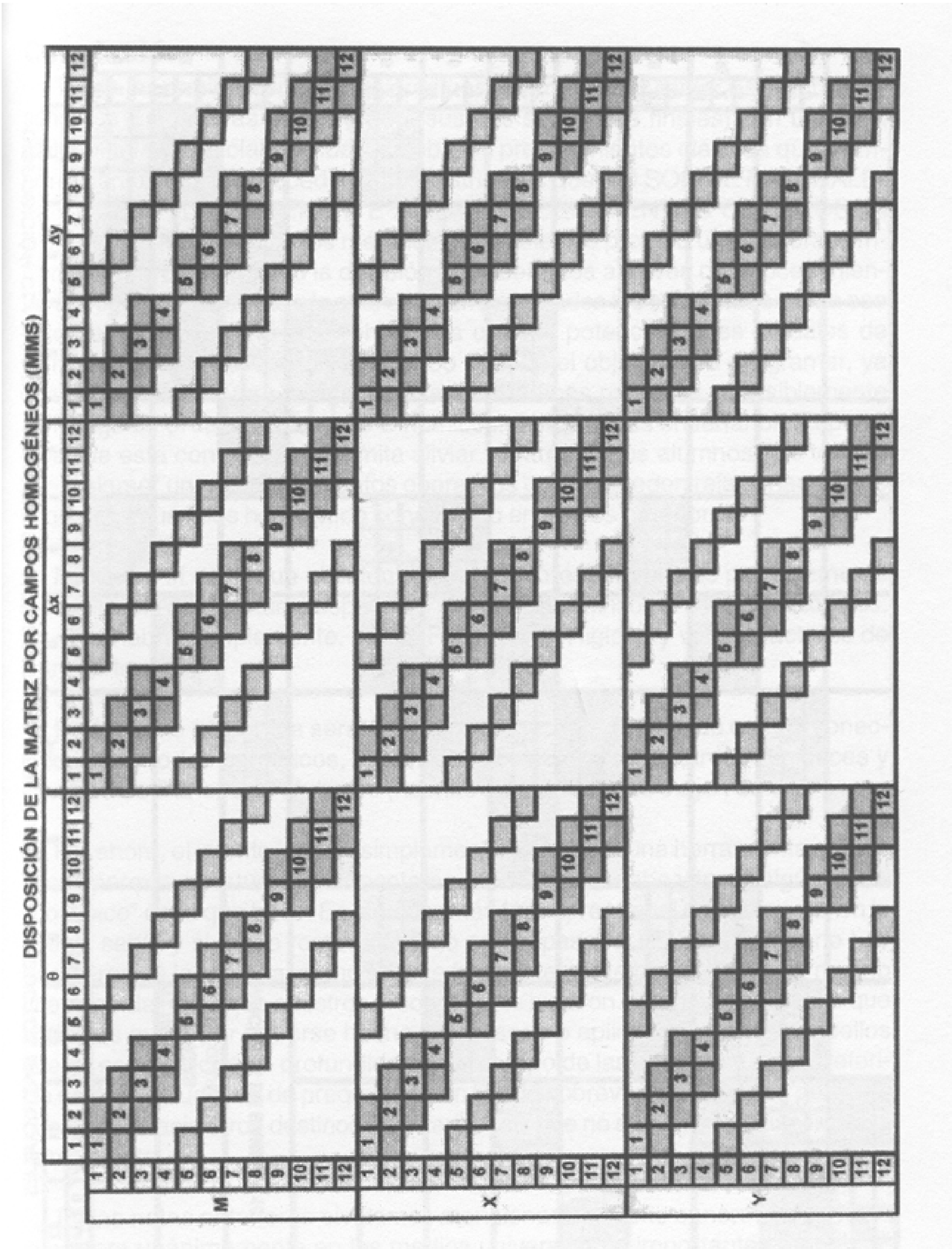
4. Como dato curioso, el texto "*Introduction to Graph Theory*" de Richard J. Trudeau; Dover Publications Incorporated, 1976, revisada en 1993 (Trudeau 93), indica que una red con 10 nodos tiene la posibilidad de generar 308708 Grafos, suponiendo que sea posible interconectar todos los nodos entre sí. Ello explica que la probabilidad de acertar con la desconocida estructura original es de 1:308708 = 0.000003239307. (¡Piensen en las salidas de computadora que no tienen dibujos!).

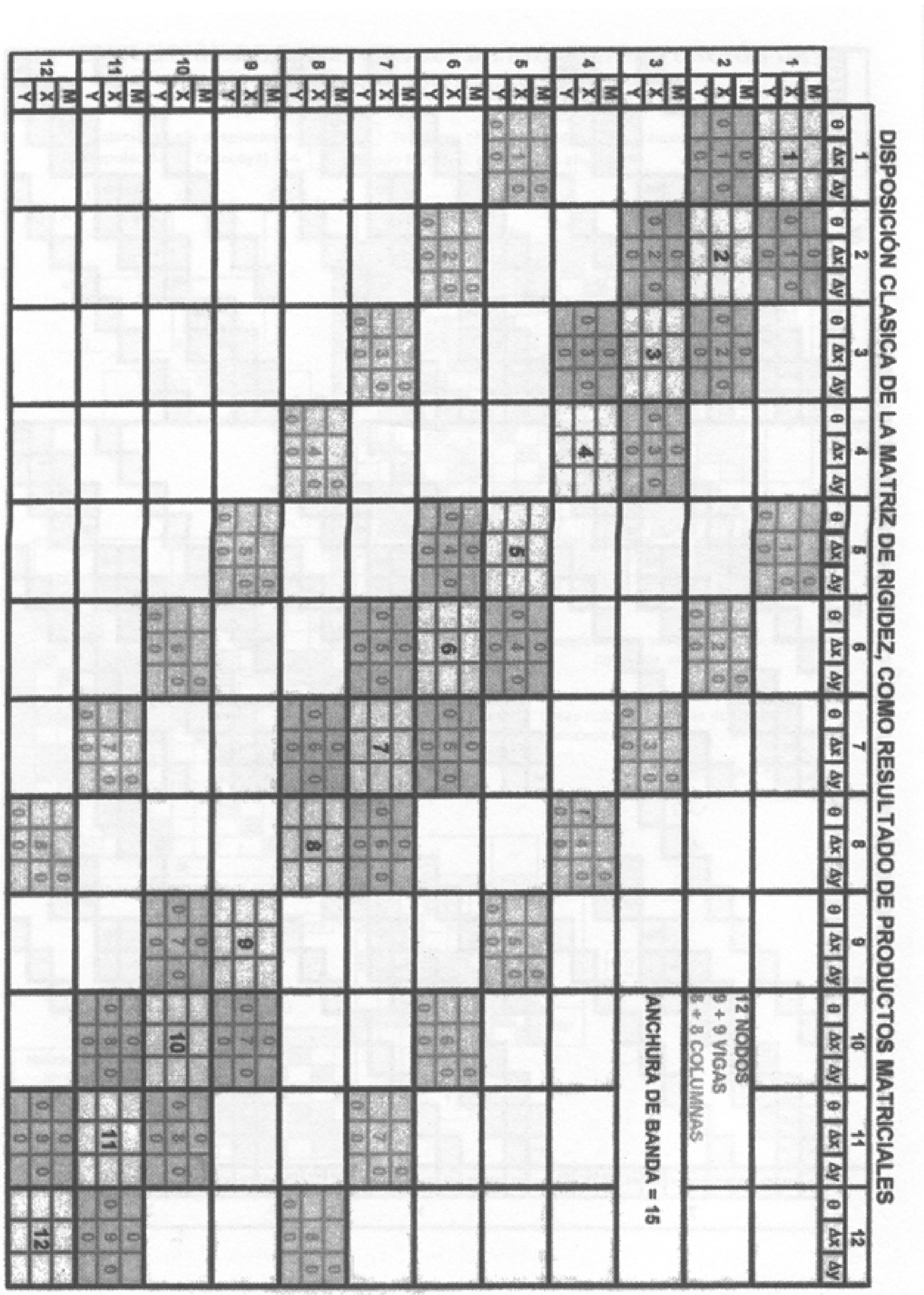
5. También da que pensar el que todos los Grafos isomorfos, es decir, que representan redes con las mismas conexiones entre sí de un cierto número de sus nodos, pero con geometrías muy diferentes, tienen la misma matriz booleana de conectividades, o dicho de manera más comprensible, matrices que pueden contener números mutuamente diferentes de matriz de rigidez a matriz de rigidez, pero todas ellas con la misma arquitectura (hay que incluir los valores de rigideces nulas dentro de esta definición).

6. Acostumbrarse a pensar que el llenado DIRECTO de las matrices de rigidez, aunque puede perfectamente ser un proceso enteramente manual, se entiende y percibe mucho mejor "pensando en Excel" como idioma. Es lo mismo que decir, que la Geometría Descriptiva debe aprenderse como si fuera un idioma que nos permite comunicar de la manera eficiente nuestras percepciones espaciales. Ocurre lo mismo con los Grafos y las relaciones topológicas.

EVOLUCIÓN DE LAS MATRICES DE RIGIDEZ EN FUNCIÓN DE LAS METODOLOGÍAS ESTABLECIDAS




DISPOSICIÓN DE LA MATRIZ POR CAMPOS HOMOGÉNEOS (MMS)
θ
Δx
Δy
M
X
Y


DISPOSICIÓN CLASICA DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ, COMO RESULTADO DE PRODUCTOS MATRICIALES
12 NODOS
9 + 9 VIGAS
8 + 8 COLUMNAS
ANCHURA DE BANDA = 15

Conclusión

Todas las explicaciones anteriores nos llevan a lo siguiente: Es posible enseñar las Estructuras de Pregrado (sus dos semestres finales) con una sola Metodología (Matricial), la cual engloba los procedimientos clásicos que siempre enseñamos y los procedimientos matriciales que NO SON DE NATURALEZA CONCEPTUAL DIFERENTE A LOS PROCEDIMIENTOS CLÁSICOS. Al inicio de la enseñanza de los métodos matriciales se produjo una ruptura, simplemente porque se tomó la decisión de enseñarlos a través de procedimientos de Algebra Lineal, para la cual estaban preparados las computadoras de ese entonces, y que ya no son coherentes con las potencialidades actuales de computación. No se discute su empleo cuando el objetivo sea programar, ya que contamos con un enorme inventario de rutinas resueltas y, posiblemente convenga en el caso de Análisis Dinámicos. Otra cosa es enseñarlos. Esperamos que esta contribución permita aliviar la carga de los alumnos que tengan que "calarse" unos procedimientos operativos que no pueden relacionar con los esquemas que ellos han venido conociendo en cursos anteriores.

Podemos sí decir que el enfoque que aquí presentamos es perfectamente generalizable a estructuras espaciales y a elementos finitos bi o tridimensionales. En ellos habrá, simplemente, varios Factores de Rigidez y varios Factores de Transporte.

El elemento de partida será, también en esos casos, el nodo central conectado a sus nodos periféricos, y habrá que calcular o formular las Rigideces y Factores de Transporte Múltiples (no más singulares) que surjan de ello.

Por ahora, el intento ha sido simplemente el de crear una herramienta docente que permita al estudiante conectarse con lo que ya sabe y tener algún "Sentido Físico" de lo que hace. Es siempre más fácil aprender si uno se apoya en lo que ya sabía y si no se rompe del todo con el pasado. En Estructuras no hay Basureros de la Historia, como se dice frecuentemente hoy en día. Hay mucho que aprender en lo que nuestros predecesores hicieron. También hay mucho que podemos quitar por haberse hecho innecesario o aplicable sólo para aquellos que se especialicen en profundidad en el campo de las estructuras. Es preferible dotar al estudiante de pregrado de un "kit de sobrevivencia sencillo pero útil" que lo guíe hacia otros destinos muy variados y que no son siempre planificables formalmente.

En las notas anteriores olvidamos mencionar un hecho concreto, hoy ya se considera unánimemente en los medios universitarios importantes que enseñan Ingeniería Estructural que no tiene ya sentido utilizar el Método de las Fuerzas en su formulación matricial. Basta con el método de las Deformaciones. Tampoco tiene sentido enseñar Líneas de Influencia o Trabajos Virtuales... el que escribe no ha tenido oportunidad de usarlos en 44 años de ejercicio profesional, pues cuando los necesito encontró que hoy en día hay maneras más fáciles de resolver los problemas que con ellos se resolvían. Ello no quita que sigan siendo temas intelectualmente atractivos y que pueden encontrar uso en cursos de Estructuras Avanzadas. Es mejor saber bien de algo que saber poco de mucho.

También debe decirse que algunas nociones elementales de la Teoría de Grafos, incorporada a las clases de Estructuras Ie enseñan rápidamente al alumno una guía visual que Ie indica qué debe hacer para resolver un problema. Su aplicación en clase ha demostrado que los alumnos aprenden muy rápidamente a manejar problemas estructurales, siguiendo lo que inconscientemente hacen al manejar su celular o al manejar los menús de una computadora. Tenemos que admitir que la juventud y la niñez de hoy tienen esquemas de pensamiento que no teníamos los que los precedimos en una o dos generaciones. No ha sido fácil para quien esto escribe cambiar de esquemas mentales a la edad en que uno comienza a descubrir que sé es ya abuelo, y que sus nietos nacieron con cerebros ya preparados para pensar de otro modo, y que además en el intento casi pierde el trabajo al no ser inicialmente comprendido por los primeros estudiantes que tuvo. Por ello es que sabemos cuán difícil es a veces arriesgar para poder cambiar, y también cuán difícil es decidir que se quita para poner algo nuevo supuestamente mejor.

Epílogo: No tires nunca por la borda lo que te han transmitido tus predecesores profesionales, detente alguna vez a ver si lo que dijeron todavía puede aplicarse renovándolo y adecuándolo a los tiempos. En general los textos viejos gastaban más tinta en explicar cómo funcionan los casos en lugar de mostrar cómo se resuelven y cuáles son los resultados numéricos. Debemos también recordar que los Ingenieros pensamos de manera distinta de la manera de los matemáticos, aunque a veces el ingeniero también puede sentir pasión por lo que los matemáticos persiguen, la “búsqueda de patrones”, como Félix Klein definió las Matemáticas.

Referencias bibliográficas

1) HARRY L. West. Fundamentals of Structural Analysis, John Wiley & Sons; 1993, páginas 606, 607 y 609 (Matrices Globales de la Estructura) y páginas 551, 552 y 553. (Matrices del Miembro).

2) F. TAKABEYA, “Rahmentafel”, Springer Verlag, Berlin, 1930 (inasequible).

3) ODONE Belluzzi, ”Scienza delle Costruzioni” (Belluzzi 55), Nicola Zanichelli Editore, Milano 1955.

4) R.C. Hubbeler (Hubbeler, 2000). “Análisis Estructural”, Ed. Prentice-Hall & Simon and Schuster, México, 2000.

5) YUAN-YU, Hsieh; “Elementary Theory of Structures” (Hsie 88), Ed. Prentice-Hall, 1988, Third Edition, Singapore.

6) URIBE Escamilla, Jairo. “Análisis de Estructuras- Métodos Clásico y Matricial”, (Uribe 2000). Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería, Bogotá, Segunda Edición, 2000.

7) TRUDEAU, Richard J. , “Introduction to Graph Theory”, Editorial Dover, Mineola, N.Y. USA, 1993. (Trudeau 93).

Bibliografía consultada no citada en el texto:

8) PAPARONI, Mario. Notas de Clase sobre el Método Matricial Simplificado. Universidad Metropolitana, Caracas, 1998-2003 (folletos varios).

9) CUBIDES, Jacqueline; Patricia Pazos. Trabajo Especial de Grado: “Método Matricial Simplificado, Comparación de Resultados con el programa SAP 2000". Universidad Católica Andrés Bello, Caracas, Septiembre del 2002.

10) ZAPATA, Diego Rafael. “Programa en Excel Basado en la Aplicación de Matrices no Cayleanas”. Trabajo Especial de Grado. Universidad Católica Andrés Bello, a ser presentado en el primer semestre del 2003.

11) LAREDO, Morgan; “Resistance de Materiaux”. DUNOD, Paris, 1970.

12) STRANG, Gilbert, “Introduction to Linear Algebra”. Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, Massachusetts. 1998.

13) PETTOFREZZO, Anthony J. “Matrices and Transformations”. Dover, N.Y.,1978.

14) HOWARD, Eves. “Elementary Matrix Theory”. DOVER, N.Y.: 1980.

15) LAY, David C. “Linear Algebra and its Applications”. Addison-Wesley, Reading, Mass. 2nd Edition. 2000.
16) JAN PAHL, Peter & Rudolph Damrath; “Mathematical Foundations of Computational Engineering”. Springer-Velag. Berlin. 2001.

17) Ariel y Elena de Kleinman. “Matrices. Aplicaciones Matemáticas en Economía y Administración” Limusa. México. 2000.

18) Flamant, Claude. “Teoría de Grafos y Estructuras de Grupo”. Editorial Tecnos. Madrid. 1972.

19) SENNET, Robert E. “Matrix Analysis of Structures” Waweland Press. Prospect Heights. Illinois. USA. 2000.

20) GEMIGNIANI, Michael C. “Elementary Topology”. 2nd Edition. Dover Publications. New York. 1990.