

*Edith Klimovsky*

## **Resumen**

En este artículo se presentan los nuevos resultados que hemos obtenido a partir de los modelos clásicos bisectoriales de reproducción en desequilibrio elaborados conjuntamente con Carlo Benetti y Christian Bidard, y publicados en la cuarta y última parte del libro *Capital, salaire et crises*, 2006. Se distinguen las extensiones de los modelos básicos y las nuevas líneas de investigación encaminadas por un lado a estudiar la formación de los precios de mercado y su dinámica, y por el otro a analizar las condiciones de las crisis de reproducción en el modelo de Marx.

**Palabras clave:** Desequilibrio, reproducción, consumo, renta, precios de mercado, crisis, teoría clásica, Marx

## **Abstract**

This paper presents the new results we obtained on the basis of the classical bi-sectoral disequilibrium models of reproduction, jointly developed by Carlo Benetti, Christian Bidard and Edith Klimovsky as published in the last section of the book *Capital, salaire et crises*, 2006. A distinction is drawn between extensions of the basic models, and new research aimed at: a) studying market price formation and its dynamics, and b) analyzing the conditions of reproduction crisis in Marx' model.

**Keywords:** Disequilibrium, Reproduction, Consumption, Rent, Market prices, Crisis, Classical theory, Marx

**Clasificación JEL:** B21, B51, D50, D40.

# Modelos de reproducción en desequilibrio: Nuevos desarrollos

*Edith Klimovsky\**

## 1. Introducción

En el plan original que propusimos con Bidard a Dunod, el libro *Capital, salaire et crises* constaba de 9 capítulos, el último de los cuales intitulado “Perspectivas de investigación” tenía como objetivo desarrollar algunas extensiones de las formalizaciones del modelo básico de Torrens (1821, capítulo VI, sección VI) elaboradas por Benetti (1984) y Bidard (1994). A principios de 2002 comenzamos a trabajar en esta línea con la idea de eliminar el supuesto de acumulación de la totalidad de la producción, sugerido por Torrens, que implica la determinación endógena de las tasas de acumulación sectoriales. Inmediatamente se planteó la necesidad imperiosa de introducir una hipótesis acerca de la distribución del valor de la parte no acumulada del excedente, que fuera compatible con la tradición clásica de priorizar la acumulación sobre el consumo capitalista. En este marco, las tasas de acumulación se vuelven exógenas y el vector de mercancías disponibles para el consumo agregado de los capitalistas es un residuo. Después de examinar varias posibilidades adoptamos la idea según la cual el reparto se hace en proporción a las ganancias, lo cual implica que los capitalistas consumen una fracción uniforme de las mismas y por ende las tasas sectoriales de ganancia son proporcionales a las respectivas tasas de acumulación. Surgió así un primer esquema del que sería el segundo modelo.

---

Fecha de recepción: octubre 29 de 2009 - Fecha de aceptación: enero 15 de 2010.

\* Profesora del Departamento de Economía de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Azcapotzalco, México. La autora agradece a Carlo Benetti por sus observaciones.

Paralelamente, Benetti trabajaba en un modelo alternativo y antes de terminar 2002 ya había formulado un esquema del que sería el primer modelo, el cual tenía la misma propiedad que el modelo de Torrens de determinar en términos físicos las tasas de ganancia. Cuando me lo presentó, le solicité que publicara sus resultados para que pudiéramos hacer eco de los mismos en el libro que estábamos preparando con Bidard, a lo cual me propuso que lo hiciéramos entre los tres. Este fue el inicio de una muy fructífera colaboración, que nos permitió desarrollar ambos modelos. Pocos meses después Bidard mostró que, también en el segundo modelo, las tasas de ganancia eran susceptibles de determinarse en términos físicos, lo cual nos permitió entender que ambos modelos tenían las mismas propiedades fundamentales que eran, por lo demás, comunes a Sraffa (1960) y a Torrens (1821). En suma, comprendimos que estos modelos son dos variantes de una formalización que generaliza la teoría clásica de los precios en el doble sentido siguiente: permite estudiar situaciones tanto de equilibrio como de desequilibrio y admite la posibilidad de que los capitalistas acumulen y consuman. El primer modelo es una generalización de Torrens y el segundo de Sraffa. Estos cuatro modelos difieren en la regla adoptada para la distribución del valor de la parte no acumulada del excedente. El último paso consistió en introducir un tributo físico en el primer modelo y uno en valor en el segundo, destinados a financiar las actividades básicas del Estado, y examinar sus efectos sobre la acumulación.

Para facilitar la comprensión del lector, optamos por presentar los dos modelos mediante ejemplos numéricos de una economía compuesta por trabajadores y capitalistas, que produce dos mercancías, ambas de doble uso. Nos centramos en el estudio del modelo básico de una economía bisectorial, para un estado dado de la distribución, sin considerar la presencia de los recursos naturales, en que el consumo capitalista es un residuo que funciona como amortiguador. Como lo muestra el análisis dinámico de ambos modelos, esta última característica del consumo capitalista no evita sin embargo las crisis.

El estudio dinámico nos llevó a profundizar el análisis del sistema físico subyacente y a definir una regla de ajuste que permitiera compatibilizar las tasas de acumulación con la producción disponible, que bautizamos regla del mínimo, según la cual cada productor lleva al mercado la parte

de su producción que no desea acumular<sup>1</sup>. Decimos que habrá una crisis si un capitalista no logra satisfacer su demanda para inversión, en cuyo caso deberá disminuir su tasa de acumulación. En este contexto, la crisis corresponde a la existencia de una demanda insatisfecha de insumos e implica el ajuste a la baja de la tasa de acumulación deseada de al menos uno de los dos sectores.

Consideramos dos tipos de dinámica: una con tasas de acumulación exógenas, enteramente fundada en los aspectos físicos de la economía, y otra con tasas de acumulación endógenas, definidas como una proporción constante de las tasas de ganancia obtenidas en el periodo anterior. Mostramos que, según el modelo, la economía tiende o a un crecimiento regular ineficiente, o al estado estacionario o a un crecimiento cíclico con crisis periódicas alternadas en ambos mercados.

Así fue como pasamos de la idea original de un capítulo final consagrado a las nuevas perspectivas de investigación a la cuarta parte del libro intitulada “Acumulación y crisis”, compuesta de tres capítulos: en el primero se presentan las ideas principales de Torrens, en el segundo se propone una formalización que generaliza la teoría clásica del valor a situaciones de desequilibrio, con dos modelos que se distinguen según la distribución del valor de la parte no acumulada del excedente, y el tercero estudia sus propiedades dinámicas y establece las condiciones para la aparición de crisis.

Los modelos elaborados se inscriben plenamente en la teoría del valor que, tanto en el marco clásico como neoclásico, determina los precios como solución de un sistema de ecuaciones construido a partir de la relación entre individuos y objetos, dejando por lo tanto de lado las transacciones y la moneda. En este sentido, enfrentan los límites comunes a toda teoría del valor así formulada, que deja abierto el problema de la formación de los precios en los distintos mercados, en los cuales los precios no son la solución de un sistema de ecuaciones, y que supone una organización centralizada de los intercambios, oponiéndose de esta manera a la descentralización característica de la sociedad mercantil.

---

<sup>1</sup> Nótese que no podría haber sido de otra manera dada la ausencia de un medio de cambio.



En este artículo se presentan los nuevos resultados que hemos obtenido, ya sea en forma individual o en colaboración con otros investigadores, a partir de estos modelos. Este texto constituye un desarrollo de nuestra ponencia en la Primera Jornada de Estudios en Historia del Pensamiento Económico, que tuvo lugar en Medellín en octubre de 2009. En dicho evento, Bolaños y Tobon presentaron un trabajo en el que se examinan los modelos propuestos en la última parte del libro *Capital, salaire et crises*, razón por la cual no los explicamos con más detalle en este artículo que consta de dos partes. En la primera se exponen las extensiones de los modelos básicos y en la segunda las nuevas líneas de investigación desarrolladas para resolver algunos de los problemas pendientes.

## 2. Extensiones de los modelos básicos

Estas extensiones conciernen a tres puntos diferentes que no tienen todos, por el momento, el mismo grado de desarrollo: la generalización para un número  $n$  de mercancías, el tratamiento del consumo individual de los capitalistas, y la introducción de los recursos naturales, como la tierra agrícola, con la consecuente aparición de la renta diferencial extensiva en el segundo modelo.

### 2.1 Generalización para una economía con $n$ mercancías

Consideramos una economía que produce  $n$  mercancías, de doble uso, con los siguientes métodos de producción

$$\forall i, (i = 1, 2, \dots, n) \quad x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in} \rightarrow q_i \quad (1)$$

donde  $x_{ij}$  comprende tanto la cantidad de mercancía  $j$  utilizada como medio de producción propiamente dicho como la entregada a los trabajadores que participan en la producción de la cantidad  $q_i$  de mercancía  $i$ . En esta economía, las tasas sectoriales de acumulación  $g_i$  deben verificar la siguiente relación

$$\forall i \quad (1 + g_1) x_{1i} + (1 + g_2) x_{2i} + \dots + (1 + g_n) x_{ni} \leq q_i \quad (2)$$

Una vez fijadas las tasas sectoriales de acumulación, la cantidad de cada mercancía disponible para el consumo de la clase capitalista  $d_i$  es

$$\forall i \quad d_i = q_i - [(1 + g_1) x_{1i} + (1 + g_2) x_{2i} + \dots + (1 + g_n) x_{ni}] \geq 0 \quad (3)$$

Los modelos clásicos se componen de dos tipos de ecuaciones: las de producción y las de gasto que representan, respectivamente, las condiciones de rentabilidad y de circulación. Las primeras son independientes de la regla de distribución del valor de la parte no acumulada del excedente y son comunes a ambas variantes del modelo. En el supuesto de que los costos sean evaluados a los precios de reposición, las ecuaciones de producción se escriben

$$\forall i \quad (1 + r_i) (x_{i1} p_1 + x_{i2} p_2 + \dots + x_{in} p_n) = q_i p_i \quad (4)$$

Por su parte, las ecuaciones de gasto dependen de la utilización del excedente y son diferentes en cada modelo. En el primero, el valor de la parte no acumulada del excedente se distribuye según el sector de origen las ecuaciones de gasto son

$$\forall i \quad (1 + g_i) (x_{i1} p_1 + x_{i2} p_2 + \dots + x_{in} p_n) + d_i p_i = q_i p_i \quad (5)$$

Mientras que en el segundo, el valor de la parte no acumulada del excedente se reparte en proporción a las ganancias y las ecuaciones de gasto se escriben

$$\forall i \quad (1 + g_i) (x_{i1} p_1 + \dots + x_{in} p_n) + c r_i (x_{i1} p_1 + \dots + x_{in} p_n) = q_i p_i \quad (6)$$

donde  $c$  es la fracción consumida de las ganancias, que es uniforme en virtud de la regla adoptada para el reparto del valor de la parte no acumulada del excedente.

Ambos modelos comparten las propiedades generales de todos los modelos clásicos: las tasas de ganancia están determinadas en términos físicos y los precios satisfacen tanto la condición de rentabilidad como la condición de circulación, y son por consiguiente precios de reproducción. Pero mientras el primer modelo es dicotómico porque las ecuaciones de gasto son suficientes para determinar los precios relativos de las mercancías, los cuales dependen por lo tanto de las proporciones entre las ramas, el segundo es un modelo recursivo cuya solución es independiente de las proporciones. Las diferencias entre ambos modelos conciernen asimismo a las tasas de ganancia sectoriales que coinciden en el primer modelo con las tasas de excedente de las mercancías producidas por las respectivas ramas en el periodo siguiente, y son proporcionales a las

respectivas tasas de acumulación en el segundo (Klimovsky 2006, pp. 41 y 42). En consecuencia, las condiciones para la existencia del equilibrio difieren para cada uno de los modelos. En el primero, el equilibrio de la reproducción física (igualdad de las tasas de acumulación) y el equilibrio de la rentabilidad (uniformidad de las tasas de ganancia) sólo se verifican simultáneamente (equilibrio completo) si las tasas de acumulación son uniformes y las proporciones entre los sectores son tales que las tasas de excedente son iguales para todas las mercancías, en cuyo caso se dice que el sistema es homotético. En cambio, en el segundo modelo, el equilibrio es completo salvo en el estado estacionario que es compatible con situaciones tanto de equilibrio como de desequilibrio. No obstante, la solución de equilibrio (precios y tasa uniforme de ganancia) es la misma en ambos casos pues sólo depende de la técnica y del estado de la distribución, definido por un nivel dado del salario (Klimovsky 2006, pp. 51- 53).

## 2.2. Tratamiento del consumo individual de los capitalistas

Una crítica frecuente dirigida a la economía clásica es la ausencia de toda referencia al consumo individual de los capitalistas. Hemos abordado, conjuntamente con Carlo Benetti, el análisis de esta cuestión en el marco de los modelos que generalizan la teoría clásica del valor. Los resultados obtenidos están expuestos en una ponencia que presentamos en el XVIII Coloquio Mexicano de Economía Matemática y Econometría (Benetti y Klimovsky, 2008).

Hemos mostrado que, una vez determinados los precios según la lógica particular de cada uno de los dos modelos que generalizan la teoría clásica del valor, las ecuaciones de gasto de ambos modelos pueden escribirse

$$\forall i [(1 + g_i) (x_{i1} p_1 + x_{i2} p_2 + \dots + x_{in} p_n)] + [\alpha_{i1} d_i p_1 + \alpha_{i2} d_2 p_2 + \dots + \alpha_{in} d_n p_n] = q_i p_i \quad (7)$$

donde  $\alpha_{ij}$  indica la fracción de la cantidad de mercancía  $j$  consumida por el capitalista de la rama  $i$ , siendo  $\sum_i \alpha_{ij} = 1$ . El primer corchete del primer miembro de (7) representa el gasto de acumulación, y el segundo el gasto de consumo del capitalista que produce la mercancía  $i$ . Descontando de ambos miembros las cantidades que cada rama utiliza de la mercancía



que produce tanto para la acumulación como para el consumo, dichas ecuaciones de gasto pueden reescribirse de la siguiente manera

$$\forall i \quad (1 + g_i) \sum_{j \neq i} x_{ij} p_j + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} d_j p_j = p_i \sum_{j \neq i} (1 + g_j) x_{ji} + d_i p_i \sum_{j \neq i} \alpha_{ji} \quad (8)$$

Así reescritas, las ecuaciones de gasto expresan que el valor de la demanda para la acumulación y el consumo de cada rama dirigida al conjunto de las otras es igual al valor de la demanda para la acumulación y el consumo de las otras a dicha rama. De estas  $n$  ecuaciones, sólo  $n - 1$  son linealmente independientes. Entonces, dados los precios determinados por cada uno de los modelos, dichas ecuaciones solamente pueden definir  $n-1$  del total de  $n(n-1)$  coeficientes  $\alpha_{ij}$ . Por lo tanto, las ecuaciones anteriores sólo son suficientes para determinar la proporción  $1/n$  de las incógnitas, que decrece a medida que aumenta el número de bienes.

En suma, cuanto mayor es el número de mercancías producidas por una economía, menores son las restricciones que impone la teoría clásica a la composición física del consumo de los capitalistas que pueden entonces elegir canastas de consumo tanto más cercanas a sus preferencias.

### 2.3. La renta diferencial extensiva en desequilibrio

En la teoría clásica, la renta surge en las esferas que tienen una base natural como resultado de la coexistencia permanente de distintos métodos para la producción de una mercancía que tiene un precio único, regulado por una cierta regla de distribución del valor de la parte no acumulada del excedente, que define cómo se reparte este último al interior de la clase capitalista.

Por el momento, nos hemos limitado al estudio de la renta diferencial extensiva en el marco del segundo modelo, en el cual el valor de la parte no acumulada del excedente se reparte de modo tal que las tasas de ganancia sectoriales son proporcionales a las respectivas tasas de acumulación. Hemos considerado una economía que produce  $n$  mercancías, una de las cuales -la 1, por ejemplo- es un producto agrícola cultivado en  $k$  tierras distintas, utilizando un método de producción diferente en cada



una de ellas. Los métodos de producción de los productos industriales siguen escribiéndose como lo indica (1) y las tasas de acumulación de su productores siguen estando indicadas por  $g_i$  ( $\forall i, i = 2, 3, \dots, n$ ). Los  $k$  métodos de producción utilizados para producir la mercancía agrícola son

$$\forall h, \quad (h = 1, 2, \dots, k) \quad x_{11}^h, x_{12}^h, \dots, x_{1n}^h, \Lambda_h \rightarrow q_1^h \quad (9)$$

donde  $x_{li}^h$  incluye la cantidad de mercancía  $i$  empleada como medio de producción propiamente dicho y la cantidad de bien-salario entregada a los trabajadores que intervienen en la producción de la cantidad  $q_l^h$  de mercancía  $l$  en la superficie  $\Lambda_h$  de tierra  $h$ . Designamos por  $g_l^h$  la tasa de acumulación del productor de la mercancía  $l$  en la tierra  $h$ . Las tasas de acumulación serán realizables si son compatibles con la producción disponible del bien agrícola y de los productos industriales, para lo cual deben verificar las siguientes relaciones

$$\forall h, \quad h = 1, 2, \dots, k \quad \sum_{i=1}^k (1 + g_1^h) x_{1i}^h + \sum_{i=2}^n (1 + g_i) x_{i1} \leq \sum_{h=1}^k q_1^h \quad (10)$$

$$\forall j, \quad j = 2, \dots, n \quad \sum_{h=1}^k (1 + g_j^h) x_{1j}^h + \sum_{i=2}^n (1 + g_i) x_{ij} \leq q_j \quad (11)$$

El sistema de precios se compone de  $(n + k - 1)$  ecuaciones de producción y  $(n + k - 1)$  ecuaciones de gasto. Las  $(n - 1)$  ecuaciones de producción y las  $(n - 1)$  ecuaciones de gasto correspondientes a los productos industriales siguen escribiéndose como lo indican respectivamente (4) y (6), pero ahora para  $\forall i, i = 2, \dots, n$ , a las que se agregan las  $k$  ecuaciones de producción y las  $k$  ecuaciones de gasto correspondientes al producto agrícola en cada una de las  $k$  tierras cultivadas, las cuales se escriben, respectivamente

$$(1 + r_1^h) (x_{11}^h p_1 + x_{12}^h p_2 + \dots + x_{1n}^h p_n) + \Lambda_h p_h = q_1^h p_1 \quad (12)$$

y

$$(1 + g_1^h) (x_{11}^h p_1 + x_{12}^h p_2 + \dots + x_{1n}^h p_n) + r_1^h c (x_{11}^h p_1 + x_{12}^h p_2 + \dots + x_{1n}^h p_n) + \Lambda_h p_h = q_1^h p_1 \quad (13)$$

donde  $\rho_h$  indica la renta por unidad de superficie de tierra  $h$  ( $h = 1, 2, \dots, k$ ). La condición de que la renta sea diferencial es que al menos una de las tierras cultivadas no pague renta

$$\rho_1 \rho_2 \dots \rho_k = 0 \quad (14)$$

Si las tasas de acumulación son viables, verificándose entonces las relaciones (10) y (11), la tierra marginal, para el estado dado de la distribución, es aquella que asegura rentas no negativas en todas las tierras cultivadas cuando ella no paga renta. Para poder determinar cuál es la tierra marginal para el estado dado de la distribución se toma la ecuación de producción del bien agrícola en una de las tierras cultivadas conjuntamente con las ecuaciones de producción de los productos industriales y se calculan los precios y las tasas de ganancia considerando que estas últimas son proporcionales a las tasas de acumulación y que la renta es nula en la tierra elegida como marginal. Una vez definidas las tasas de ganancia en las ramas industriales y la del productor que cultiva la tierra que no paga renta, es posible determinar las tasas de ganancia de los productores que explotan las demás tierras cultivadas en función de sus respectivas tasas de acumulación. Como ya se conocen los precios, esta información permite determinar las rentas por unidad de superficie de cada una de dichas tierras. Si ninguna es negativa, la tierra elegida es efectivamente la marginal. Si esta condición no se verifica, se sigue el método implícito en Sraffa para el estudio de la renta diferencial: se toma otra tierra como marginal y se procede de manera análoga hasta encontrar la que satisface el requisito anterior. Por último se calcula la fracción consumida de las ganancias, que es igual para todos los capitalistas en virtud de la hipótesis según la cual el valor de la parte no acumulada del excedente se distribuye en proporción a las ganancias.

La introducción de la renta diferencial extensiva en el segundo modelo no altera las propiedades básicas del mismo: los precios siguen siendo precios de reproducción y son independientes de las proporciones entre los sectores, al igual que las tasas sectoriales de ganancia, las cuales siguen estando determinadas en términos físicos.

El estudio de una economía en desequilibrio en que las tasas de acumulación decididas por los capitalistas agrícolas no son nulas plantea nuevos interrogantes debido a que la tierra impone límites a las tasas de acumulación aun si éstas son viables en función de la disponibilidad de mercancías. Surge así el problema de cómo tratar el incremento de la producción agrícola en una economía en desequilibrio en la cual un

capitalista decide mantener su tasa de acumulación utilizando la misma cantidad de tierra y aplicando un único método en toda la superficie. En este caso, la introducción de nuevos métodos de producción en toda la tierra cultivada por un capitalista estaría favorecida por el mantenimiento de su ritmo de acumulación y no por los cambios en la distribución, como en Sraffa. Aún no tenemos respuesta para este problema pues, por el momento, nos hemos limitado a la solución estática del sistema de precios.

Los resultados anteriores están condensados en sendas ponencias que presentamos en dos seminarios que tuvieron lugar en la Universidad Autónoma Metropolitana, México, durante el mes de octubre de 2009 (Klimovsky 2009, *a y b*).

### **3. Nuevas líneas de investigación**

Hemos desarrollado dos tipos de nuevas líneas de investigación. Una que se propone resolver los problemas derivados del método adoptado por la teoría del valor para la determinación de los precios como solución de un sistema de ecuaciones que deja de lado las transacciones y por ende la moneda. Y otra que aborda las consecuencias para el proceso de acumulación, el equilibrio y el análisis dinámico, de la hipótesis del modelo de reproducción de Marx según la cual uno de los bienes tiene como único uso la acumulación, mientras que el otro es de doble uso, como en los clásicos.

#### **3.1 La formación de precios**

Hemos abordado el problema de la formación de los precios en una economía sin recursos naturales, con dos mercancías básicas, producidas con una técnica dada y rendimientos constantes, en la que los productores quieren acumular toda su ganancia esperada, calculada sobre la base de las mismas expectativas de precio para el siguiente período. En estas condiciones, todos los productores de un sector pueden ser agregados como si hubiera un único productor de cada bien. Los precios se forman en el mercado sobre la base de una regla inspirada en Cantillon (1755, p. 19). Hemos calculado los precios, las tasas de ganancia y las tasas de acumulación, tanto en desequilibrio como en equilibrio, distinguiendo el equilibrio del periodo, que supone la igualdad del precio anticipado



y el precio realizado, del equilibrio completo que implica también la uniformidad de la tasa de ganancia.

Hemos elaborado dos modelos, uno con formación de precios reales y otro con formación de precios monetarios, cuyas dinámicas hemos estudiado. Ambos se inscriben plenamente en el enfoque clásico pero, a diferencia de los modelos en que los precios son la solución de un sistema de ecuaciones, no suponen ninguna regla *a priori* en cuanto a la distribución del valor de la parte no acumulada del excedente, que está determinada por el mecanismo de mercado.

### 3.1.1 Un modelo real

El modelo real que hemos elaborado conjuntamente con Benetti, Bidard y Rebeyrol (2007 y 2009) tiene una estructura secuencial y se compone de tres tipos de ecuaciones. El primero determina los planes de producción de cada productor  $q_i^e$  ( $i = 1,2$ ) que, para la técnica dada definida por los coeficientes  $a_{ii}$  y  $a_{ij}$  ( $i, j = 1,2$ ) de insumos necesarios para producir una unidad del bien  $i$ , les asegura la acumulación de la totalidad de sus ganancias anticipadas al precio relativo esperado  $p_{ij}^e$ . Dicho plan de producción se expresa como función de la producción previa  $q_i^-$  en manos de cada productor y del precio relativo esperado

$$i, j = 1, 2 \quad q_i^e = \frac{q_i^-}{a_{ii} + a_{ij} p_{ji}^e} \quad (15)$$

Dada la ausencia de moneda, los agentes se reservan la parte de su producción que quieren acumular y llevan al mercado el resto. La segunda ecuación representa el mecanismo de mercado y se escribe

$$p_{ij} = \frac{s_j}{s_i} = \frac{q_j^- - a_{jj} q_j^e}{q_i^- - a_{ii} q_i^e} \quad (16)$$

donde  $s_i$  y  $s_j$  indican las cantidades llevadas al mercado de cada una de las mercancías. Esta ecuación tiene una doble función: establece el precio relativo como cociente entre las ofertas recíprocas, y determina las asignaciones sectoriales de medios de producción. Una vez fijado el precio relativo, cada productor puede calcular su tasa de ganancia realizada, cualquiera que sea el estado de compatibilidad de los planes.



Llegado a este punto, el tercer tipo de ecuación determina entonces la producción efectiva de cada mercancía ( $q_i$ ) en función de la técnica y los medios de producción que dispone cada productor después del intercambio. Se tiene entonces:  $q_i = \min \{q_i^e a_{ii} / a_{ii}, s_j / a_{ij}\}$ , o sea:

$$i, j = 1, 2 \quad q_i = \min \left\{ q_i^e, \frac{q_j^- - a_{jj} q_j^e}{a_{ij}} \right\} \quad (17)$$

En este modelo, la mercancía subvalorada por los productores, que llamamos escasa, tiene un exceso de demanda y es totalmente acumulada, mientras que la otra, que llamamos sobreabundante, tiene un exceso de oferta y una parte de su producción es excluida de la acumulación. El productor de la mercancía escasa realiza su plan de producción y su tasa de ganancia anticipada coincide con su tasa efectiva de acumulación. En cambio, el productor de la mercancía sobreabundante debe revisar su plan de producción a la baja.

Este modelo tiene una propiedad remarcable que desempeña un papel importante en la dinámica y según la cual la proporción entre las producciones efectivas sólo depende del precio anticipado y no de los niveles anteriores de actividad.

$$\frac{q_i}{q_j} = \frac{a_{ji}}{a_{ij}} p_{ij}^e \quad (18)$$

Se trata de una relación lineal creciente. Por lo tanto, un aumento del precio relativo esperado de una mercancía implica un incremento proporcional de la producción relativa de la misma.

A partir de los precios de mercado, los capitalistas anticipan los precios del periodo siguiente y toman nuevas decisiones de acumulación. Esta representación del proceso de mercado proporciona al modelo su estructura dinámica. Se distinguen la dinámica de largo plazo y las fluctuaciones. En la hipótesis de anticipaciones estáticas, numerosas simulaciones muestran la estabilidad de la tasa de crecimiento promedio de los dos sectores y su dependencia de las condiciones iniciales. Una propiedad original del modelo es entonces que los choques transitorios de productividad tienen efectos permanentes sobre la tasa de crecimiento de largo plazo, lo que se explica por la exclusión de la acumulación de parte de la mercancía

sobreabundante en una economía en desequilibrio. El análisis de las fluctuaciones muestra fuertes regularidades con comportamiento cíclico en un conjunto acotado.

### 3.1.2 Un modelo con formación de precios monetarios

En este modelo, que hemos elaborado conjuntamente con Benetti y Rebeyrol (Benetti y Klimovsky, 2004 y Benetti, Klimovsky y Rebeyrol, 2007), la economía está constituida por capitalistas, trabajadores y un banco, cuya única función es la emisión del dinero. El dinero es endógeno y funciona como un medio de cambio puro, cuya existencia permite ahora a los agentes llevar al mercado toda su producción. Después de los intercambios, en ausencia de crédito tanto bancario como interpersonal, cada agente debe devolver todo el dinero recibido, respetando así su restricción de presupuesto efectiva.

Este modelo, al igual que el anterior, se resuelve de manera secuencial pero en cuatro etapas y no en tres. La primera concierne al cálculo que hacen los productores sobre la base de los precios monetarios que anticipan con miras a acumular la totalidad de sus ganancias esperadas. Las dos primeras ecuaciones del modelo definen el plan de producción de los productores:

$$i, j = 1,2 \quad q_i^e = \frac{q_i^-}{a_{ij}p_i^e + a_{ij}p_j^e} \quad (19)$$

Una vez definido su plan de producción, cada agente solicita al banco una cantidad de dinero equivalente al valor que espera obtener por la venta de su producción.

La segunda etapa se refiere a la formación de los precios de ambas mercancías en el mercado, que son ahora precios monetarios definidos como cociente entre la cantidad de dinero que los agentes destinan a la compra de cada una de ellas y la cantidad de las mismas presente en el mercado para su venta

$$i, j = 1,2 \quad p_j = \frac{p_i^e (q_i^e a_{ij} + q_j^e a_{ij})}{q_i^-} \quad (20)$$

Estas dos ecuaciones determinan tanto los precios de mercado como las asignaciones de mercancías que obtiene cada uno de los productores.

La tercera etapa corresponde a la devolución del dinero a la agencia de emisión. Dada la ausencia de toda forma de crédito, adoptamos la regla siguiente: los que tienen un superávit transfieren su excedente de dinero a los que tienen un déficit, que pueden así saldar su deuda, a cambio de cantidades de bienes escogidas por los primeros de modo tal que puedan acumular la totalidad de sus ganancias realizadas. Dado que todos los productores de una mercancía utilizan la misma técnica, la estructura de la canasta escogida es la misma para cada uno de ellos. Esta regla se justifica por la asimetría entre ambos tipos de agentes: los que tienen un superávit están en una situación de ineficiencia porque no utilizan un recurso del que disponen, mientras que la posición de los que tienen un déficit es aún más crítica porque si no pagan su deuda quiebran, desapareciendo así de la economía.

Después de saldarse los déficits y superávit, la última etapa corresponde a la determinación de las producciones efectivas ( $q_i$ ) en función de la técnica y de las cantidades de insumos que posee cada productor después de los intercambios y del pago de las deudas.

Este modelo tiene varias propiedades importantes, algunas de las cuales coinciden y otras difieren de las del modelo real. Como en este último, salvo en un caso patológico que hemos detectado, la mercancía subvalorada por los productores es escasa y es totalmente acumulada mientras que una parte de la sobreabundante es excluida de la acumulación y, a diferencia del modelo real, permanece integralmente en las manos de su productor después del pago de la deuda. Pero diferentemente de lo que sucede en el modelo real, el productor de la mercancía escasa realiza ahora una ganancia superior a la anticipada, que puede acumular íntegramente. En cambio, el productor de la mercancía sobreabundante realiza una ganancia inferior a la esperada, y no puede acumular la totalidad de sus ganancias.

Una propiedad notable de este modelo, que se deduce de la igualdad entre el valor de la producción y el valor de los empleos después del pago de la deuda tanto para cada sector como para cada mercancía, es la equivalencia, a los precios de mercado, de la utilización productiva efectiva que cada sector hace de los insumos que le procura el otro sector

$$a_{ij} q_i p_j = a_{ji} q_j p_i \quad (21)$$



$$\frac{q_i}{q_j} = \frac{a_{ji}}{a_{ij}} \frac{p_i}{p_j} \quad (22)$$

Esta última ecuación establece una relación creciente simple (lineal) entre los precios de mercado actuales y la proporción entre los sectores, que desempeña un papel clave para el análisis dinámico del modelo. Nótese la diferencia con el modelo real en el cual la relación entre las producciones efectivas depende del precio relativo esperado (véase ecuación (18)).

Hemos determinado un valor crítico del cociente entre la traza y el valor propio dominante de la matriz de coeficientes técnicos tal que si dicho cociente es superior o igual al valor crítico, los precios relativos y las cantidades relativas convergen de manera monótona o alternada, según el signo del determinante, hacia sus valores estacionarios, es decir hacia el equilibrio, representado por un sistema homotético de crecimiento regular (tasa de excedente uniforme para las dos mercancías). El equilibrio cuasiestacionario es entonces globalmente estable. En cambio, si dicho cociente es inferior al valor crítico, lo que sólo es posible si el determinante de la matriz de coeficientes técnicos es negativo, los precios relativos y las cantidades relativas convergen hacia un ciclo límite de periodo 2, cualquiera que sea la posición inicial, salvo en el caso patológico que sólo se verifica cuando el determinante es negativo y muy grande en valor absoluto. Hemos mostrado que, únicamente en este caso patológico, el sistema puede no ser viable, y hemos determinado el valor crítico de los coeficientes técnicos que garantiza la viabilidad. Hemos identificado una dinámica específica del caso patológico convergente hacia la dinámica normal y hemos demostrado que este caso patológico sólo puede presentarse en la fase inicial de la dinámica.

Asimismo hemos definido las ecuaciones dinámicas de los precios monetarios cuyo estudio nos ha permitido mostrar que la variación de los precios monetarios entre dos periodos depende únicamente de las variables reales (la técnica, el precio relativo en el primer periodo y la proporción entre las ramas en el segundo periodo). Hemos demostrado igualmente que una perturbación de los precios monetarios que altera el precio relativo no es neutral ni a corto ni tampoco a largo plazo. Después del periodo de transición, la economía se encuentra en un nuevo sendero de crecimiento equilibrado a la misma tasa de crecimiento de largo plazo



que la inicial, pero a un nivel más bajo debido a la no acumulación de parte de las mercancías durante la transición. De esta forma, el nivel de riqueza a largo plazo es más bajo del que hubiera existido en ausencia de la perturbación.

### **3.2 Un modelo con un bien destinado únicamente a la acumulación**

Hemos estudiado conjuntamente con Benetti, Béraud y Rebeyrol (Benetti y Klimovsky, 2004 y Benetti, Béraud, Klimovsky y Rebeyrol, 2007), las condiciones del equilibrio y de las crisis en el esquema de la reproducción ampliada del capital social, que Marx desarrolla en el libro II del *Capital* mediante ejemplos numéricos de los flujos monetarios de una economía bisectorial que produce medios de producción, cuyo único uso es la acumulación y que son producidos por el sector I, y bienes de consumo, que pueden ser tanto acumulados (salario de los trabajadores) como consumidos por los capitalistas, y que son producidos por el sector II.

Dada la presencia de un bien específico que sólo puede ser acumulado, el proceso de acumulación es necesariamente asimétrico. En el modelo de Marx, el capitalista del sector I decide su tasa de acumulación, la cual asegura por lo menos su reproducción simple, mientras que el capitalista del sector II se adapta absorbiendo, si es que puede hacerlo, los medios de producción que quedan disponibles. Los ejemplos de Marx se refieren a economías en que la composición orgánica del capital del sector I no es inferior a la del sector II. En todos ellos, la economía alcanza un sendero de crecimiento regular a partir del segundo periodo (Marx, 1885, libro II, tomo II, capítulo XXI). Hemos determinado las condiciones para que se verifique este resultado de Marx, evitando así todo tipo de crisis.

Debido a la presencia de un bien que sólo puede destinarse a la acumulación, en el modelo de Marx surge un nuevo tipo de crisis que no aparece en ninguno de los modelos clásicos que hemos estudiado: la crisis de reproducción. Esta última corresponde a una sobreproducción de medios de producción, que implica una insuficiencia de bienes de consumo para los trabajadores. Este tipo de crisis se agrega a la crisis de ajuste que se presenta cuando el sector II se ve forzado a reducir su

producción porque los medios de producción que le deja el sector I no resultan suficientes para que pueda reemplazar su capital. Ambos tipos de crisis son el resultado de una desproporción entre los sectores, pero su naturaleza es muy diferente. En la crisis de ajuste, la economía se reproduce en el primer periodo y alcanza un sendero de crecimiento regular a partir del segundo a la tasa de acumulación decidida por el sector I, siempre y cuando éste la mantenga. En cambio, en la crisis de reproducción, la incapacidad del sector II para adaptarse a la decisión de acumulación del sector I, impide que se verifique el equilibrio de Marx en el segundo periodo.

Marx señala la importancia que tiene la reproducción física para la reproducción del capital social pero no desarrolla dicho análisis. Unos de los principales objetivos de nuestro trabajo ha sido colmar esta laguna de la teoría marxista de la reproducción. Los ejemplos numéricos de Marx relativos a los flujos monetarios no dan ninguna indicación explícita de la técnica utilizada. Dichos esquemas pueden escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned} k_1 + v_1 + m_1 &= y_1 \\ k_2 + v_2 + m_2 &= y_2 \end{aligned} \tag{23}$$

donde  $k_i$ ,  $v_i$ ,  $m_i$ , et  $y_i$  son, respectivamente, el capital constante, el capital variable, la plusvalía y el valor del producto del sector  $i$  ( $i = 1, 2$ ). Dado que a dichos flujos monetarios les debe corresponder una única técnica representada por una matriz de coeficientes técnicos  $\mathbf{A}$ , las ecuaciones (23) pueden reescribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \underbrace{q_1 a_{11} \lambda_1}_{k_1} + \underbrace{q_1 a_{12} \lambda_2}_{v_1} + m_1 &= \underbrace{q_1 \lambda_1}_{y_1} \\ \underbrace{q_2 a_{21} \lambda_1}_{k_2} + \underbrace{q_2 a_{22} \lambda_2}_{v_2} + m_2 &= \underbrace{q_2 \lambda_2}_{y_2} \end{aligned} \tag{24}$$

donde  $q_1$  y  $q_2$  representan las cantidades (desconocidas) de bienes producidos por los dos sectores,  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son los valores monetarios (desconocidos), y  $a_{ij}$  es la cantidad del bien  $j$  necesaria para producir una unidad de  $i$  (es decir los elementos de la matriz  $\mathbf{A}$  desconocida). Sobre la base de las ecuaciones (24) es posible construir dos matrices que llamamos

$\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{M}$ , y que tienen la misma diagonal principal. Los coeficientes de la matriz  $\mathbf{Z}$  son definidos como la fracción de la producción de cada bien utilizada para producir ambos bienes, o sea:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \frac{q_1}{q_2} \\ a_{21} \frac{q_2}{q_1} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (25)$$

Mientras que los coeficientes de la matriz  $\mathbf{M}$  se obtienen dividiendo los capitales constantes y variables de cada sector por el valor de su producto bruto, es decir:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \\ a_{21} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Los elementos de ambas matrices son cuatro números puros perfectamente determinados aun si se desconocen tanto las cantidades producidas de ambos bienes como sus valores monetarios y la matriz  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ , cuya diagonal principal coincide con la de las matrices  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{M}$ . Estas dos matrices tienen una propiedad remarcable: la traza, el determinante, la ecuación característica y por lo tanto los valores propios de la matriz  $\mathbf{Z}$  son *independientes* de la proporción entre los sectores  $q = q_1/q_2$ , mientras que los de la matriz  $\mathbf{M}$  son *independientes* del valor monetario relativo  $\lambda = \lambda_1/\lambda_2$ , y son en ambos casos los mismos que los de la matriz  $\mathbf{A}$  desconocida.

Hemos mostrado que el conocimiento de la matriz  $\mathbf{Z}$  o de la matriz  $\mathbf{M}$ , deducidas del sistema de flujos monetarios, es suficiente para determinar las condiciones *físicas* de la reproducción y de las crisis de una economía bisectorial en la cual uno de los bienes sólo puede ser acumulado, como en el modelo de Marx. En este marco, la acumulación máxima del sector I está definida por la inversa del valor propio dominante de la matriz de coeficientes técnicos, que coincide con el de las matrices  $\mathbf{Z}$  y  $\mathbf{M}$ , y la acumulación máxima del sector II por la acumulación simple del sector I.



Hemos definido dos proporciones críticas entre las ramas para cada tipo de crisis. En el modelo de Marx, el determinante de las matrices **Z**, **M** y **A** es positivo o nulo (la composición del capital del sector I no es inferior a la del sector II). Para la crisis de reproducción existe entonces una proporción más allá de la cual esta crisis es inevitable, que corresponde a una situación en la cual ambos sectores acumulan el máximo posible (sendero de von Neumann), y una proporción por debajo de la cual dicha crisis es imposible, la cual se verifica cuando la acumulación máxima del sector II es capaz de absorber el máximo de medios de producción que le deja el sector I, es decir cuando este último se limita a asegurar su reproducción simple. Es obvio que la primera de estas proporciones es mayor que la segunda. Para toda proporción comprendida entre ambas proporciones, la aparición de una crisis de reproducción depende de la tasa de acumulación decidida por el sector I.

En lo que se refiere a la crisis de ajuste, hay una proporción más allá de la cual esta crisis no es posible, que concierne a una situación en que los medios de producción que deja el sector I cuando acumula el máximo posible son suficientes para garantizar la reproducción simple del sector II, y una proporción por debajo de la cual la crisis de ajuste es ineludible, que corresponde al caso en que la reproducción simple del sector I sólo deja al sector II medios de producción suficientes para su reproducción simple. La primera de estas dos últimas proporciones es superior a la segunda y, para toda proporción comprendida entre ambas proporciones, el resultado depende de la tasa de acumulación decidida por el sector I.

De manera análoga al estudio que hicimos del sistema físico, hemos definido cuatro proporciones críticas para los sistemas de flujos monetarios de Marx, en los que la tasa de ganancia del sector II no es inferior a la del sector I. Por tratarse de sistemas de flujos monetarios donde la plusvalía es acumulada en su sector de origen, la acumulación máxima de cada sector está limitada por su respectiva tasa de ganancia. Quedan así excluidas todas las tasas de acumulación del sector I comprendidas entre su tasa de ganancia y la máxima tasa de crecimiento posible, correspondiente al sendero de von Neumann. En consecuencia, para la crisis de reproducción, las proporciones en valor son más restrictivas que las obtenidas para el



sistema físico. En cambio, para la crisis de ajuste, la proporción en valor más allá de la cual esta crisis no es posible es menos restrictiva que en el sistema físico correspondiente, mientras que la proporción por debajo de la cual la crisis de ajuste es inevitable coincide en ambos sistemas.

## Conclusión

Uno de los límites más importantes de la teoría económica contemporánea es que restringe su campo de análisis a las situaciones de equilibrio. El objetivo común a las nuevas investigaciones presentadas en este artículo es contribuir al desarrollo del estudio del desequilibrio, que comprende tanto la determinación de los precios, de las tasas de ganancia y de los niveles de producción en un periodo determinado, como el análisis de su dinámica.

El examen del comportamiento de una economía fuera del equilibrio es un tema evidentemente difícil que implica la formalización del desequilibrio a la vez de los mercados, de las actividades productivas y de los agentes. Los saldos monetarios de estos últimos y la liquidación de los mismos son una expresión significativa de estos desequilibrios y su estudio constituye un aspecto central del problema de la integración de la moneda en la teoría del valor. Aunque limitados, los resultados obtenidos son alentadores y estimulan la prosecución de estas líneas de investigación.

## Referencias Bibliográficas

Benetti, C., (1984), "La théorie de la demande effective chez Torrens", *Cahiers d'Économie Politique*, n° 12, Paris, 1986, pp. 3-39. Traducción al español: "La teoría de la demanda efectiva de R. Torrens", *Análisis Económico*, vol. IV, n° 6, México, 1985, pp. 21-60.

Benetti, C. y Klimovsky, E., (2004), *Precios y reproducción: integración de la moneda en la teoría del valor*, Universidad de París X, Nanterre, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, mimeografiado.

\_\_\_\_\_, (2005), *El modelo de reproducción ampliada de Marx: estudio geométrico*, Universidad de París X, Nanterre, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, mimeografiado.

\_\_\_\_\_, (2008), *Acumulación y consumo en la teoría clásica*, ponencia presentada en el XVIII Coloquio Mexicano de Economía Matemática y Econometría, México.

Benetti, C., Bidard, Ch., Klimovsky, E. y Rebeyrol, A., (2007), *Déséquilibre de marché et reproduction dans un modèle classique bisectorial*, Universidad de París X, Nanterre, mimeografiado.

\_\_\_\_\_, (2009), *Reproduction and Disequilibrium: a Classical Approach*, Universidad de París X, Nanterre, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, mimeografiado. 23

Benetti, C., Klimovsky, E. y Rebeyrol, A., (2007), *Reproducción y precios monetarios*, Universidad de París X, Nanterre, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, mimeografiado.

Benetti, C., Béraud, A., Klimovsky, E. y Rebeyrol, A., (2008), *Étude du schéma de Marx en termes physiques*, Universidad de París X, Nanterre, Universidad de Cergy-Pontoise, Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, mimeografiado.

Bidard, Ch., (1994), “Torrens, économiste de la reproduction et de la demande effective”, Universidad de París X-Nanterre, mimeografiado.

Bidard, Ch. y Klimovsky, E., (2006), *Capital, salaire et crises. Une approche classique*, París, Dunod.

Bolaños, E. y Tobón, A., (2009), “La teoría de los precios de reproducción: la contribución de Bidard y Klimovsky”, ponencia presentada en la Primera Jornada de Estudios en Historia del Pensamiento Económico, Medellín.

Cantillon, R., [1755], *Ensayo sobre la naturaleza del comercio en general*, México, Fondo de Cultura Económica, 1978.

Klimovsky, E., (2006), « Tasas de ganancia, acumulación, producción y circulación: los conceptos básicos de la teoría clásica del valor », *Cuadernos de Economía*, vol. XXV, n° 44, Bogotá, Colombia.

\_\_\_\_\_, (2009 a), “La renta diferencial en un modelo clásico de una economía en desequilibrio”, ponencia presentada en el V Congreso de Teoría Económica de la UAM, octubre 2009.

\_\_\_\_\_, (2009 b) “Los recursos naturales en modelos clásicos de reproducción en desequilibrio”, ponencia presentada en el III Seminario Departamental, Departamento de Economía de la UAM-Azcapotzalco, octubre 2009.

Sraffa, P., (1960), *Producción de mercancías por medio de mercancías*, Oikos Tau, Barcelona, 1966.

Torrens, R., (1821), *An Essay on the Production of Wealth*, reimpresso en Dorfman, J., (ed), (1965), New York, A.M. Kelley.