Revista ECORFAN,Vol.1,núm.2,2010,pp.93-110

NEGOCIOS

Mtra. Christian Moreno Ibarra

Mtro. César Manzanarez López

CONJUNTOS DE MANDELBROT EN LA DIVERSIFICACIÓN DE MERCADO CON SET ´S DE JULIA

Mtra. Christian Moreno Ibarra

Licenciada en Finanzas (ITEMS-Monterrey), Maestra en Administración de Negocios (UNILA).

Mtro. César Manzanarez López

Licenciado en Mercadotecnia y Publicidad Maestro en Administración de Negocios (UNILA).

Fecha de Envió: 23 de Agosto de 2010.

Fecha de Aceptación: 31 de Agosto de 2010.

RNA: 03-2010-091017365200-01

Fecha de Acta: 20 de Septiembre de 2010

CONTENIDO

- Introducción
- Proceso Iterativo de Funciones No lineales
- Conjunto de Julia y Conjunto de FATOU
- Modelos Fractales es en el Mercado Financiero
- Consideraciones Finales
- Referencias
- Bibliográficas

CONJUNTOS DE MANDELBROT EN LA DIVERSIFICACIÓN DE MERCADO CON SET ´S DE JULIA

Mtra. Christian Moreno Ibarra[29]

Mtro. César Manzanarez López

Resumen.

En este artículo se realizó un análisis de una de las tantas vertientes de la geometría fractal aplicada al mercado financiero, que dado su sistema dinámico y volátil, se asemeja a las variaciones de un fractal.

Con base en los conjuntos de Mandelbrot y Julia, se desarrolló un modelo de aplicación al mercado financiero de capitales a nivel local e internacional con la finalidad de obtener pronósticos a corto plazo de los precios de las acciones para la toma de decisiones.

Palabras Clave: Fractal, iteración, números complejos, perturbación.

Abstrac.

In this article an analysis of one of the so many slopes of the geometry fractal was made applied to the financial market, that given its dynamic and volatile system, is resembled the variations of a fractal.

With base in the sets of Mandelbrot and Julia, a model from application to the financial market of capitals at local and international level with the purpose was developed of obtaining short term prognoses of the prices of the actions for the decision making.

Keywords: Fractal, iteration, numbers complex, disturbance.

Classification JEL: C51, C53.

---

[29] Correo Electrónico: christian.moreno@ppdi.com

Revista ECORFAN,Vol.1,núm.2,2010,pp.93-110

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los avances matemáticos de mayor complejidad, por salir de los estándares que la comunidad matemática por muchos siglos había implementado, es la geometría fractal, desarrollada por el matemático polaco Benoit Mandelbrot (1924-) en 1975, la cual fue motivada para replicar formas irregulares o naturales que con la geometría euclidiana es imposible representar, con el propósito de entender estructuras desordenadas y su formación mediante procesos aleatorios.

Así Mandelbrot lo hizo a través de lo que llamo fractales, nombre inspirado en el adjetivo latín fractus que significa fragmentado. Benoit Mandelbrot postuló la geometría fractal en variadas obras literarias[30], basándose en las ideas de dos matemáticos franceses: Gaston Maurice Julia (1893-1978) y Pierre Joseph Fatou (1878-1929), quienes siguiendo un proceso iterativo sobre el campo de los números complejos dieron origen a los conocidos conjuntos de Julia y su complemento, los conjuntos de Fatou; a su vez, Mandelbrot trabajo especialmente sobre un subconjunto de los conjuntos de julia, que lleva su nombre.

Los fractales poseen dos propiedades que resaltan su esencia: autosimilitud y dimensión fraccionaria, adquiridas por su invarianza de escala, esto es, cuanto más se amplíe su escala, no pierden su forma original. El concepto fractal es utilizado para identificar orden en muchos problemas de características no lineales, de hecho, sin la ayuda de los fractales los sistemas complejos no pueden ser diseñados a gran detalle.

Variadas aplicaciones de la geometría fractal han surgido gracias a su poder para identificar patrones repetitivos, cuantificarlos y analizarlos; el objetivo de este trabajo es desarrollar su aplicación en el Mercado Financiero, al ser éste un sistema dinámico, por contener variables que presentan las mismas características que los fractales. La geometría fractal es utilizada para ampliar variaciones pequeñas o fluctuaciones de una serie de tiempo, mediante procesos iterativos y así crear los cambios cualitativos a gran escala. El mismo Mandelbrot dirigió la geometría fractal hacia éste campo[31] al analizar las variaciones de los precios del algodón, pues ésta variable mantiene una dinámica no lineal; descubrió que las curvas de movimiento de los precios en diferentes periodos de tiempo guardan la misma forma, facilitando la predicción.

---

[30] Benoit Mandelbrot, *The fractal geometry of nature"*, Freeman, New York, 1982; y, Benoit Mandelbrot , *Fractals; Form, Chance and Dimension"*, Freeman, New York, 1977

[31] Benoit Mandelbrot," *Fractal and Scaling in Finance"*, Springer, New York, 1997, 551 p

Posteriormente, Mandelbrot ahonda en temas financieros relativos a la variabilidad temporal de precios especulativos en su obra "Fractal and Scaling in Finance" en 1997; pues los mercados financieros se desarrollan entre el caos y el orden, donde pequeñas variaciones íniciales producen grandes cambios en los movimientos de los precios finales, ésta propiedad es la idea principal para el desarrollo de modelos matemáticos que brinden pronósticos a corto plazo por modelar el comportamiento de los precios, con el fin de tomar las mejores decisiones posibles (comprar o vender).

El análisis fractal está ligado a la teoría del Caos pues ésta reconoce que no todos los modelos que se estudian son lineales, tal es el caso de los modelos empleados para analizar los mercados financieros, ya que éstos son sistemas dinámicos no lineales que al interactuar con valores pasados o externos pueden cambiar los valores íniciales, ocasionando resultados totalmente diferentes a los esperados.

2. Proceso iterativo de Funciones No Lineales

En términos llanos, un fractal es una forma geométrica que se repite así misma en cualquier escala en la que se observe. Rigurosamente, un fractal es el resultado final de la iteración infinita de un proceso geométrico determinado, en particular, resulta de la composición de funciones de una función cuadrática sobre un campo complejo. Primero, definiremos las propiedades características de los fractales, ahondando posteriormente en su construcción.

Propiedades de los fractales:

Autosimilitud: se refiere a que cada fragmento del objeto posee las mismas características que la figura completa, las cuales pueden repetirse de manera infinita; se basan en los números complejos.

Existen dos clases de fractales:

Lineales: son exactamente iguales en diferentes escalas y por tanto tienden a infinito.

No lineales: surgen a partir de distorsiones complejas, se encuentran en la naturaleza.

Dimensión fraccionaria: revela que la dimensión del fractal no corresponde a un número entero, sino fraccional.

Debido a que la teoría sobre fractales comprende el campo de los números complejos, daremos una breve introducción a ellos.

Acotación 1: Al conjunto formado por los números de la forma $a+bi$ con $a,b \in \Re$, $i=\sqrt{-1}$ se les conoce como números complejos.

Sea $z=a+bi$ un número complejo. Al real a le llamaremos la parte real de z, y al real b la parte imaginaria de z.

El campo de los números complejos se denota por C. Mencionamos las propiedades más importantes de los números complejos:

- El módulo de z, denotado por $|z|$ es igual a $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$

- Sea $z=a+bi$ y $x=c+di$, entonces:
  Suma:
  $$z+x=(a+c)+i(b+d)$$
  Producto:
  $$zx=(ab-cd)+i(ac+bd)$$

- El conjugado de un número complejo $z=a+bi$, se denota como $\bar{z}$ y corresponde a $\bar{z}=a-bi$

- Notación exponencial de z
  $z=|z|\exp(i\theta)$ con $0\le\theta\le 2\pi$

- Notación polar de z
  $z=|z|(\cos(\theta)+i\operatorname{sen}(\theta))$
  con $0\le\theta\le 2\pi$

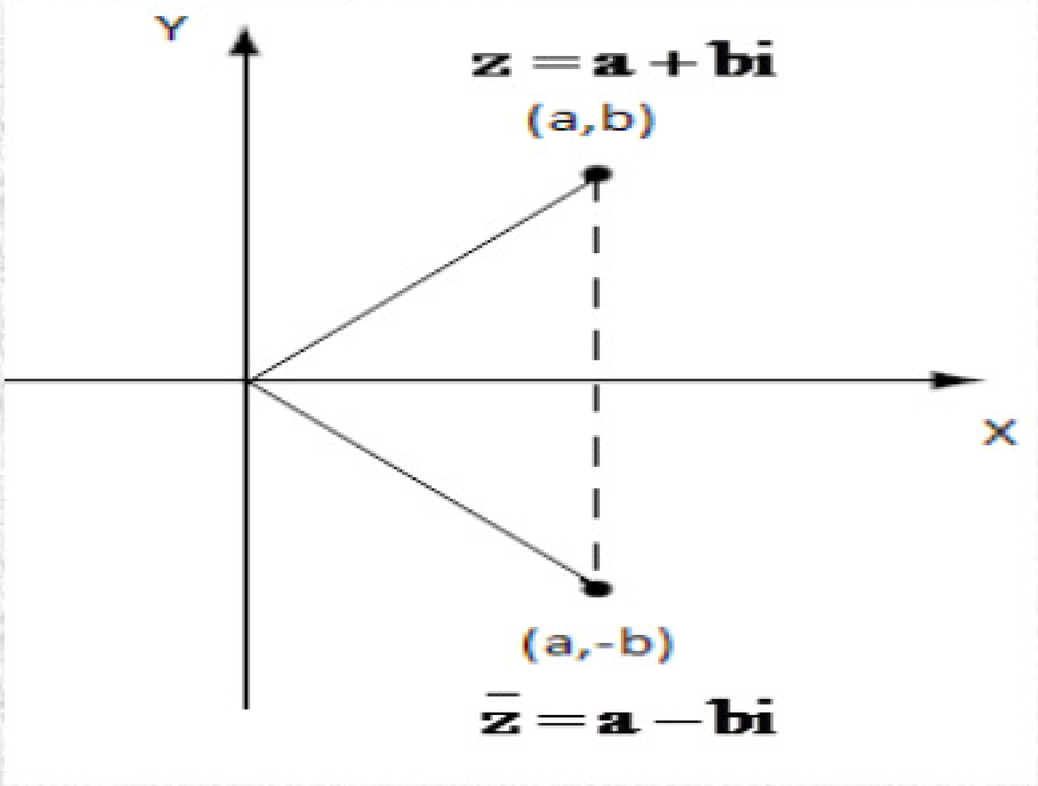

Figura 1[32]: El plano complejo

Desde el punto de vista geométrico, los números complejos se pueden identificar con los puntos del plano cartesiano haciendo corresponder al complejo $z = a + bi$ el punto (a, b), como lo muestra la figura 1.

La topología del plano complejo puede ser concebida a través de la equivalencia establecida entre la esfera de Riemman y el plano complejo, esto es, la proyección de los puntos de la esfera de radio unitario con centro en N, tangente al plano complejo, sobre éste, siguiendo una aplicación biyectiva. En la figura 2 podemos visualizar esta proyección.

El origen de la teoría de la geometría fractal se remonta a los trabajos de los matemáticos franceses Gastón Julia (1893-1978) y Pierre Fatou (1878-1929) quienes en sus manuscritos postularon los conjuntos que llevan sus nombres, dentro de un sistema dinámico complejo, observando el comportamiento de la órbita de un punto c sobre el plano complejo extendido, definido como $\hat{C} = C \cup \{\infty\}$, aplicando iterádamente una función cuadrática f. A pesar de ser los precursores de la teoría fractal, Julia y Fatou no pudieron ver gráficamente sus conjuntos debido a la dificultad de los cálculos aritméticos que comprende.

Acotación 2**:** Un sistema dinámico discreto es un par (X, f) donde X es un campo y $f : X \to X$. Dado un punto $x \in X$, el conjunto $\{x, f^1(x), f^2(x), f^3(x), f^4(x), \ldots\}$ será llamado la órbita de x, donde $f^n(x) = f \circ \cdots \circ f(x)$.

[32] López G. Artemio. *"Variable Compleja"*. Madrid, 2003.

Revista ECORFAN,Vol.1,núm.2,2010,pp.93-110

Al punto $x \in X$ que satisface $f(x) = x$ se le llama punto fijo o "punto de equilibrio" de la función f.

Al punto $x \in X$ que satisface $f^n(x) = x$ y $f^i(x) \neq x$ con $i > n$ se le llama punto periódico de la función f de periodo $n > 1$.

Haciendo $X = C$, la clasificación de los puntos fijos de acuerdo a sus propiedades en un sistema dinámico complejo (C, f), son las siguientes:

$1.- z_0 \in C,\ z_0$ es un punto atractor sí $|f'(z_0)| < 1$ $\quad (1.1.1)$

$2.- z_0 \in C,\ z_0$ es un punto repulsor sí $|f'(z_0)| > 1$ $\quad (1.1.2)$

$3.- z_0 \in C,\ z_0$ es un punto indiferente sí $|f'(z_0)| = 1$ $\quad (1.1.3)$

$4.- z_0 \in C,\ z_0$ es un punto super atractor sí $|f'(z_0)| = 0$ $\quad (1.1.2)$

Acotación 3: Se dice que un sistema dinámico es estable sí la dinámica no cambia bajo pequeñas perturbaciones de f.

Una vez clasificados los puntos fijos sobre (C, f), pasemos a definir a los conjuntos de Julia.

3. Conjuntos de Julia y Conjunto de FATOU

Los conjuntos de Julia tienen lugar en los sistemas dinámicos complejos, como ejemplo de éstos se tienen a los sistemas físicos, biológicos, de cómputo, sociales y económicos. Dichos sistemas, generalmente exhiben una invarianza a diferentes escalas, pues su comportamiento no cambia por el reescalado de las variables espacio-tiempo que las definen y gobiernan su dinámica

Julia y Fatou hacia 1918, aplicaron el proceso iterativo bajo la transformación $f_c(z) = z^2 + c$, para obtener la órbita del punto z.

Acotación 4: Sea (C, f) un sistema dinámico complejo, con $f_c : C \to C$ tal que $f_c(z) = z^2 + c$, con $c, z \in C$, el conjunto de Julia bajo f_c esta dado por:

$$J_c(f) = \text{clausura}\{z \in C \text{ t.q. } z \text{ es un punto periódico repulsor de } f\} \quad (1.2.1)$$

Acotación 5: La clausura de Ω queda definida como la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a Ω .El conjunto de Julia por definición, son todos aquellos puntos que dividen a $\bar{C}$ en dos partes, aquellos que siguiendo el proceso iterativo presentan órbita inestable y aquellos para los cuales su órbita converge.

Proceso iterativo para el cálculo de la órbita de un punto $z_0 \in C$ en (C, f)

Sea $f : C \to C$ tal que $f = z^2 + c$ con $c \in C$, para $n = 1, 2, \ldots$, entonces:

$$f^1(z_0) = z_0^2 + c$$
$$f^2(z_0) = f \circ f(z_0)$$
$$\vdots$$
$$f^n(z_0) = f \circ \cdots \circ f(z_0)$$

Figura 3[33]: Proceso iterativo sobre C

Para el caso particular $f_c(z) = z^2$, los puntos periódicos de periodo $n > 1$ son aquellos tales que $f_c^n(z) = z^{2^n} = z$, de aquí que $z^{2^n - 1} = 1$, lo que equivale a $|z| = 1$, así entonces:

$$\left|\left(f^{n}(z)\right)\right| = \left|2^n\left(z^{2^n-1}\right)\right| = 2^n\left|z^{2^n-1}\right| = 2^n(1) > 1$$

Por tanto, resulta que todo punto periódico de $f_c(z) = z^2$ de periodo $n > 1$ es repulsivo, entonces el conjunto de julia esta dado por:

$$J_c(f) = cerradura\ \{z \in C\ t.q.\ |z| = 1\} \qquad (1.2.1)$$

[33] Elaboración propia.

A partir de este razonamiento, podemos encontrar los puntos p-periódicos repulsivos que pertenecen al conjunto de Julia, esto es, tenemos que encontrar las raíces de los polinomios de grado 2^p, ya que para $f_c^2(z)$ con f_c una función cuadrática, resulta un polinomio de grado 4, para $f^3(z)=z$ resulta un polinomio de grado 8, y así sucesivamente; después, encontrar la condición que debe cumplir z, para ser un punto repulsor; este procedimiento dificulta la construcción de un conjunto de Julia, por los cálculos aritméticos que comprende.

El siguiente teorema proporciona una forma alternativa de calcular el conjunto de Julia, de manera sencilla.

Teorema 1: Sí $z \in J_c(f)$, entonces:

$$J_c(f) = \text{cerradura}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} f_c^{-k}(z)\right) \qquad (1.2.2)$$

Este teorema afirma que $J_c(f)$ es un conjunto atractivo de f^{-1}, y proporciona un algoritmo sencillo para graficar el conjunto de julia a través de cálculos computacionales, de la siguiente manera: se debe calcular la inversa de la función f_c^k para $k \to \infty$, valuada en un punto fijo repulsor, es decir, para un $z_0 \in C$ tal que $f_c(z_0) = z_0$ y cumple $\left|f_c'(z_0)\right| > 1$; por definición $z_0 \in J_c(f)$, entonces sea $Z_0 = \{z_0\}$.

Iteramos la función $f_c(z_0)$, con el fin de que en el k-ésimo paso, se haya construido el conjunto $Z_{k-1} = \{z_0, \ldots, z_{k-1}\}$; se toma cada $z_i \in Z_{k-1}$ y se calcula las imágenes de la función inversa f_c, esto es: $f_c^{-1}(z_i)$. Se repite hasta calcular un gran número de puntos y se dibujan.

Por otro lado, podemos definir los conjuntos de Julia, basados en la frontera del área de atracción de un punto fijo z.

Acotación 6: Sea $z \in C$ un punto fijo atractivo; el área de atracción de z queda definida como: $$A(z) = \{y \in X \text{ t.q } \lim f^n(y) = z\} \qquad (1.2.3)$$

Si $y \in A(z)$ entonces contiene la órbita de y. Sí $z \in C$ es un punto periódico de periodo $n > 1$, su órbita es llamada ciclo, dada por:

$$\{z, f^1(z) = z, f^2(z) = z, f^3(z) = z, \ldots, f^n(z) = z\} \qquad (1.2.4)$$

Entonces, el área de atracción del ciclo es definido como:

$$A(z)=\bigcup_{i=0}^{n} A\left(f^{i}(z)\right) \tag{1.2.5}$$

A partir de esto, el conjunto de Julia queda definido como la frontera del área de atracción de un punto fijo z.

Acotación 7**:** Un punto $z \in C$ es un punto frontera de Ω sí:

$$1.- B_r(z) \cap \Omega \neq \varnothing$$

$$2.- B_r(z) \cap (C/\Omega) \neq \varnothing$$

Definición 8**:** El conjunto de Fatou está dado por $C/J_c(f)$, es decir, es el complemento del conjunto de Julia en C.

Teorema 2**:** El complemento de un conjunto cerrado es abierto.

Este teorema no dice que el conjunto de Fatou es el máximo abierto tal que la órbita de sus puntos converge, por tanto está acotada.

En palabras, Julia y Fatuo observaron que en ciertos casos, según los valores de c, la órbita de los puntos alrededor de origen de un círculo unitario, convergen a un punto fijo de la función f_c, y forman el área de atracción de c, mientras que la órbita de los puntos más alejados del origen tiende al infinito. Cada uno de esos dos tipos de puntos constituye una región, y en medio queda lo que se denomina frontera la cual es infinitamente delgada conocida como conjunto de Julia. En síntesis, los conjuntos de Julia están constituidos por aquellos puntos periódicos de orden $n>1$ tales que su órbita está acotada, y por ser la frontera del área de atracción es un conjunto cerrado, lo cual implica que un conjunto de Julia es un conjunto compacto. Los conjuntos de Julia poseen una estructura fractal, que con la ayuda de las computadoras se han hecho visibles. Además, Julia y Fatou probaron que los conjuntos de Julia asociados a las transformaciones f_c, para cualquier número complejo c, pueden ser de dos tipos: conexos o no conexos.

Revista ECORFAN,Vol.1,núm.2,2010,pp.93-110

Acotación 9: Sea $\Omega \neq \varnothing$, Ω es conexo si y solo si existen dos conjuntos abiertos A y B tal que:

$$1.-\Omega \subset (A \cup B)$$

$$2.-A \cap \Omega \neq \varnothing \text{ ó } B \cap \Omega \neq \varnothing$$

$$3.-(A \cap \Omega) \cap (B \cap \Omega) = \varnothing$$

Un resultado probado por Julia, en el que afirma que el conjunto de Julia asociado a f_c es conexo, según la órbita del punto fijo $z_0 = 0$, con un valor c arbitrario no diverja o bien, es no conexo sí lo hace. Esta divergencia recae totalmente en la norma de la constante compleja c, como especificaremos más adelante.

Mandelbrot representó gráficamente el trabajo matemático de Julia y Fatou; y se concentró específicamente en un subconjunto de los conjuntos de Julia, los conjuntos de Julia conexos (Ver figura 4).

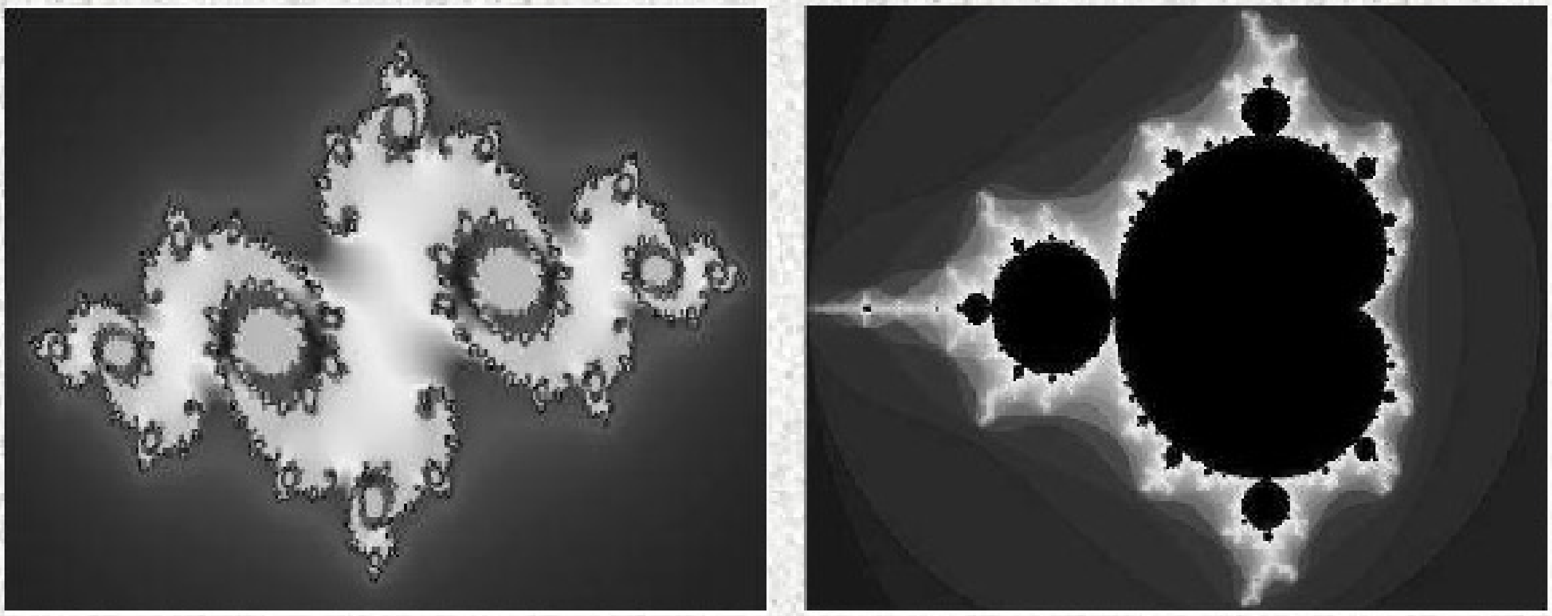

Figura 4[34]: Ejemplos de conjuntos de Julia no conexos (arriba), conjunto de Julia conexo (abajo)

[34] Almanza R. Germán. *"El conjunto de Mandelbrot: Introducción a Dinámica holomorfa"*. IIT de la UACJ. Agosto, 2007.

4. Modelos Fractales es en el Mercado Financiero

Los fenómenos del Mercado Financiero son de naturaleza compleja y dinámica, pues las variables que los comprenden presentan un comportamiento de autosimilitud, movimientos brownianos, no linealidad, invarianza de escala, etc., por lo que es preciso estudiarlos bajo la teoría de la complejidad; por ejemplo, las estadísticas del mercado financiero poseen un comportamiento similar a los fractales (auto-semejanza y similitud). La dinámica compleja del mercado es caracterizada por fluctuaciones anómalas colectivas que mantienen presente los recuerdos de los fenómenos críticos, por ejemplo, las fluctuaciones de los índices no siguen meramente un proceso aleatorio y la volatilidad de la rentabilidad se ajusta a auto-correlaciones a largo plazo, entonces podemos decir que el mercado financiero no es un sistema totalmente determinístico ni totalmente estocástico sino una combinación de ambos, es decir, no puede ser descrito por una serie de ecuaciones sencillas ni tampoco mediante la teoría de incrementos independientes, ni de distribuciones idénticas para diferentes intervalos de tiempo, por tanto, es preciso crear técnicas de análisis diferentes a las tradicionales, pues muchas de éstas suponen linealidad, estacionalidad, relaciones causa-efecto, entre otras, lo cual los convierte en modelos restrictivos que rinden predicciones no fieles y/o imprecisas, entonces es conveniente crear nuevos modelos que se ajusten a la realidad de los datos financieros; siguiendo éste argumento, Mandelbrot hizo énfasis en la descripción del comportamiento de las series financieras, argumentando los cuatro puntos siguientes:

1. Los cambios pronunciados en los precios de cierto activo son mucho más frecuentes que los predichos por el modelo de Gauss, reflejando un carácter leptocúrtico en los precios, esto es, la probabilidad de eventos asociados a las colas de la distribución, es más elevada que lo que se supone en teoría.

2. Grandes cambios instantáneos en los precios se producen muy a menudo, y dan la impresión de que deben ser explicados causalmente ya que no se atienen a una predicción estocástica.

3. Las series de tiempo financieras no parecen estacionarias, y la varianza difiere en distintos periodos de tiempo.
4. Los cambios en los precios no son independientes, mostrando diversidad de patrones que suministran cierta basa al análisis técnico.

Bajo estos cuatro puntos, Mandelbrot acopló la teoría fractal sobre las series de tiempo de rendimientos accionarios (precios de activos, índices financieros, etc.), puesto que cualquier serie de tiempo puede ser generada por un proceso estocástico y se considera al conjunto de información observada, como una realización particular del proceso estocástico subyacente.

La Hipótesis de Fractalidad (HF) de una serie financiera implica auto-semejanza; en caso de aceptación (HF cierta) se dice que los ciclos económicos tienen memoria a largo plazo y ésta es mucho mayor a lo que detectan los modelos autorregresivos, en los cuales el proceso al tiempo h depende de sus propios valores observados en periodos anteriores.

- **Análisis R/S**
  El análisis del rango reescalado o análisis R/S es un método estadístico usado para evaluar la ocurrencia de eventos poco comunes por lo que sirve para describir los choques y colapsos financieros. La aplicación del análisis R/S no tiene que limitarse sólo a eventos raros, sino que puede ser aplicado a cualquier serie de tiempo.

  El resultado que proporciona el análisis R/S es el coeficiente de Hurst (también nombrado exponente fractal), denotado por H, el cual es un indicador para determinar sí una serie de tiempo tiene comportamiento fractal y, mide la intensidad de dependencia a largo plazo de una serie de tiempo.

Los valores de H se encuentran entre 0 y 1, para los cuales:

1. $0 < H < .5 :=$ Existe una correlación negativa en los incrementos al tiempo t

2. $H = .5$ es el movimiento Browniano, en el que los incrementos son independientes y por tanto, de correlación cero.

3. $.5 < H < 1 :=$ Existe una correlación positiva entre los incrementos, es decir, si la gráfica de X_t crece para un tiempo t, entonces tiende a continuar creciendo para $t' > t$.

Cabe mencionar que existen softwares[35] que siguiendo diferentes métodos calculan el coeficiente de Hurst para cualquier serie de tiempo, con solo introducir los datos. En una serie de tiempo con estructura fractal es de esperarse que los coeficientes de Hurst calculados por diversos métodos[36] sean parecidos.

[35] El coeficiente de Hurst, puede ser calculado mediante el Programa H, implementado en lenguaje pascal, puede ser descargado de la siguiente dirección electrónica:
http://www.bi.upv.es/~algarsal/hurst/hurst.zip; Otros softwares que tienen como utilería su cálculo, son Visual Chart, C++, entre otros.

[36] Los modelos mayormente usados para calcular el coeficiente de Hurst son: Crecimiento del Rango, Crecimiento del momento de orden dos y Momento de orden dos local.

Otro de los campos de estudio de Mandelbrot, fue la relación entre su teoría fractal y la Teoría del Caos, la cual es aplicada en circunstancias donde los procesos son aleatorios y los sistemas son dinámicos, es por esto que en la economía y en los mercados financieros es ampliamente utilizada. Una vez descubiertas las graficas de los conjuntos de Mandelbrot, se pudo visualizar el papel de los fractales dentro de la teoría caótica, ya que ambos son sistemas iterativos y dinámicos; podemos decir que, un fractal implica caos sin embargo un sistema coitico no necesariamente forma figuras fractales, de hecho los fractales parecen como el atractor extraño en los sistemas caóticos. De manera general, la Teoría del Caos estudia los sistemas dinámicos complejos, en un marco de relaciones no lineales y presentando sensibilidad a las condiciones iniciales sin existir divergencia.

Los sistemas caóticos son caracterizados por:

- Son sistemas no-lineales: es una condición necesaria que las relaciones que gobiernan el sistema sean no lineales, de lo contrario es imposible generar dinámicas endógenas aperiódicas.

- Son sistemas perturbables: dada la inducción de una perturbación, el sistema reacciona cambiando su trayectoria y evolucionando en forma distinta a su estado original, es decir el estado previo a la perturbación.
- Presentan sensibilidad a las condiciones iníciales: Dado un cambio infinitesimal en los valores de los parámetros iniciales, la evolución del sistema diverge radicalmente respecto a su estado original. Además, la divergencia es tan grande que imposibilita predecir el estado final del sistema.

- Presentan dinámica atractora: si bien el sistema evoluciona en forma totalmente irregular e impredecible, el mismo no diverge, entonces a largo plazo su evolución queda acotada dentro de un sub-espacio determinado.

La teoría del caos permite estudiar sistemas inestables, con alta volatilidad, divergencias en su evolución, cambios abruptos y ciclos no periódicos. Por ello, su principal ámbito de aplicación en la ciencia económica han sido los mercados bursátiles.

5. CONSIDERACIONES FINALES.

La idea es aceptar la incertidumbre como componente ineludible y decisiva de los mercados financieros, por tanto aprender a coexistir con ella es la necesidad básica a cubrir en los modelos financieros, en lugar de minimizarla o ignorarla como lo hacen los modelos tradicionales. La incógnita es "qué hacer", o "qué investigar" en un sistema caótico, así profundizar en el estudio de la Teoría del Caos y los fractales de Mandelbrot es una prioridad; entonces la investigación se debe centrar en el estudio de la incertidumbre que rodea a los fenómenos económicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMANZA R. GERMÁN. *"El conjunto de Mandelbrot: Introducción a Dinámica holomorfa". IIT de la UACJ. Agosto, 2007.*
- CASPARRI M. TERESA; GARNICA HERVAS J.R; THOMASZ E.O. *Turbulencia, Linealidad y Caos*. Universidad de Buenos Aires, 2010.
- CASPARRI M. TERESA; MORENO ALEJANDRO. *Geometría Fractal y Mercados Financieros*. Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y la Gestión.
- DOLDÁN R. FÉLIX. *La hipótesis fractal como marco para la investigación de los mercados financieros. Aplicación del análisis R/S al caso español*. Universidad de la Coruña.
- FLORES C. HECTOR. *Introducción a los Fractales (Construcción del conjunto de Julia)*. UPEA. Abril, 2005
- GÁLVEZ M. ERNESTO T. Tesis *"Análisis Fractal del Mercado de Valores de México (1978-2004)"*. IPN, Escuela Superior de Comercio y Administración. México D.F, 2005.
- K. FALCONER: *"Fractal Geomtry: Mathematical Foundations and Applications"*, 1990.
- LÓPEZ G. ARTEMIO. *Variable Compleja*. Madrid, 2003.
- PALOMAS M. EDGAR. Evidencia *e Implicaciones del Fenómeno Hurst en el Mercado de Capitales*. Gaceta de Economía, Año 8, Num. 15.
- PAREDES, B. CARLOS. Tesis *"Aplicación de la geometría fractal en ciencias de la Tierra"*. ETSIM. Departamento de Matemática Aplicada y Métodos Informativos, 1995.
- RAMOS ESCAMILLA MARIA. Dinámica Económica Actual. Editorial.ECORFAN.2010
- SACERDOTI JUAN. *Análisis de funciones de Variable Compleja*. Facultad de Ingeniería, Departamento de Matemática, Universidad de Buenos Aires. 2005
- SORIA B. KARLA, ZUÑIGA J. SERGIO. ALGUNAS. *Estimaciones del Coeficiente de Hurst para el IGPA Chileno.*