REDIMAT
Revista de Investigación en Didáctica de las Matemáticas
Hipatia Press
www.hipatiapress.com

Uso de artefactos concretos en actividades de geometría analítica: una experiencia con la elipse

José Carlos Cortés Zavala & Héctor Arturo Soto Rodríguez[1]

1) Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia. México.

Date of publication: June 24th, 2012

To cite this article: Cortés, J.C.; Soto Rodríguez, H.A. (2012). Uso de Artefactos Concretos en Actividades de Geometría Analítica: Una Experiencia con la Elipse. *Journal of Research in Mathematics Education, 1*(2), 159-193. doi: 10.4471/redimat.2012.09

To link this article: http://dx.doi.org/10.4471/redimat.2012.09

REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education Vol. 1 No. 2 June 2012 pp. 159-193

The Use of Concrete Artifacts in Analytic Geometry: the Ellipse Experience

José Carlos Cortés Zavala & Héctor Arturo Soto Rodríguez
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Abstract

The purpose of this article is to provide the results of a research on the use of specific artefacts (two different ellipsographs) for the learning of Mathematics, specifically in Analytic Geometry on the topic of Ellipse. It was implemented one activity for each one of the artefact, by means of the use of working sheets that guided the students for tem to build the formal concept of Ellipse, answering to the corresponding questions in each activity as well as manipulating the ellipsograph. All with the aim to facilitate to the students the understanding and learning of the mathematic concepts.

Keywords: analytic geometry, ellipsograph, collaborative learning

2012 Hipatia Press
ISSN 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2012.09

REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education Vol. 1 No. 2 June 2012 pp. 159-193.

Uso de Artefactos Concretos en Actividades de Geometría Analítica: Una experiencia Con la Elipse

José Carlos Cortés Zavala & Héctor Arturo Soto Rodríguez
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo

Abstract

El propósito de éste articulo, es dar a conocer los resultados de una investigación relacionada con el uso de artefactos concretos (dos elipsógrafos distintos) para el aprendizaje de las Matemáticas, específicamente en Geometría Analítica con el tema de Elipse. Se implementaron una actividad por cada uno de los artefactos, a través del uso de hojas de trabajo las cuales guían a los estudiantes para que ellos puedan construir el concepto formal de Elipse, respondiendo las preguntas correspondientes en cada actividad así como manipulando el elipsógrafo en cuestión. Lo anterior con el objetivo de facilitar la comprensión y el aprendizaje de conceptos matemáticos por parte de los alumnos.

Keywords: geometría analítica, elipsógrafos, aprendizaje colaborativo.

2012 Hipatia Press
ISSN 2014-3621
DOI: 10.4471/redimat.2012.09

En el siglo XVII el concepto de Geometría Analítica poseía un significado diferente a nuestra noción moderna. La principal diferencia radica en que antes las ecuaciones no representaban curvas, sino que las curvas daban origen a una ecuación y en la actualidad la curva es dada a partir de un análisis de propiedades algebraicas.

Durante mucho tiempo se han creado una infinidad de artefactos físicos con la finalidad de trazar algunas de las cónicas, se les han llamado, Parabológrafos (trazan parábolas), Elipsógrafos (trazan elipses) e Hiperbológrafos (trazado de hipérbolas). Revisando el libro de Dyck (1994) encontramos artefactos articulados para el dibujo de curvas desde la antigua Grecia. Meneachmus (~380 - ~320 A.C.) tenía un dispositivo mecánico para construir cónicas; Proclus (418-485) también menciona a Isidoro de Mileto quien tenía un instrumento para trazar una parábola (Dyck, 1994, p.58). Leonardo Da Vinci (1452-1519) inventó un elipsógrafo con un movimiento invertido de la conexión fija. Los dispositivos mecánicos para dibujar curvas fueron utilizados también por Albrecht Dűrer (1471-1528). René Descartes (1596-1650) publicó su Geometría (1637) libro en el cual daba métodos geométricos para dibujar cada curva con algunos aparatos, y estos aparatos eran a menudo articulados. En el año de 1657, Van Schooten publicó su "Exercitationum mathematicarum libri quinque". Como el título sugiere, la obra se divide en cinco "libros" de un centenar de páginas cada uno. El libro I es una revisión bastante estándar de la aritmética y la geometría ordinaria. El libro II contiene construcciones con regla. En el Libro III, van Schooten trata de reconstruir algunas de las obras de Apolonio en lugares geométricos. Este fue un importante tema de investigación de la época. El libro IV contiene la obra más conocida de Van Schooten. Su título es " Orgánica conicarum sectionum ", o "Los instrumentos de las secciones cónicas." La palabra "orgánica" está más estrechamente relacionada con el órgano como instrumento musical que a la "orgánica" a veces encontramos en la química o la agricultura. Como sugiere el título, el capítulo describe una variedad de bellos artefactos para la elaboración de las diferentes secciones cónicas. En 1877 A. B. Kempe publicó un pequeño libro: Cómo dibujar una línea recta: Una conferencia sobre artefactos articulados. Mencionó a J. Watt (1736-1819) y también el trabajo de J.J. Sylvester (1814-1897), Richard Roberts (1789-1864), P.L. Chebyshev

(1821-1894), Harry Hart (1848-1920), William Kingdon Clifford (1845-1879), Jules Antoine Lissajous (1822-1880), Samuel Roberts (1827 - 1913), y Arthur Cayley (1821-1895)[1].

Por otro lado, Franz Reuleaux (1829-1905), quién a menudo es llamado "el padre del diseño de las máquinas modernas", tenía muchos mecanismos de líneas rectas en su colección del modelo cinemático. La Universidad Cornell tiene una colección con cerca de 220 modelos cinemáticos distintos de F. Reuleaux y 39 de ellos son mecanismos sobre el movimiento rectilíneo[2].

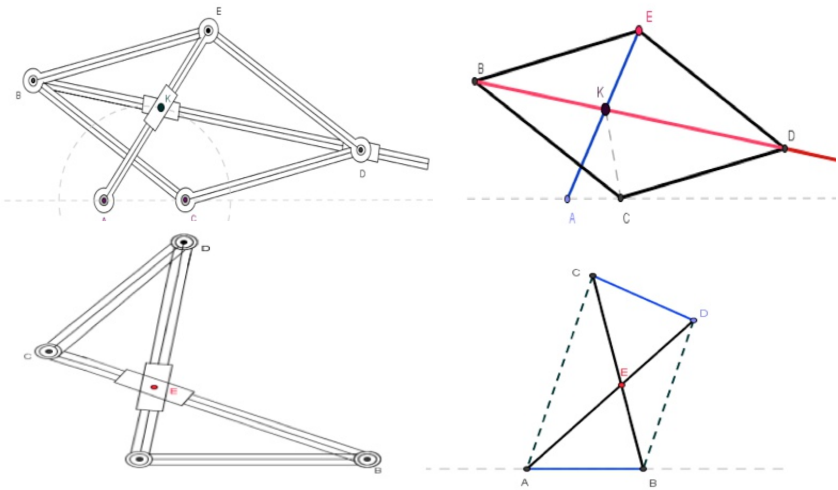
Finalmente, también tenemos el caso de Iván Ivánovich Artobolevski, (1905 – 1977). Fue un ingeniero mecánico, y científico ruso en el campo de la Teoría de Mecanismos y Máquinas. Fue miembro de la Academia de Ciencias de la Unión Soviética desde 1946. Artobolevski propuso una clasificación de los mecanismos espaciales y desarrolló métodos para su análisis estrucural, cinemático y cinetostático. Recopiló en "Les mécanismes dans la technique moderne" (Artobolevski, 1975) varios artefactos mecánicos cuya finalidad era trazar alguna cónica.

Marco conceptual

Resultados recientes de investigación constatan la importancia del uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas y las ciencias, y en la incorporación al trabajo científico por parte de los estudiantes. En sesiones de trabajo dirigido, los alumnos son capaces de desplegar recursos matemáticos que se desencadenan por medio de la comprensión de nociones (Hoyos, Capponi y Génèves, 1998), o se promueve la creatividad y el ingenio en el diseño científico mediante el uso de nuevas tecnologías (Verillon y Rabardel, 1995; Jörgensen, 1999). Por otro lado, perspectivas teóricas y prácticas alternativas complementarias en didáctica de las matemáticas (Mariotti et al 1997; Bartolini et al 2003, 2004; Bartolini 2007, Boero et al., 1996, 1997; Arzarello, Robutti 2004, Jill et al 2002), argumentan a favor de la introducción en el salón de clases de contextos históricos de recreación de la experiencia científica, en particular aquéllos que tienen que ver con la práctica de la geometría y que utilizan modelos mecánicos o articulados de máquinas para dibujar o trazar, como un medio de generación de ideas o nociones matemáticas complejas. Por otro lado, como menciona Duval la articulación de registros semióticos de representación, en este caso el gráfico y el algebraico, deben ser necesarios para la aprehensión conceptual (Duval 1995).

El trabajo de investigación realizado tuvo como propósito experimentar actividades que puedan servir como recurso didáctico, para acercar a los estudiantes de bachillerato hacia la demostración y construcción de conceptos en geometría Analítica, específicamente el de Elipse, utilizando dos elipsógrafos los cuales son el Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards y el Antiparalelogramo articulado de Van Schooten.

En las figuras siguientes se presentan los 2 elipsógrafos: el Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards y el Antiparalelogramo articulado de Van Schooten, los cuales fueron realizados con acrílico (modelo físico) y construidos también con Geogebra (modelo virtual).



Figuras 1 y 2 . **Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards construcción física y construcción virtual.** *Figura 3 y 4.* **Antiparalelogramo articulado de Van Schooten construcción física y construcción virtual.**

Para cada uno de los modelos desarrollados, tanto el físico como el virtual, se diseñó una hoja de trabajo que servía de guía para encontrar el modelo matemático inmerso. Es decir a través de la manipulación guiada de los artefactos se espera que el estudiante descubra el modelo matemático inmerso en el artefacto, esto permitirá la reversibilidad del conocimiento (Piaget, 1950).

Metodología

La investigación se llevó a cabo en un ambiente de trabajo colaborativo, que incentiva la cooperación entre individuos para conocer, compartir y ampliar la información que cada uno tiene sobre el tema. Es de carácter cualitativo, es decir las conclusiones y comentarios que se desprenden del análisis de datos obtenidos, no son producto de las relaciones numéricas que se puedan obtener de las hojas de trabajo aplicadas, sino emergen del análisis de las cualidades asociadas tanto a las preguntas de las hojas de trabajo, como a los comportamientos de los estudiantes en cada una de ellas.

En cada uno de los Elipsógrafos seleccionados se analizaron sus características para así realizar las hojas de trabajo y definir lo que se esperaba lograr con ellos. Las hojas de trabajo con las respuestas de los estudiantes, las videograbaciones realizadas durante el trabajo de cada uno de los equipos, así como las observaciones en el trabajo de campo, conforman el cuerpo de datos para llevar a cabo el estudio.

Nos proponemos observar el potencial que tiene los Elipsógrafos para promover el aprendizaje en el salón de clases. Por ello, el proceso para la implementación de los Elipsógrafos consta de seis etapas:

(1) Selección de artefactos
(2) Descripción y Demostración matemática de los artefactos
(3) Construcción de los artefactos
(4) Realización de actividades didácticas
(5) Etapa de Aplicación
(6) Análisis de los datos

Resultados del cuestionario por ítems

Se revisó la obra de Iván Ivanovich Artobolevski "Les mécanismes dans la technique moderne" (Artobolevski, 1975), la cual es un compendio de varios artefactos que trazan diferentes cónicas. Después se prosiguió a seleccionar cuáles de ellos eran factibles para poderse construir, puesto que había artefactos interesantes, pero físicamente complicados de realizar. De esta manera, los artefactos seleccionados fueron el Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards y el Antiparalelogramo articulado de Van Schooten.

Descripción y demostración matemática de los artefactos

Elipsógrafo de palancas de Inwards:

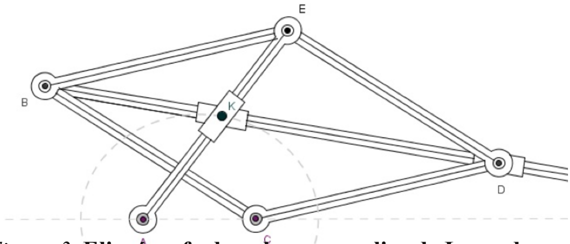


Figura 3. **Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards**

Las longitudes de los segmentos del artefacto satisfacen que EB = BC = CD = DE, es decir, la figura EBCD es un rombo. Los puntos A y C se mantienen fijos (focos). El segmento BD es la diagonal del rombo. El punto K es la intersección entre la corredera 2 y 3. Cuando el segmento AE gira alrededor del punto fijo A, el punto k describe una elipse.

Existe una condición para que dicho artefacto pueda describir una elipse. La condición es que 1/2 AE > AO (AO = OC) es decir, que la distancia entre los focos sea menor que el segmento AE.

Por construcción sabemos que:

BC = CD = DE =EB.

Ahora tracemos el segmento KC:

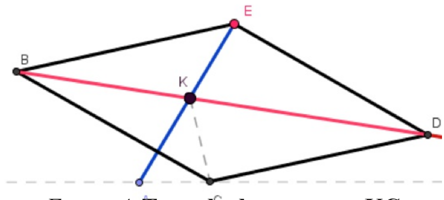


Figura 4. **Trazado de segmento KC**

Los triángulos KDE y KDC son congruentes por LAL por tener:

(a) DE = DC (por construcción)
(b) KD lado común
(c) Ángulo KDE = Ángulo KDC puesto que BD es diagonal

De la congruencia anterior podemos deducir que:

$$KC = KE$$

Observemos que:

$$AE = AK + KE$$

$$AE = AK + KC \qquad \text{(por ser } KE \cong KC\text{)}$$

Pero AE es constante

$$\longrightarrow AK + KC = \text{constante}$$

∴ Se cumple la condición para que el punto K describa una elipse según su definición.

Antiparalelogramo articulado de van Schooten:

La base de este artefacto es el Antiparalelogramo ABCD. Cabe mencionarse que: AB = CD y AD = BC. Se dice que es Antiparalelogramo, puesto que en el movimiento, el artefacto sigue manteniendo la propiedad de no tener dos pares de lados paralelos. Los puntos fijos (focos), son los puntos A y B. Con la intersección de la corredera 1 y 2 obtenemos el punto E. Al mover el artefacto, el punto E tiene desplazamiento por los segmentos AD y BC, describiendo durante el movimiento una elipse.

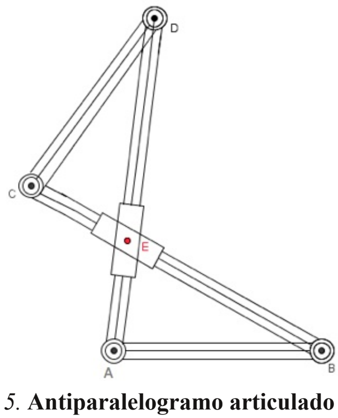


Figura 5. **Antiparalelogramo articulado de van Schooten**

Por construcción conocemos que:

$$AB = CD$$

$$AD = BC$$

Ahora tracemos los segmentos CA y DB:

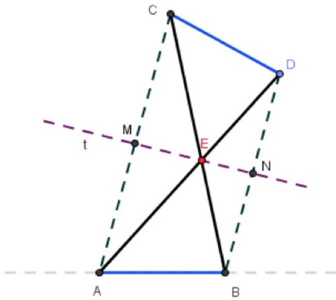


Figura 6. **Trazo de los segmentos CA y DB**

Ahora tracemos el eje de simetría al cual llamaremos t: Sea M el punto de la intersección de t con CA y N el punto de la intersección entre t y BD:

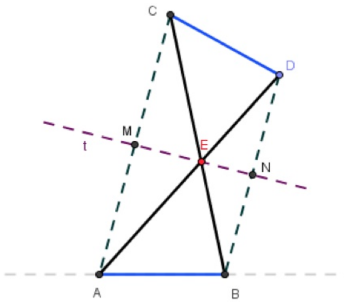


Figura 7. **Trazo de los segmentos M y N**

Nótese que el trazo del eje de simetría tiene algunas implicaciones interesantes en nuestra figura como son las siguientes:

(a) t es perpendicular a BD y AC y los corta en su punto medio (mediatriz).
(b) t bisecta a los ángulos DEB y CEA.

Ahora tenemos todo lo necesario para afirmar que ΔBEN es congruente con ΔDEN por el criterio LAL:

(a) Tienen a EN como lado común.
(b) Angulo BNE = Angulo DNE (porque el eje de simetría es perpendicular a BD formando ángulos rectos).
(c) BN = ND (puesto que t bisecta a BD por ser eje de simetría).

∴ $\Delta BEN \cong \Delta DEN$

También ΔMEA es congruente con ΔMEC:

(a) EM lado común.
(b) Angulo CME = Angulo AME (porque el eje de simetría es perpendicular a BD formando ángulos rectos).
(c) CM = MA (puesto que t bisecta a AC por ser eje de simetría).

∴ $\Delta MEA \cong \Delta MEC$

De las dos congruencias anteriores obtenemos que el ΔAEB es congruente con ΔCED por el criterio LLL (ya que de las congruencias anteriores deducimos que $EB \cong ED$ y $EA \cong EC$ además de que por construcción conocíamos que $AB \cong CD$).

De allí vemos que:

$$AE + EB = AE + ED = AD = \text{cte.}$$

∴ Se cumple la condición para que el punto E describa una elipse según su definición.

Construcción física de los artefactos

Se trató de adecuar las medidas para cada uno de los artefactos con el fin de que no fueran muy grandes y que funcionaran adecuadamente de acuerdo a sus propiedades. En esta etapa se realizaron varios bosquejos utilizando diferentes materiales.

Los primeros prototipos se construyeron en papel ilustración, el cual es utilizado para elaborar maquetas. Se cortaban las barras correspondientes y después se perforaban en los extremos para por allí unirlas mediante postes metálicos y obtener el artefacto deseado. Este material nos proporcionaba una idea de lo que se podría lograr sin embargo sufrí demasiadas deformaciones durante la manipulación. Después de éste se trabajó con tireno, el cual nos brindaba un mejor prototipo. Se decidió que los artefactos tuvieran menor deformación durante el movimiento por lo que se volvieron a construir en tireno de mayor calibre. Una vez obtenido un prototipo de calidad, se decidió mejorar el material de construcción. Fue difícil encontrar a una persona que los realizara en metal, una vez que se logró lo anterior, surgieron distintos problemas al trabajar los distintos metales, por lo que los artefactos quedaban muy bromosos y pesados.

Después del fracaso en metal, se optó por llevarlos a cabo en Acrílico, obteniendo de esta manera los artefactos que se probaron ante estudiantes de bachillerato.

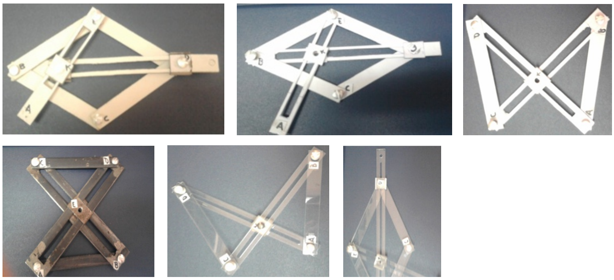


Figura 8. **Elipsógrafos en diferentes materiales**

Realización de actividades didácticas

Se comenzó tomando en cuenta las características de cada artefacto así como su demostración matemática. A partir de allí se decidió que dichas actividades deberían de consistir en una serie de preguntas que invitaran a los estudiantes a manipular cada artefacto, que conocieran cada parte que los conforma, que observaran las figuras que se formaban entre sus barras así como las longitudes de las mismas, también que verificaran su comportamiento mientras dicho artefacto tenía movimiento así como en estado inmóvil. Lo que se deseaba era que los alumnos, a partir de esa guía y de la manipulación del artefacto pudieran construir por sí mismos el concepto de elipse, deduciendo el modelo matemático involucrado en cada artefacto. De esta manera se hizo una actividad didáctica por cada artefacto (ver annexos).

Etapa de aplicación

Las actividades didácticas desarrolladas fueron aplicadas primeramente en una prueba piloto dividida en dos sesiones. Auxiliándonos de los estudiantes se pretendía con esta prueba, afinar detalles, cambiar el orden de las preguntas de ser necesario, quitar o agregar alguna de ellas así como mejorar su redacción, etc.

Así finalmente haciendo las modificaciones pertinentes a las hojas de trabajo se hizo la prueba formal, la cual fue dividida en dos sesiones. Se contó con dos cámaras de video grabación en cada una de ellas. Primero se aplicó la actividad del Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards, ésta se llevó a cabo el día jueves 6 de Mayo del 2010, en el CBTIS 149 en Morelia Michoacán, con una duración aproximada de 150 minutos. En esta ocasión se realizó con ocho alumnos del cuarto semestre de la especialidad de Administración, cuatro hombres y cuatro mujeres. Se formaron cuatro equipos de dos integrantes cada uno, formados por un hombre y una mujer.

En la segunda actividad se aplico el Antiparalelogramo articulado de van Schooten, se llevó a cabo el día miércoles 13 de Mayo del 2010, en el mismo lugar donde se realizo la primera sesión con una duración aproximada de 120 minutos y con los equipos conformados en la sesión anterior.

Análisis de los datos

Se digitalizaron las hojas de trabajo de todos los equipos y se analizaron las mismas. Posteriormente se revisaron las notas de observación realizadas durante las actividades así como los videos de las mismas y la información obtenida de ellos se organizó en tablas que contenían columnas para el episodio, tiempo y explicación de los equipos. Esto nos permitió seleccionar los diálogos más importantes y luego rescatarlos para analizarlos más a fondo. Sin embargo, por ser muy extensa la información sólo se muestran algunas de las respuestas más relevantes.

Discusión

A continuación, primero se discuten los resultados obtenidos respecto del uso del elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards, y luego se exponen los resultados obtenidos en el caso del antiparalelogramo articulado de van Schooten.

Resultados de la hoja de trabajo del elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards

Los resultados que se muestran a continuación corresponden a las preguntas 7 y 8, presentando en esta última el razonamiento de dos equipos participantes. En cada diálogo presentado se indica el nombre del equipo participante así como el nombre de sus integrantes. De la misma manera se indica con el nombre de Héctor al profesor investigador.

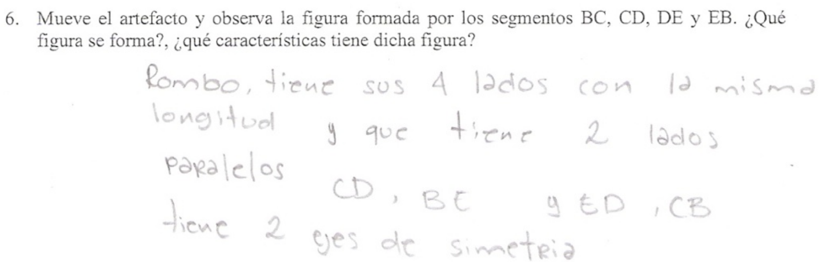
Se espera que los alumnos puedan responder la pregunta 7 en función de alguna de las características obtenidas en la pregunta anterior, el enunciado es: ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta. Observemos lo que el equipo de Gabi y Uriel respondió así como en que se basaron para llegar a ello:

> Participantes: Gabi y Uriel (Gabriela, Uriel) y Héctor. Introducción: Los alumnos tratan de dar la respuesta de la pregunta 7 y la comienzan a escribir en sus hojas de trabajo. Después de eso se les pide que mencionen su respuesta a dicha pregunta. Se les hacen más preguntas al respecto y ellos tratan de responder.
>
> Gabriela: ¿Por qué sería?
> Uriel: Es un eje de simetría.
> Gabriela: Es la diagonal… ¿así nada más?, ¿BD es eje de simetría de CE?
> Uriel: Pues sí, el punto K no cambiaría de distancia entre el EC también.
> Gabriela: No influye, K no influye (señala el punto K), nada más te está preguntando de estos (señala los puntos D y B). Entonces por qué es su eje de simetría… siempre va a ser su eje de simetría.
> Uriel: Pues… sí.
> Héctor: ¿En qué pregunta van?
> Gabriela: En la siete.
> Héctor: ¿En la siete?, a ver ¿qué respondieron? Gabriela: Que si porque EC es el eje de simetría (señala el segmento EC en su artefacto).

Héctor: ¿Por qué?
Gabriela: Este… se supone que nosotros estamos tomando que es un rombo, ¿no?
Uriel: Rombo.
Gabriela: Entonces tiene dos ejes de simetría, lo que viene siendo éste (señala el segmento CE) y viene siendo éste (señala el segmento BE).
Uriel: BD (corrigiendo a Gabriela que señaló BE).
Gabriela: Ajá, éste (señala el BD) y éste (señala el CE). Entonces se supone que aquí, quedaría hacia la mitad si quedáramos en éste (simula con sus manos que dobla el artefacto por CE). Entonces al doblarlo (ahora por BD) automáticamente me esta formando su eje de simetría… y es una figura que siempre lo va a tener allí y aquí (señala el segmento CE).
Héctor: ¿Siempre en distintas posiciones se cumple que la distancia de C al segmento BD y de E a BD es la misma?
Uriel: Sí.
Gabriela: Cuando es un eje en el rombo sí porque sus cuatro lados son iguales.
Héctor: Ok sigan adelante…

Observaciones

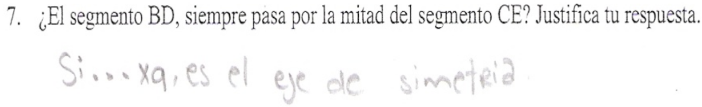
(1) En la pregunta 6, se les pedía que observaran la figura formada por su artefacto cuando este estuviera fijo, que dijeran de qué figura se trataba así como algunas de sus características. Allí se dieron cuenta de que se trataba de un rombo y entre sus características mencionan que el rombo tiene dos ejes de simetría.


6. Mueve el artefacto y observa la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB. ¿Qué figura se forma?, ¿qué características tiene dicha figura?

Rombo, tiene sus 4 lados con la misma longitud y que tiene 2 lados paralelos CD, BC y ED, CB
tiene 2 ejes de simetria

Figura 9. **Respuesta 6 del equipo 3 en sus hojas de trabajo**

(2) Ellos ya se habían dado cuenta de que su rombo tenía dos ejes de simetría y que uno de ellos era el segmento BD y el otro eje lo era el segmento CE, por lo que no tuvieron dificultad alguna para contestar.


7. ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta.

Si... xq, es el eje de simetría.

Figura 10. **Respuesta 7 del equipo 3 en sus hojas de trabajo**

Una buena observación al momento de tratar de responder la pregunta 6 les dio de inmediato la respuesta de la pregunta 7. De antemano ellos conocían que su rombo tenía dos ejes de simetría y de esa manera no dudaron en responder que BD siempre pasa por la mitad del segmento CE.

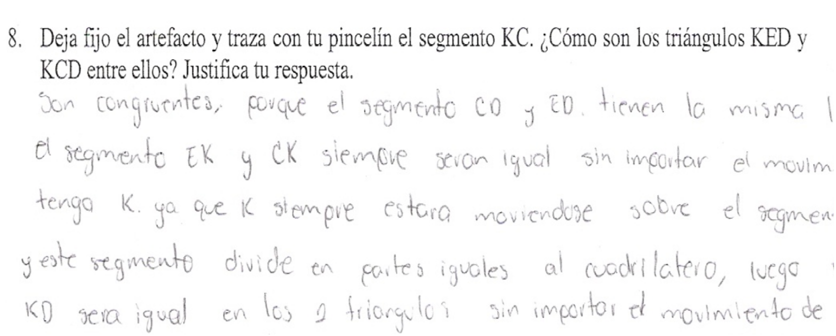
En la pregunta 8 se espera que los estudiantes lleguen a que los triángulos que se les pide que comparen son congruentes y de allí puedan responder sin mucha dificultad las preguntas posteriores. Su enunciado dice lo siguiente: Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta. A continuación se mostrará el diálogo correspondiente a la respuesta mencionada por parte del Equipo 1.

> Participantes: Equipo 1 (Moisés, Ayla) y Héctor.
> Introducción: Los integrantes del Equipo 1 y el profesor investigador tratan de dibujar con ayuda de un pincelín los triángulos KED y KCD (pregunta 8). Después de hacerlo Moisés trata de explicar cómo son dichos triángulos entre ellos, usando la ayuda obtenida por respuestas anteriores y sus observaciones.
>
> Héctor: Ya márcale y después hacemos lo demás, para que vean los triángulos que ya marcaron o algo así, pero bueno, si no se puede (trazar adecuadamente dichos triángulos) pues nada mas obsérvenlos a través del artefacto. Bueno te piden el KCD (triángulo), ¿verdad?
> Ayla: Sí.

Héctor: Tienes que tenerlo fijo (el artefacto) para que no se te quede así (indicándoles como deben fijar el artefacto). ¿Y cuáles son los triángulos que se piden?
Moisés: KED y KCD. Es que si esta recta (señala el segmento BD) siempre está dividiendo al cuadrilátero en dos partes iguales, cualquier punto de aquí (se refiere a cualquier punto que este sobre el segmento BD), pues será la misma distancia de E al punto K y de C al punto K. Entonces sí son distancias iguales, esta distancia (CD) es igual a esta (DE), y la distancia (DK) será igual para los dos.
Héctor: Pero bueno ¿KD qué sería entonces si lo divide en 2 partes iguales (al cuadrilátero)?
Moisés: ¿Cómo?, ¿Qué sería que?
Héctor: ¿Qué es BD por ejemplo? En la pregunta 7 se te pide que justifiques si el segmento BD siempre por la… a ok (muestra Moisés la justificación de la pregunta 7). Entonces ¿por qué son congruentes? (señalando los triángulos en el artefacto).
Moisés: Este lado siempre será igual (señala el segmento KD) porque el segmento BD siempre está dividiendo en dos al cuadrilátero. Entonces si está aquí o aquí (señala el recorrido que hace el punto K) o en el punto que sea siempre va a ser igual en los dos lados, a los dos triángulos. Entonces si se pone por ejemplo aquí, como es a la mitad, pues el segmento EK y KC siempre serán igual, según el movimiento en que se dé, siempre estarán de la misma longitud y el ED y CD miden 12 centímetros, es decir lo mismo.
Héctor: Ah ok.
Moisés: Siempre serán congruentes en cualquier movimiento.
Héctor: Pues anota tu justificación allí y si te hace falta espacio puedes anotarla atrás, sólo pon que la respuesta la anotaste atrás en caso de que no te llegue a caber.

Observaciones

(1) En preguntas anteriores, los alumnos tuvieron la posibilidad de medir los segmentos del artefacto y darse cuenta que algunos de ellos son iguales entre sí.
(2) En otras palabras, Moisés logra darse cuenta de que BD es una diagonal del rombo y que por esa razón siempre va a pasar por la mitad del segmento CE.
(3) Otro aspecto importante es que Moisés logra darse cuenta que no importa el movimiento que se le dé al artefacto ni la posición en que este quede, que siempre va a mantenerse que los segmentos CK y KE van a ser iguales, puesto que los dos segmentos se relacionan con el punto K y si este se mueve afecta de la misma manera a ambos segmentos.
(4) Él justifica que los triángulos KED y KCD son congruentes puesto que CK = CE, CD = ED puesto que los midió y ambos lados miden 12 cm, y que el lado KD va ser el mismo para ambos triángulos, es decir encontró una congruencia LLL.
(5) Se pudo observar que los alumnos conocen el concepto de congruencia pero no lo recuerdan completamente y les cuesta trabajo argumentar el por qué los triángulos mencionados son congruentes.


8. Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.

Son congruentes, porque el segmento CD y ED. tienen la misma l
el segmento EK y CK siempre seran igual sin importar el movim
tengo K. ya que K siempre estara moviendose sobre el segmen
y este segmento divide en partes iguales al cuadrilatero, luego
KD sera igual en los 2 triangulos sin importar el movimiento de

Figura 11. **Respuesta escrita de la pregunta 8 del equipo 1**

Así pues, a través del análisis de estos datos se pone de manifiesto que los integrantes de dicho equipo conocen el término "congruencia" y saben en qué situaciones pueden utilizarlo, así mismo se pudo observar que no pueden recordar los distintos criterios de congruencia, y no obtienen una congruencia distinta a LLL.

Cabe mencionar que en esta actividad, los alumnos cuentan con una regla para medir los segmentos. A partir de la evidencia recabada, se logró deducir que les hizo falta más observación y ver los segmentos involucrados en dicha pregunta para obtener la congruencia solicitada.

Ahora veamos lo que contestó el equipo de Gabi y Uriel en la misma pregunta y comparemos la respuesta entre ambos equipos:

> Participantes: Gabi y Uriel (Gabriela, Uriel) y Héctor.
> Introducción: Los alumnos tratan de responder la pregunta 8, donde Gabriela menciona que los triángulos KED y KCD son congruentes. Ella trata de convencer a su compañero del por qué dichos triángulos son congruentes así como explicárselo también al profesor investigador.
>
> Gabriela: ¿Cómo son los triángulos QED?...pero si de este lado no se hace triángulo (señala los puntos mencionados).
> Uriel: KED (corrigiendo a Gabi la cual dijo QED. Señala también los puntos).
> Gabriela: Y KCD pero jamás me dijo que trazáramos este lado. Bueno se supone que son… ¡espera espera!, ¿cómo se llaman cuando son?... son congruentes. Son dos triángulos congruentes porque has de cuenta que…
> Uriel: No, pero mira este lado está más chico (señalando el lado EK).
> Gabriela: Pero por aquí va la línea esta, esta de aquí que parte de la línea de en medio, es la línea fija (traza el segmento KE). Entonces si marcas esto de aquí (segmento ED).
> <Trazan los triángulos KED y KCD con ayuda de su artefacto y de su pincelín>
> Gabriela: Este lo doblas y quedan iguales (simula doblar los triángulos KED y KCD por BD), entonces los dos triángulos son congruentes.
> Uriel: No, es que no serían congruentes porque si compararámos los triángulos quedarían así (señala que los triángulos no quedarían uno sobre otro).
> Gabriela: Al levantarlos, los dos picos quedarían arriba, quedarían igual (con sus manos indica que dichos puntos

se tocan).
Uriel: Sí pero, ¿qué te están diciendo? (refiriéndose a la pregunta).
Gabriela: Deja fijo el artefacto, ¿cómo son los triángulos KCD y KDE? (etiqueta los triángulos que previamente trazó). En este con este (indica los triángulos a comparar).
Héctor: ¿Por qué me dices que son triángulos congruentes?
Gabriela: No me acuerdo como se dice cuando los dos son iguales, que están opuestos sólo por una diagonal.
Héctor: A ver, ¿este lado cómo es para los dos triángulos, el KD?
Gabriela: El KD es igual.
Héctor: ¿Es igual para los dos?
Gabriela: Sí.
Uriel: Para los dos.
Héctor: ¿Por qué?
Uriel: Porque mide lo mismo.
Héctor: Concéntrense sólo en el segmento KD, ¿qué pasa con KD?
Gabriela: Es la diagonal media.
Héctor: En estos dos triángulos ¿qué pasa con KD (señalo el segmento)?, ¿es igual?
Gabriela: Es un cateto de ambos.
Héctor: ¿Cómo es el lado KC con el KE?
Gabriela: ¿KC con KD?
Uriel: Con KE
Gabriela: Son… ¿cómo se dice?
Héctor: A ver ¿por qué no los mides?
Uriel: Son iguales
Gabriela: Mide 5 (CK), se supone que también mide 5 (KE)…son iguales (mide los segmentos). De CK y KE es igual también (afirmando). Por lo tanto quedaría que de C a D y de D a E …
Uriel: Deben de medir lo mismo.
Gabriela: Miden lo mismo (CD=DE), entonces los dos triángulos son iguales solamente que KD es un eje de

simetría para los dos. Es el eje de simetría de una figura y es por eso que se forman dos triángulos.
Héctor: Por eso son ¿cómo me dijiste?
Gabriela: Congruentes…

Observaciones

(1) Gabriela usa su artefacto para trazar los triángulos KED y KCE. Remarca los lados de los triángulos con su pincelín por debajo del artefacto.

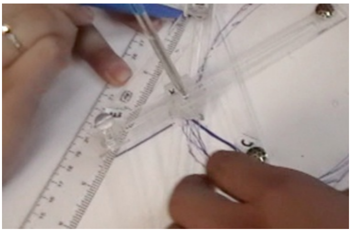


Figura 12. **Integrantes del equipo 3 remarcando los triángulos KED y KCE**

(2) Una vez qué quedan remarcados los lados de sus triángulos opta por quitar su artefacto de la hoja de dibujo. Prefiere trabajar con los triángulos que dibujó previamente, etiquetando los puntos correspondientes con los que tenía el artefacto en dicha posición.

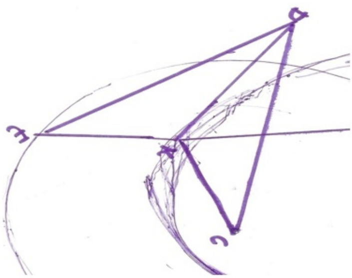


Figura 13. **Triángulos remarcados y etiquetados en la hoja de dibujo del equipo 3**

(3) Los integrantes de este equipo sabían por su respuesta de la pregunta 7 que el segmento BD es un eje de simetría. Tratan de justificar que los triángulos KED y KCD son congruentes porque dicho segmento (BD) los separa y al doblarlos por allí los triángulos van a pegarse el uno con el otro. Al analizar las evidencias recabadas se deduce que intuitivamente trataban de responder de esa manera, al saber que la figura era un rombo, que tenía como ejes de simetría a los segmentos BD y EC y que ED y CD son barras del artefacto que miden lo mismo (esto lo conocieron en la respuesta de la primera pregunta). Además también conocían que el punto K se desplazaba sobre el segmento BD. Su razonamiento tuvo que ver con todo lo anterior y se dieron cuenta de que al medir lo mismo las barras ED y CD y saber que dichos segmentos cambiaban de longitud por estar conectados al punto K, los segmentos EK y CK cambiaban de la misma manera y podían medir lo mismo.
(4) Intuitivamente y por observación pudieron darse cuenta de que los segmentos EK y CK eran iguales, antes de sugerirles que midieran dichos segmentos Uriel respondió inmediatamente que dichos segmentos eran iguales, aún cuando Gabriela media los segmentos, Uriel seguía mencionando que deberían de medir lo mismo.
(5) Les costó mucho trabajo tratar de justificar su respuesta, aún cuando habían contestado bien las preguntas anteriores a esta.

8. Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.

Los triangulos son congru
xq sus lados y angulos son iguales y
KD trabaja como eje de simetria.
DE = DC   KE = KC

Figura 13. **Respuesta escrita del equipo 3 en sus hojas de trabajo**

Así pues, podemos ver que los integrantes de dicho equipo conocen el término “congruencia” y saben en qué situaciones pueden utilizarlo, pero también, a través de la evidencia recabada se observó que no recuerdan los criterios de congruencia distintos al LLL, se deduce que esto ocurre ya que en la actividad los alumnos pueden medir los segmentos con regla.

Resultados del antiparalelogramo articulado de van Schooten

Las primeras preguntas tienen que ver con las figuras que se forman con los segmentos del artefacto así como que segmentos cambian de longitud durante el movimiento y cuales no lo hacen. Analizaremos lo que ocurrió en las preguntas 7, 10 y 14.

El enunciado de la pregunta 7 es: Trace los segmentos AC y BD. ¿Cuál es la figura que se forma con los segmentos AC, BD, AB y CD? Menciona algunas de sus características.

A continuación veremos lo que contestaron Gabriela y Uriel así como las dificultades y aciertos que tuvieron en la pregunta 7.

> Participantes: Gabi y Uriel (Gabriela, Uriel)
> Introducción: En la pregunta 7 los integrantes de este equipo afirmaron que la figura formada por su artefacto fijo era un trapecio. Entonces a partir de ello comienzan a mencionar algunas de sus características y Gabriela las comienza a escribir mientras algunas de ellas son dictadas por Uriel.
>
> Gabriela: Estos dos no son paralelos en sí (señala los segmentos AB y CD).
> Uriel: No, no son paralelos.
> Gabriela: Entonces se forma un trapecio y luego sus características… tiene cuatro lados.
> Uriel: AC y BD son paralelos.
> Gabriela: ¿AC y qué?
> Uriel: AC y BD son paralelos, ¿qué más?
> Gabriela: AB y CD tienen la misma longitud
> Uriel: Pues si quieres (anotarlo).
> Gabriela: ¿Y cuáles son las otras características?...tiene un

eje de simetría aquí, este de aquí (lo señala en su artefacto fijo), si ¿verdad?
Uriel: Uju.
Gabriela: ¿Encuentras otra, otra característica?
Uriel: Que su perímetro siempre será igual aunque cambie a recuadro (se refiere a que si mueve el artefacto su trapecio puede cambiar y ser un cuadrado, esto lo dice mientras observa el movimiento del artefacto). Sí, aunque cambie (ahora observa el artefacto fijo).
Gabriela: Son las únicas características porque aquí ya lo tenemos de una manera inmóvil (el artefacto) y no se te pide que lo vuelvas a mover. Tiene cuatro lados, AC y BD son paralelos, AB y CD tienen la misma longitud y tiene un eje de simetría.

Observaciones

(1) Es muy importante que los alumnos se den cuenta que la figura formada es un trapecio (isósceles) puesto que esto es la base para llegar a la demostración.
(2) Los alumnos mantuvieron fijo el artefacto, mencionaron algunas características y después trazaron los segmentos AC y BD. Después de esto quitaron su artefacto y lo colocaron en otra parte tratando de ponerlo en la misma posición que tenía antes de cambiarlo de lugar. Después de esto continuaron observándolo y mencionando características.

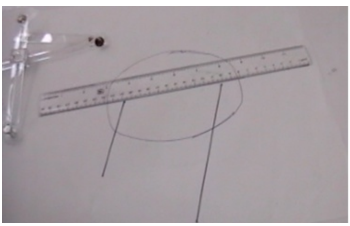


Figura 14. **El equipo 3 trazando su trapecio**

(3) Los integrantes de este equipo mencionan que el trapecio tiene un eje de simetría y Gabriela lo señala en su artefacto. Este hecho es importante, puesto que es fundamental para responder la siguiente

(4) En su respuesta mencionan todas las propiedades del trapecio isósceles aunque no se dan cuenta de ello y sólo nombran a su figura como trapecio.

Ahora deje el artefacto inmóvil de manera que los segmentos AB y CD no sean paralelos y responda lo siguiente:

7. Trace los segmentos AC y BD. ¿Cuál es la figura que se forma con los segmentos AC, BD, AB y CD? Menciona algunas de sus características. Se forma un trap

Tiene 4 lados, AC y BD son paralelos, AB tienen la misma longitud, Tiene un eje de simetria.

Figura 15. **Respuesta 7 del equipo 3 en sus hojas de trabajo**

(5) Fue importante que los estudiantes se dieran cuenta que al mover el artefacto y mantener paralelo el segmento AB con el CD se forma un cuadrado. Cabe mencionar que las indicaciones sugeridas antes de responder la pregunta 7 se hacen con la finalidad de evitar llegar a dicha figura, puesto que de esa forma puede haber confusiones para responder las siguientes preguntas.

Al analizar estos resultados podemos ver que la buena observación, conocimiento y acordarse un poco de sus clases de geometría de los estudiantes, fue clave para darse cuenta de la figura que se formaba en las condiciones pedidas en la pregunta 7, así como para rescatar propiedades del trapecio. Lo más importante fue que lograron darse cuenta de que su trapecio tiene un eje de simetría, ya que de allí podrían responder sin ningún problema la pregunta 8.

Ahora, el siguiente diálogo, mostrará el razonamiento usado por los Sexys para responder la pregunta 10 la cual dice lo siguiente: Compara los triángulos MEA y MEC. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.

> Participantes: Los Sexys (Luz, Jorge) y Héctor.
> Introducción: Los integrantes de este equipo se encuentran justificando la pregunta 10, en donde responden que los triángulos MEA y MEC son congruentes. Tratan de explicar su respuesta.

Jorge: ¿Cuáles son congruentes aquí?
Luz: Por eso, allí te va. Ponle…el segmento AE es congruente (observa con atención el artefacto).
Jorge: ¿Cuál?
Luz: AE es congruente con el segmento CE… y luego el segmento AM es congruente con el segmento CM.
Jorge: Y ambos comparten (lo interrumpe Luz)…
Luz: Ambos triángulos comparten el segmento ME…
Héctor: ¿Cuáles triángulos estás tomando en cuenta para responder la pregunta 10?
Jorge: Éste y éste, estos dos (señala los triángulos MEA y MEC).
Luz: Estos dos (los señala) y aquí nosotros decimos que los triángulos también son congruentes.
Héctor: ¿Sí?, ¿por qué?
Luz: Porque … (Jorge la interrumpe)
Jorge: Porque su lado, su segmento AE y el EC son congruentes, igual que el W, digo el M.
Luz: El MC y el MA tienen la misma longitud.
Jorge: Y comparten el ME (lo señala en su dibujo).
Héctor: ¿Y por qué me dicen que el segmento MC y MA tienen la misma longitud? (señalo dichos segmentos)
Jorge: Pues porque…
Luz: Pues porque…
Jorge: El punto M…(es interrumpido por Luz)
Luz: Está a la mitad del segmento AC.
Héctor: ¿Por qué es la intersección del eje de simetría?
Luz: Sí.
Héctor: Ok. En la siguiente pregunta quiero que se auxilien de estas dos que acaban de responder para tratar de contestarla.

Observaciones

(1) A diferencia del equipo anterior, Jorge y Luz contestaron de una mejor manera la pregunta 9. Respondieron que los triángulos BEN y DEN eran congruentes puesto que todos los lados eran iguales, indicando que lados correspondientes medían lo mismo. De esta manera

lograron darse cuenta de que la respuesta a esta pregunta (pregunta 10) era análoga a la anterior.

9. Llama punto M a la intersección del eje de simetría con el segmento AC y N al punto de la intersección del eje de simetría con el segmento BD. Ahora, compara el triángulo BEN con el triángulo DEN. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.

Son congruente ya que la longitud de sus tres lados son iguales y sus angulos tambi son iguales. $AE \simeq BE$ el BE $BN \simeq DN$ y ambos triangulos comparten el segmento NE

Figura 16. **Respuesta escrita del equipo 4**

(2) Luz le dictaba la respuesta a Jorge para que él la escribiera aunque Jorge también observaba el artefacto y hacía comentarios. Su respuesta quedó muy parecida a la de la pregunta 9.

10. Compara los triángulos MEA y MEC. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.

Son congruentes ya que la longitud de sus tres lados son iguales y sus angulos tambier son iguales. $AE \simeq CE$ y $AM \simeq CM$ y ambos comparten el segmento ME. el segmento AM iguales ya que ~~en~~ es el eje de simetria.

Figura 17. **Respuesta escrita de la pregunta 10 del equipo 4**

En este caso vemos que los integrantes de este equipo demostraron saber lo que es una congruencia, aunque posiblemente no recuerden los distintos criterios. Algo importante fue que se auxiliaron de la medición de segmentos y por esta razón, en esta pregunta y en la anterior respondieron que los triángulos en cuestión eran congruentes por LLL.

Los dos diálogos siguientes muestran la respuesta del equipo denominado Los Sexys a la pregunta 14, la cual es la siguiente: Reflexiona sobre tus respuestas anteriores y escribe con tus palabras que es una Elipse. Aquí los alumnos deben ver las respuestas anteriores y unirlas para construir por sí mismos la definición formal de elipse a partir de la manipulación y observación que los alumnos hicieron del artefacto, así como de la medición de algunos de sus segmentos.

Participantes: Los Sexys (Luz, Jorge)
Introducción: Tratan de dar con sus palabras la definición de elipse (pregunta 14). Ambos aportan buenas ideas y al final Luz dice la posible definición que podrían anotar en sus hojas de trabajo.

Luz: Es una figura… formada por… bueno que tiene dos focos y que tiene… un punto… no sé ¿pues qué?... que la suma de los dos segmentos de…
Jorge: Una elipse es una figura ovalada.
Luz: No.
Jorge: Que tiene dos focos, ¿Cómo no? (le reclama a Luz quien duda acerca de la afirmación de Jorge).
Luz: Bueno síguele.
<Observan el artefacto>
Luz: Pues podemos decir que la suma de los segmentos relacionados con el punto que gira y que forma la elipse siempre es constante (dice eso mientras mueve el artefacto). O sea en cualquier punto que lo muevas la suma de este a este (de A a E) más la de este a este (de E a B) va a ser constante. Eso para mí es elipse.
Jorge: Sí (hace una seña de aceptación).
Luz: Escríbelo tú.

Observaciones

(1) Este equipo también tuvo algunas complicaciones para definir con sus palabras el concepto de elipse.
(2) Identificaron rápidamente los elementos del artefacto que participan en la definición de elipse.
(3) No usaron la nomenclatura del artefacto para escribir su definición de elipse.

En este ejemplo final se puede ver que los alumnos pasan desapercibidos en más de una ocasión lo que sucede cuando mueven el artefacto y no toman en cuenta las respuestas que dieron anteriormente para tratar de ayudarse y dar una definición de elipse a partir de allí.

Conclusiones

El aprendizaje cooperativo es un enfoque de enseñanza, en el cual se procura utilizar actividades en las cuales es necesaria la ayuda entre estudiantes, ya sea en pares o grupos pequeños, dentro de un contexto enseñanza-aprendizaje. El aprendizaje cooperativo se basa en que cada estudiante intenta mejorar su aprendizaje y resultados, pero también el de sus compañeros.

Cabe mencionar que a los alumnos se les dificulta trabajar en equipo puesto que en ocasiones no pueden asimilar las opiniones de sus compañeros. En determinadas partes de las actividades así como en determinados equipos se observaron fragmentos de debate científico.

Para cada uno de los instrumentos, los estudiantes hicieron uso de recursos matemáticos como la utilización de representaciones algebraicas, lenguaje geométrico y transformación del lenguaje cotidiano al lenguaje matemático, como parte fundamental en la construcción del conocimiento.

Trabajar con instrumentos concretos en el aprendizaje es viable ya que, se observó que la mayoría de los estudiantes se motivan trabajando con ellos, es una dinámica muy distinta a la de una clase cotidiana, además el concepto en cuestión es construido por ellos mismos por lo que este puede ser más duradero.

En cuanto a la manipulación del artefacto, al principio les costó trabajo moverlo, lo cual se vio reflejado en sus trazos, los cuales quedaban muy chuecos. Después de realizar varios trazos, los alumnos obtenían práctica y las elipses les comenzaron a quedar bien. Un problema para los alumnos fue que en ocasiones se salían las tachuelas con las que se fijaban los puntos fijos (focos) y esto les perjudicaba en la estética de sus dibujos.

Referencias

Artobolevski, I. (1964). *Mechanisms for the Generation of Plane Curves.* New York: Pergamon Press.

Artobolevski, I. (1975). *Mecanismos en la técnica moderna*. Tomo 2, parte 1. Moscú: Ed. Mir.

Arzarello, E. & Robutti, O. (2004). Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics, 57*(3). Special issue.

Bartolini, M. et al. (2004, July). *Learning Mathematics with tools*. Paper presented at the 10th International Congress on Mathematical Education (ICME-10), Copenhagen, Denmark.

Bartolini, M. (2007) *Experimental mathematics and the teaching and learning of proof*. Research funded within the PRIN 2005019721 on "Meanings, conjectures, proofs: from basic research in mathematics education to curricular implications.

Bartolini, M. et al. (2004, September). *The MMLAB: a laboratory of geometrical instruments.* Paper presented at the minisimposio Applicazioni della Matematica all'industria culturale, Venezia, Italy.

Boero, P., Garuti, R. & Mariotti, M. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of PME-XX, Vol. 2* (pp. 121-128). Valencia.

Boero, P., Pedemonte, B. & Robotti, E.: (1997). Approaching Theoretical Knowledge Through Voices and Echoes: a Vygotskian Perspective. En E. Pehkonen (1997, Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 81-88). Lahti Research and Training Center. Finland: University of Helsinki.

Dennis, D. (1995). *Historical Perspectives for the Reform of Mathematics Curriculum: Geometric Curve Drawing Devices and Their Role in the Transition to an Algebraic Description of Functions*. Unpublished doctoral dissertation, Cornell University.

Duval, R. (1995). *Semiosis et Penseé Humain*. New York: Peter Lang.

Dyck, W. (1994). *Katalog matematischer und matematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente*. New York: Georg Olms Verlag, Zurich.

Hoyos, V. (2006). Funciones Complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. *Enseñanza de las ciencias, 24*(1), 31–42.

Hoyos, V. & Falconi, M. (2005). *Instrumentos y matemáticas: historia, fundamentos y perspectivas educativas*. México: Ed. UNAM.

Hoyos, V., Capponi, B. & Génevès, B. (1998). Simulation of drawing machines on Cabri-II and its dual algebraic symbolization. En Inge Schwank (Ed.), *Proceedings of CERME1*, Alemania: Universidad de Osnabrueck.

Kempe, A. B. (1877). How to Draw a Straight Line. London, England: Macmillan and Co.

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition. E. Pehkonen (1997, Ed.) *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 180-195). Lahti Research and Training Center. Finland: University of Helsinki.

Piaget, J. (1950). *Introducción a la Epistemología Genética. "El pensamiento matemático"*. Buenos Aires: Paidós.

Schooten, F. van (1657). *Exercitationum mathematicarum liber IV, sive de organica conicarum sectionum in plano descriptione*. Lugd. Batav ex officina J. Elsevirii.

Verillon, P. & Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77-101.

Vincent, J., Chick, H., & McCrae, B. (2002). Mechanical linkages as bridges to deductive reasoning: A comparison of two environments. In A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4* (pp. 313 – 320). Norwich, UK: PME.

Notas

[1] Más sobre esto ver en [Kempe].
[2] Vea [Denis, D (1995)].

Annexos

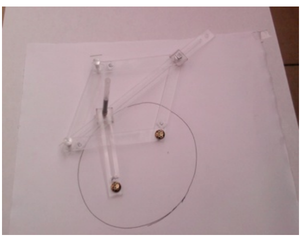
Hoja de trabajo para la manipulación del elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards

Nombres de los integrantes del equipo:
Nombre del equipo:
Grado: Institución:

Instrucciones:

1) Se te proporcionará un artefacto, un lápiz, un pincelín y una regla.
2) El punto K es el punto de la intersección de los segmentos AE y BD.
3) Coloca el lápiz en el punto K, puesto que este es el punto que realiza el trazo.
4) Podrás mover el artefacto mediante el punto E o bien mediante el lápiz que se inserta en el punto K. Analiza con mucha atención el lugar geométrico trazado por el punto K, así como el movimiento en general del artefacto.
5) Puedes medir la longitud de los segmentos con la regla para contestar algunas de las preguntas que se te piden.
6) Responde las preguntas planteadas lo más detallado posible, haciendo uso de la manipulación del artefacto.
7) Al hacer referencia a un segmento, escríbelo de la siguiente forma. AB (

)



Elipsógrafo de palancas y colisa de Inwards

1. ¿De cuántas barras está conformado el artefacto? Escribe la longitud de cada una de ellas, nombrando a cada barra con los puntos de cada uno de sus extremos (por ejemplo barra AE).
2. Mueve el artefacto y observa sus diferentes puntos durante el movimiento. Cuando moviste el artefacto, ¿Cuáles fueron los puntos que se mantuvieron fijos?
3. Al mover el artefacto ¿Cuáles son los segmentos que no cambian de longitud durante el movimiento?
4. Mueve el artefacto y observa sus segmentos. ¿Cuáles fueron los segmentos que cambiaron su longitud durante el movimiento?
5. De los segmentos que cambiaron de longitud durante el movimiento, ¿Cuáles tienen la misma longitud entre ellos?
6. Mueve el artefacto y observa la figura formada por los segmentos BC, CD, DE y EB. ¿Qué figura se forma?, ¿qué características tiene dicha figura?
7. ¿El segmento BD, siempre pasa por la mitad del segmento CE? Justifica tu respuesta.
8. Deja fijo el artefacto y traza con tu pincelín el segmento KC. ¿Cómo son los triángulos KED y KCD entre ellos? Justifica tu respuesta.
9. Suma la distancia de los segmentos AK+KC. ¿A cuánto equivale la distancia AK+KC? , ¿Siempre se cumple la equivalencia en cualquier posición del artefacto? Justifica tu respuesta.
10. Auxiliándote de la respuesta de la pregunta 1, ¿Hay alguna barra del artefacto cuya longitud sea igual a la suma de AK + KC?, ¿cuál es dicha barra?
11. Acerca el punto A al punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. Después coloca el punto A sobre el punto C, mueve el artefacto y observa el trazo. ¿Cómo se comportaron estos trazos en comparación con el primer trazo realizado en la actividad?
12. Reflexiona sobre tus respuestas de las preguntas anteriores y escribe con tus palabras la definición de Elipse.
13. Solicita a tu coordinador el Anexo 1 para responder lo siguiente. Explica si el instrumento cumple la definición de elipse y ¿por qué?

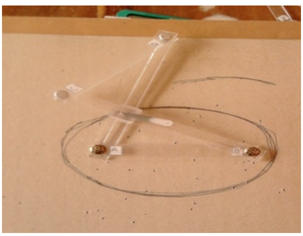
Annexos

Hoja de trabajo para la manipulación del antiparalelogramo (van Schooten)

Nombres de los integrantes del equipo:
Nombre del equipo:
Grado: Institución:

Instrucciones:

1) Se te proporcionará un artefacto, el cual está etiquetado en ciertos puntos. Así mismo, un lápiz, un pincelín y una regla.
2) El punto E, es la intersección entre los segmentos AD y BC. Este punto se tomará sobre las deslizaderas, en donde se colocará el lápiz que previamente se te entregó.
3) Para manipular el artefacto (una vez fijo), tendrás que girarlo a partir del punto C y D o bien, sólo debes manejarlo con el lápiz.
4) Observa con atención el artefacto durante el movimiento, principalmente el lugar geométrico trazado por el punto E.
5) Puedes medir la longitud de los segmentos con la regla para contestar algunas de las preguntas que se te piden.
6) Responde las preguntas planteadas lo más detallado posible, haciendo uso del artefacto.
7) Al hacer referencia a un segmento, escríbelo de la siguiente forma. AB ()



Antiparalelogramo articulado de van Schooten

1. ¿De cuántas barras está conformado el artefacto?
2. Mueve el artefacto y observa atentamente lo que ocurre con todos sus segmentos. Durante el movimiento del artefacto, ¿qué figuras geométricas forman dichos segmentos (incluyendo los segmentos AC y BD)?
3. ¿Cuáles son los puntos que están fijos sobre el plano durante el movimiento del artefacto?
4. Al mover el artefacto ¿Cuáles son los segmentos que no cambian de longitud durante el movimiento?
5. Mueve el artefacto y observa sus segmentos ¿Cuáles son los segmentos que cambian de longitud durante el movimiento?
6. De los segmentos que cambiaron de longitud durante el movimiento, ¿Cuáles segmentos son iguales entre sí?

Ahora deje el artefacto inmóvil de manera que los segmentos AB y CD no sean paralelos y responda lo siguiente:

7. Trace los segmentos AC y BD. ¿Cuál es la figura que se forma con los segmentos AC, BD, AB y CD? Menciona algunas de sus características.
8. Lee el anexo1 que se encuentra al final de las hojas.

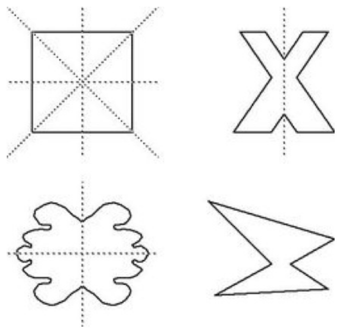
Observa la figura de la pregunta anterior ¿Tiene algún eje de simetría? Traza el o los ejes de simetría de dicha figura. ¿Cómo es el eje o los ejes de simetría respecto a los segmentos AC y BD?

9. Llama punto M a la intersección del eje de simetría con el segmento AC y N al punto de la intersección del eje de simetría con el segmento BD. Ahora, compara el triángulo BEN con el triángulo DEN. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.
10. Compara los triángulos MEA y MEC. ¿Cómo son entre ellos? Justifica tu respuesta.
11. Auxiliándote de las 2 preguntas anteriores, ¿Qué puede decirse de la comparación entre los triángulos AEB y CED? Justifica tu respuesta.
12. Realiza la suma de los segmentos AE + EB. ¿A cuánto equivale la suma de AE + EB?, ¿siempre se cumple dicha suma en cualquier posición del artefacto?
13. Mide las distintas barras que conforman el artefacto. ¿Hay alguna barra del artefacto cuya longitud sea igual a la suma anterior?, ¿cuál es dicha barra?

14. Reflexiona sobre tus respuestas anteriores y escribe con tus palabras que es una Elipse.
15. Solicita a tu coordinador el Anexo 2 para responder lo siguiente. Explica si el artefacto cumple la definición de Elipse y ¿Por qué?

Eje de simetría

Una línea que atraviesa una figura de tal manera que cada lado es el espejo del otro. Si dobláramos la figura en la mitad a lo largo del Eje de Simetría, tendríamos que las dos mitades son iguales, quedarían parejas.
El eje de simetría es la mediatriz del segmento cuyos extremos son puntos simétricos.



José Carlos Cortés Zavala es Profesor del área de Matemática Educativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México.

Héctor Arturo Soto Rodríguez es Profesor del área de Matemática Educativa de la Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Morelia, México.

Dirección de contacto: Para correspondencia directa con el autor, diríjanse a Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, Avenida Francisco J. Mújica s/n, Ciudad Universitaria, 58030 Morelia, Michoacán, México. Dirección de E-mail: jcortes@fismat.umich.mx