To Hedge or not to Hedge este es el problema

Ricardo Tagliafichi•

RESUMEN

Uno de los más importantes dilemas que los administradores de portafolio enfrentan día a día es, no solo el análisis de los riesgos a los que están expuestos los portafolios de inversión que administran, sino también como cubrir esas posiciones haciendo operaciones de cobertura debido al costo que implica cubrir esos riesgos (to hedge en la jerga del mercado).

Este trabajo trata de presentar y evaluar el riesgo de mercado y el riesgo de crédito, de los diferentes portafolios como son los de renta fija, acciones, materias primas, monedas, tasa de interés y las herramientas que el mercado ofrece para reducir el mencionado riesgo

Obviamente, la forma de reducir los diferentes riesgos es usar algún producto de derivados que el mercado financiero ofrece y analizar el costo de cada producto. Este costo debe ser estudiado no solamente en el desarrollo de las matemáticas incluidas en el producto y en la relación entre el pecio teórico resultante del modelo usado y el precio real de mercado.

En la primera parte se detallan las diferentes inversiones de un portafolio, y el desarrollo de cómo estimar el riesgo de cada posición. En la segunda parte se presentan las herramientas que el mercado ofrece para cubrir los riesgos del portafolio y un desarrollo de cada modelo de derivado. En la última parte se hace un breve ejercicio usando algunas estrategias presentando algunas conclusiones con las objeciones a las matemáticas usadas en el cálculo de las primas de los derivados.

Keywords: VaR, CVaR, volatilidad, volatilidad implícita, opciones, CDS, futuros, garch, estrategias con opciones, calls, puts, butterfly

Abstract del trabajo original presentado el Coloquio Internacional de AFIR 2011 Madrid

ABSTRACT

One of the principal problems that the actuaries face, when we analyze the risks involved in the portfolio investments, is the decision making on to hedge or not to hedge some positions of the portfolio investment, due the financial cost of hedging a position versus the risk of not hedging a position.

This paper intends to present and evaluate the market and credit risk, included in different investments, like fixed income, stocks, commodities, foreign exchange, and the tools that the market offers to reduce the mentioned risk.

Obviously, the way to reduce different risk is by using some of the derivatives that the financial market offers, in consequence, the analysis of the cost of each product must be studied not only in the development of the mathematics included, but also in the relationship between the theoretic price and the market price.

In the first part, I detail the different investment portfolios, and develop how to estimate the risk in each portfolio position. In the second part, I present the tools that the market offers to hedge the positions portfolio, and develop the mathematics used in each derivative model. In the third part, I develop an exercise on some ideal portfolio, using some strategies, and finally I present the conclusions with the objections to the mathematics used in the calculus of derivative primes.

Keywords: Market risk, credit risk, volatility, implied volatility, options, swaps, collar, futures, arch models, bear market, bull market, options strategies, butterfly, calls and puts

To Hedge or not to Hedge Este es el problema

Las instituciones financieras deben tener una equivalencia o balance entre los activos y los pasivos, de manera tal que se pueda atender el puntual pago de las obligaciones en las fechas de vencimiento, como así también los pagos de las demandas de los depositantes a la vista. El incumplimiento lleva a la falta de confianza en el sistema y eso genera una crisis, tal como sucedió en 2008 con Lehman Brothers y Aon. En este balance de activos con pasivos debemos detraer de la valuación de los activos el valor que representa el riesgo de mercado y el riesgo de crédito de manera tal que con el precio obtenido en la liquidación de los activos se puedan atender las obligaciones demandadas.

Si analizamos quienes son los grandes inversores en el mercado, tenemos a los Bancos que invierten el dinero de los depósitos, las Compañías de Seguros que invierten las reservas matemáticas y técnicas con que deben atender los siniestros y obligaciones de los seguros personales y las Empresas de Salud que invierten sus reservas técnicas con las que deben atender la atención de salud de sus afiliados. Todos ellos invierten pero de no haber reservado posibles pérdidas en las inversiones, cuando liquiden una posición del portafolio, no les alcanzará para cubrir el importe demandado esto desata una crisis de confianza.

Entonces la solución comienza por tomar conciencia que hay que evitar estas crisis de confianza y hacer las reservas correspondientes calculando el riesgo de las inversiones a través de VaR (riesgo de mercado) y CVaR (riesgo de crédito) con un modelo consistente de cálculo, haciendo las coberturas de dicho riesgo con las estrategias más favorables.

Hacer reservas, hacer coberturas, son dos acciones que reducen las ganancias a distribuir. Entonces el segundo planteo es si quedamos bien con los accionistas o quedamos mal con los acreedores.

I. Los portafolios de inversión y sus riesgos

La siguiente es una tabla para clasificar las inversiones y los riesgos a que está expuesto cada tipo de portafolio

Composición de un portafolio	
Renta Fija	**Renta Variable**
• Bonos • Letras • Hipotecas • Prestamos garantizados • Obligaciones Negociables • Otros prestamos	• Acciones • Monedas • Indices • Commodities
Exposición a Riesgos	
• Riesgo de Mercado (VaR) • Riesgo de Crédito (CVaR)	• Riesgo de Mercado (VaR)

Riesgo de mercado en inversiones de renta fija y renta variable

El riesgo de mercado en renta fija debe ser evaluado por el análisis de la tasa de interés usando un modelo estático o dinámico. Esta tasa de interés debe estar relacionada con el producto invertido en el mercado, por ejemplo si se toman obligaciones emitidas en pesos argentinos usar como referencia la tasa badlar seria lo correcto, en cambio si se analiza una cartera hipotecaria en euros, la referencia debería ser la estructura de tasas para dicha moneda.

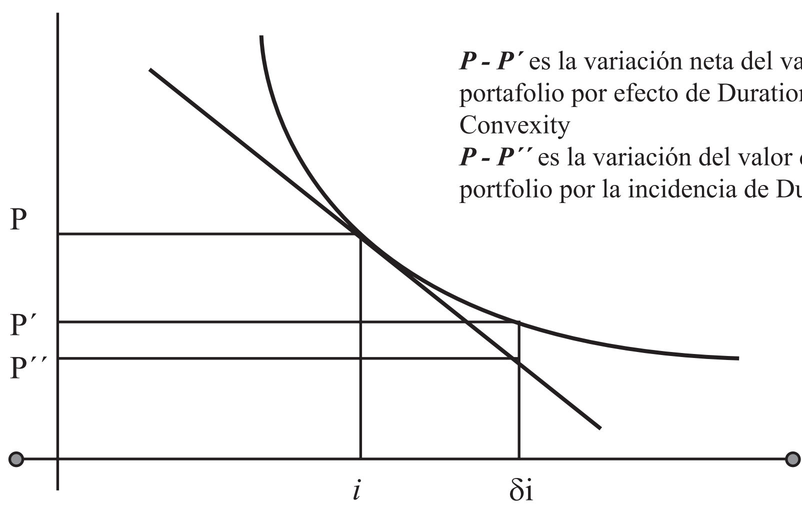
Hay diferentes modelos que se usan para el cálculo de VaR, en este caso de renta fija, para calcular la variación de la tasa de interés y que han sido desarrollados en trabajos anteriores que están mencionados en la bibliografía. En esta parte solo mostraré dos esquemas que se usan en la actualidad, uno estático y otro dinámico.

Tomando el flujo de fondos de un portafolio y el precio pagado por cada activo de dicho portafolio, podríamos calcular la tasa interna de retorno usando el modelo clásico:

$$P = \frac{CF_1}{(1+i)} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + \frac{CF_3}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{CF_n}{(1+i)^n}$$

Donde ***i*** es la tasa de interés que iguala a la ecuación. En consecuencia el valor del portafolio depende del valor que tome la tasa de interés o la estructura de tasas de interés para distintos periodos de tiempo.

El gráfico siguiente muestra el comportamiento del valor de un portafolio debido a la incidencia de dos coeficientes importantes como son la Duration y la Convexity, que no son más que la derivada primera y segunda de la función anterior.



Resuelta la ecuación por la que se calculaba la tasa interna de retorno, se pueden calcular estos dos coeficientes de la siguiente forma:

El coeficiente Duration (MD) se calcula de la siguiente forma:

$$P = \frac{CF_1}{(1+i)^1} + \frac{CF_2}{(1+i)^2} + ... + \frac{CF_n}{(1+i)^n}$$

Derivando en la formula anterior el precio con respecto a la tasa de interés encontrada se tiene:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{(-1)CF_1}{(1+i)^2} + \frac{(-2)CF_2}{(1+i)^3} + ... + \frac{(-n)CF_n}{(1+i)^{n+1}}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{(1+i)}\left[\frac{1CF_1}{(1+i)^1} + \frac{2CF_2}{(1+i)^2} + ... + \frac{nCF_n}{(1+i)^n}\right]$$

Dividiendo ambos términos por *P* se obtiene

$$\frac{\partial P}{\partial i}\frac{1}{P} = -MD = -\frac{1}{(1+i)}\frac{\sum_{t=1}^{n}\frac{tCF_t}{(1+i)^t}}{P}$$

En consecuencia el porcentaje de cambio del valor del portafolio estará dado por la siguiente expresión:

$$\Delta\%P = -MD\ \delta i$$

Donde δi es la variación de la tasa de interés expresada en puntos básicos. En el mercado suele usarse como δi igual a 100 de manera que el resultado obtenido se lo conoce como DV01, o sea que porcentaje se perderá del valor del portafolio si la tasa sube 100 b.p.

Si se estima la variación posible de la tasa de interés usando algún modelo de estadística que se expone mas adelante se puede determinar el valor de δi. Pero cuando la variación es grande se necesita un coeficiente complementario que corrija la variación estimada solo por la derivada primera. Este coeficiente es conocido como Convexity y es la derivada segunda del la fórmula del cálculo del precio

$$convexity = CV = \frac{d^2P}{di^2}\frac{1}{P}$$

$$\frac{d^2P}{P} = \frac{1}{2}\frac{d^2P}{di^2 P}di^2$$

$$\frac{d^2P}{di^2} = \sum_{t=1}^{n}\frac{t(t+1)CF_t}{(1+i)^{t+2}}$$

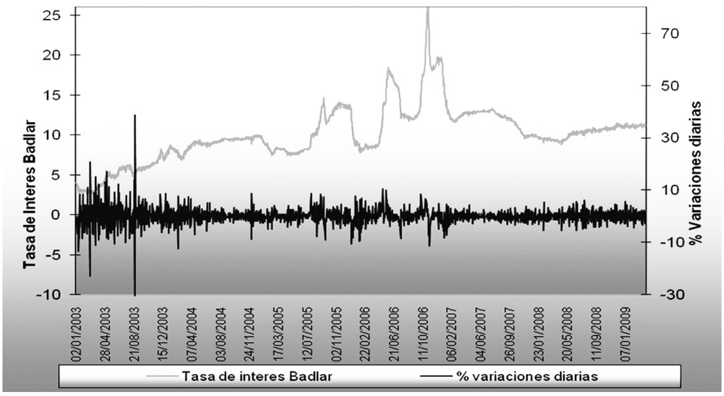
Para estimar la variación completa del portafolio la formula es la siguiente:

$$\Delta\%P = -MD\,\delta i + 0.5\,CV\ \delta i^2$$

La variación de δi y el riesgo de Mercado (VaR)

Para la estimación de δi o la posible variación de la tasa de interés podemos usar en esta primera parte un modelo estático. Hay que recordar que Basilea II recomienda que para formular un modelo de riesgo hay que analizar por los menos los últimos dos años. En el cuadro siguiente se muestra el comportamiento de la tasa de interés Badlar y las correspondientes variaciones diarias.

Tasa de interés Badlar



Considerando las variaciones diarias como $r_t = [\ln(x_t / x_{t-1})] * 100$

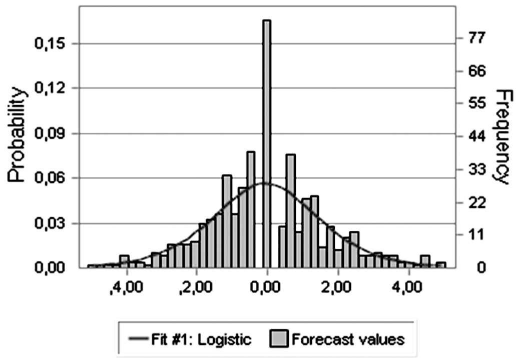
Donde: r_t es la variación porcentual diaria de la tasa de interés
x_t es la tasa de interés en el momento t
x_{t-1} es la tasa de interés en el momento t-1

Comenzaremos usando el análisis estático para calcular la variación diaria de la tasa de interés. Para ello se debe conocer la distribución de probabilidades que siguen las ultimas 500 observaciones, que usando un software estadístico arrojó los siguientes resultados.

Ranked by: Kolmogorov-Smirnov

Distribution	A-D	Chi-Square	K-S	Parameters
Logistic	1,3710	326,6128	,0942	Mean=,0,06,Scale=0,99
Gamma	4,1333	303,8663	,0982	Location=,7,05,Scale=0,52,Shape=13,56702
Student's t	1,9466	278,0459	,1029	Midpoint=,0,02,Scale=1,63,Deg. Freedom=6,65
Normal	2,5494	322,3094	,1033	Mean=,0,02,Std. Dev.=1,81

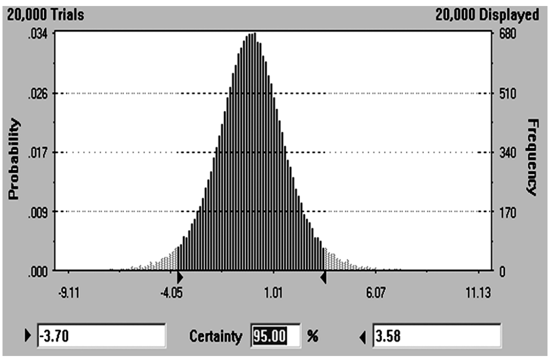
Comparison Chart



Como se puede observar la mejor distribución de probabilidades encontrada, usando el test de Kolmogorov Smirnov, es la distribución logística. También el test de Anderson Darling acepta que esta es la mejor distribución. Con esto se demuestra que hay una presencia de distribuciones de colas pesadas. El test rechaza el uso de esta distribución

Ver nota al pie acerca del uso de la distribución normal[1]

Frequency Chart



Si se acepta que la distribución logística es la mejor distribución encontrada, se puede estimar haciendo una simulación con 20000 iteraciones, un intervalo de confianza con cierto nivel de seguridad prefijado

En este primer análisis se encontró que la variación de la tasa de interés en un día podría aumentar como máximo un 3.58% con un 2.5% de probabilidad que sea mayor a ese valor. Si se observa que la tasa de interés para el día observado fuese del 10%, para el día siguiente la tasa podría alcanzar el 10.358% o sea que δi es igual a 0.358, en consecuencia la variación negativa de la formula (%ΔP) representa la pérdida posible para el día siguiente.

Otra de las formas de estimar la variación diaria de la tasa de interés es usar un modelo dinámico. ¿Por qué la denominación de dinámico? Porque es un modelo que se basa en el comportamiento de la serie dependiente del tiempo, o sea analiza los datos como una serie cronológica, donde para hacer una predicción se va a realizar a partir de los últimos datos de los sucesos. Lo que vamos a utilizar son modelos Arch[2].

---

1. En el libro El Cisne Negro, Nassim Nicholas Taleb, 2007, Random House, New York, el profesor Taleb define a la distribución Normal de probabilidades como un Gran Fraude Intelectual

2. Hay cientos de trabajos que tratan el problema de la estimación de la volatilidad. Los modelos de mayor aplicación en la materia surgen de la aplicación de modelos Garch(1,1) desarrollados por Engle y Bollerslev cuyos coeficientes están incluidos en los análisis de las series en las paginas de Bloomberg

¿Por qué nos inclinamos al uso de este modelo dinámico? Por las siguientes razones:

a) Cuando analizamos la serie en forma estática advertimos una gran concentración de datos alrededor del valor medio y además muchos datos en los extremos, lo que nos permite decir que la serie vista como independiente de tiempo es leptocurtica y de colas pesadas.
b) Como consecuencia de a) estos datos no tienen distribución normal de probabilidades.
c) La función de auto correlación y la función de auto correlación parcial demuestran que las variaciones no son independientes entre cada una de las observaciones
d) Hoy un inversor no le interesa que pasó hace mas de dos años o hace mas de un año, le interesa el comportamiento reciente, es por todo esto que se propone el uso del siguiente modelo para el calculo de la volatilidad de la serie cronológica, en este caso las variaciones diarias de la tasa Badlar.

Para llegar a usar este modelo, lo primero que hay que hacer es regresar la serie sobre una constante, en este caso sería la media condicionada de la serie, y analizar los residuos, que serían la volatilidad diaria. Si la volatilidad diaria o residuos de la regresión están auto correlacionados, estaríamos en condiciones de usar el siguiente modelo:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$$

Donde σ^2_t es el valor al cuadrado de la volatilidad en el momento t
ε^2_{t-1} es el error al cuadrado de la observación menos la media en t-1
σ^2_{t-1} es el cuadrado de la volatilidad estimada para t-1
β, α, ω son los coeficientes de la ecuación

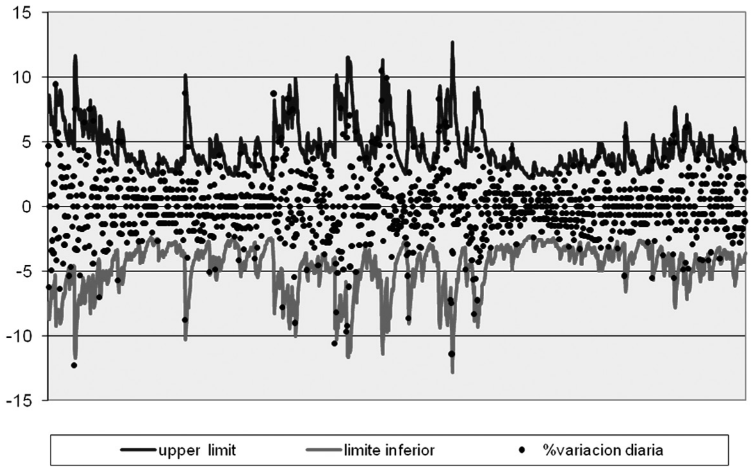
Si el modelo supera el back testing, y la suma de los coeficientes $(\alpha + \beta) < 1$ entonces se puede utilizar el modelo para calcular la volatilidad para τ días, porque al no tener los datos una distribución normal de probabilidades y al estar correlacionados, no se cumple con las condiciones de la regla de $t^{1/2}$ impidiendo el uso del movimiento browniano. La formula que se muestra abajo es muy conveniente para calcular la volatilidad para un periodo dado, no solo para conocer el riesgo de marcado durante cierto periodo de tiempo, sino que también se puede usar para modificar la formula de Black and Scholes.

$$\sigma_{t+\tau}^2 = \frac{\omega}{1-(\alpha+\beta)}\left\{(\tau-1)-\left[(\alpha+\beta)\frac{1-(\alpha+\beta)^{\tau-1}}{1-(\alpha+\beta)}\right]\right\} + \frac{1-(\alpha+\beta)^{\tau}}{1-(\alpha+\beta)}\sigma_t^2$$

Donde β, α, ω son los coeficientes de la ecuación
σ^2_t es el cuadrado de la volatilidad estimada para t
τ son la cantidad de periodos para los que será calculada la volatilidad

El gráfico siguiente se puede observar como el modelo Garch(1,1) encontrado supera el back testing

Back testing para un modelo Garch(1,1)



El modelo encontrado con los correspondientes desvíos estándar de sus coeficientes mostrados entre paréntesis, son los siguientes

$$\sigma_t^2 = 0.222 + 0.179\,\varepsilon_{t-1}^2 + 0.798\,\sigma_{t-1}^2$$
$$(0.04) \quad (0.019) \qquad (0.016)$$

El modelo no es explosivo porque la suma de $\alpha + \beta = 0.977$, lo que es cercano a 1, en consecuencia el modelo es persistente, esto significa que un gran cambio en la serie se mantendrá por mas de 30 periodos. Además en función de la media condicionada y la volatilidad condicionada que este modelo calcula, se han hecho dos bandas con el 95% de seguridad para analizar si los datos observados están dentro de dichos limites encontrándose menos del 5% de las observaciones fuera de dichos limites por lo que se acepta que el modelo supera el back testing a que fue sometido.

Usando este modelo, la volatilidad diaria sería del 1.054% en consecuencia δi estimada con un 2,5% de probabilidad es la siguiente:

$$di = \bar{r}_t + 1.96\,\sigma_{t-1} = 2.01\%$$

Si se usa este modelo para τ periodos se observa que el modelo cumple con lo expresado sobre la persistencia observando la siguiente tabla

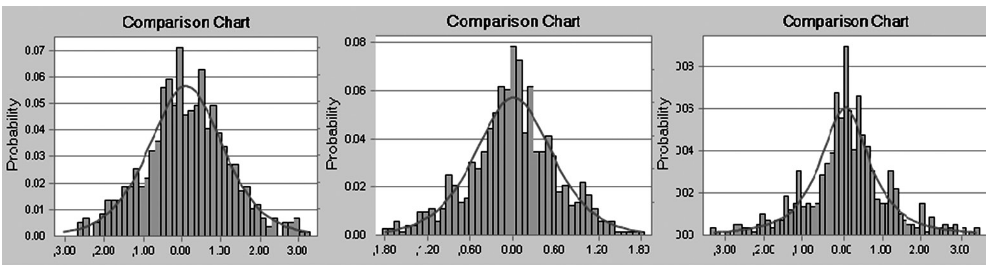
Cantidad de periodos	Estimación estática usando distribución normal y la regla de t½	Estimación dinámica usando modelos Garch (1,1)
1	1.81	1.054
10	5.72	6.857
30	9.91	12.503

La estimación de la volatilidad para renta variable

Los conceptos usados para pronosticar el valor del riesgo de mercado para renta fija son los mismos que se aplican para renta variable, tipo de cambio, acciones, commodities, pero analizando la otra parte de la curva.

Analizadas las series de oro, Euro/Dólar y el índice Dow Jones presentan los siguientes resultados:

ORO **Euro/USD** **Dow Jones**



Los resultados del test de bondad del ajuste usando los coeficientes de Kolmogorov Smirnov son los siguientes

Coeficientes	Oro	Euro/USD	Dow Jones
Observaciones	591	727	592
Mejor distribución encontrada	Logistic	Logistic	Logistic
Error máximo permitido	0.056	0.050	0.056
Dn máximo observado	0.018	0.032	0.043
Dn máximo para Distribución Normal	0.074	0.054	0.099
Media	0.093	0.003	0.058
Volatilidad	1.145	0.658	1.218

Si se acepta la distribución logística, la máxima pérdida posible puede ser estimada usando la siguiente fórmula

$$F(z) = \frac{1}{1+z}$$

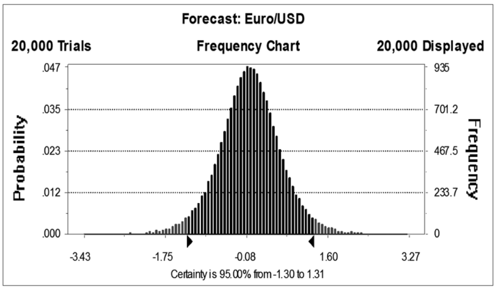
$$z = \frac{1}{e^{\frac{x-m}{\alpha}}}$$

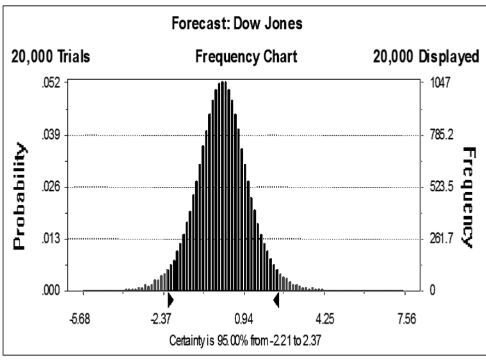
$$\alpha = \sqrt{\frac{3\sigma^2}{\pi^2}}$$

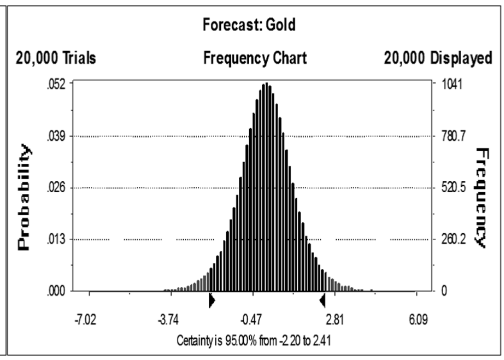
Usando esta distribución la máxima perdida posible diaria es la siguiente para las series

Gold	Euro/USD	D. Jones
-2.219%	-1.326%	-2.40%

Usando un software conveniente, en este caso Crystal Ball, se puede hacer una simulación de 20000 ensayos para cada activo con el 2.5% de probabilidad







También, como sabemos, podemos usar la estimación dinámica para el riesgo de Mercado usando Garch (1,1) con los siguientes resultados:

Coeficientes	Oro		Euro/USD		Dow Jones	
ω y el desvio estandar ()	0.020	(0.011)	0.006	(0.001)	0.019	(0.006)
α y el desvio estandar ()	0.031	(0.014)	0.024	(0.007)	0.099	(0.019)
β y el desvio estandar ()	0.949	(0.019)	0.958	(0.006)	0.885	0.019)
$\alpha+\beta$	0.955		0.983		0.985	
Volatilidad y VaR[3] para 1 periodo	0.92%	1.91%	0.64%	1.28%	0.69%	1.47%
Volatilidad y VaR para 10 periodos	3.12%	7.11%	2.12%	4.31%	2.57%	6.09%
Volatilidad y VaR para 30 periodos	5.29%	13.34%	3.54%	7.38%	4.50%	11.9%

3. VaR esta estimando la máxima perdida posible con un 2.5% de probabilidad

El riesgo de crédito (CVaR) para renta fija

El otro riesgo es el riesg-o de crédito en renta fija. La primera solución está dada por las calificadoras de riesgo de crédito, tanto para bonos soberanos como para grandes empresas que emiten obligaciones negociables a largo plazo. La idea de tener una calificación de crédito hecha por un tercero transfiere el problema y calma las conciencias porque podemos echarle la culpa a otro si el emisor no honra la deuda.

Asociada a la calificación de riesgo existe lo que se conoce como matrices de transición. Recordemos la frase que dice "El futuro viene del pasado y pasa por el presente" estas matrices de transición, conocidas como procesos de Markov calculan la probabilidad que habiendo estado en cierto estado de la naturaleza, pase en un periodo a otro estado de la naturaleza. Estas matrices están calculadas en base a datos históricos y estiman la probabilidad que un emisor de deuda calificado hoy como BBB pase en un periodo a default

La siguiente tabla muestra las matrices de transición para deudores calificados en renta fija para un año de plazo. Esta matriz de transición muestra la probabilidad que un emisor de deuda calificado como BBB (columna 1) se mueva a default en un año. En este caso la probabilidad es de 0.18%

Initial Qualification	**Qualification to the year end (% of change probability)**							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	Def.
AAA	90.81	8.33	0.68	0.06	0.12	0	0	0
AA	0.70	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	**0.02**	**0.33**	**5.95**	**86.93**	**5.30**	**1.17**	**0.12**	**0.18**
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1.00	1.06
B	0	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.20
CCC	0	0	0.22	1.30	2.38	11.24	64.86	19.79

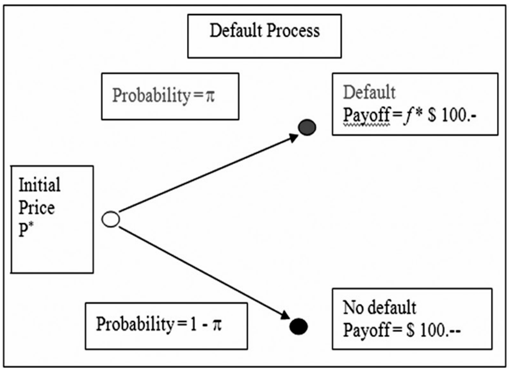
Supongamos a un ahorrista japonés, alemán o italiano en el 2001, comprando un bono argentino calificado como BBB y que paga el 15% de interés anual en dólares. Imaginemos a otro ahorrista americano comprando deuda emitida por Madoff también calificado que paga una tasa del 12% anual. ¿Qué piensan estos ahorristas ahora de las calificaciones?

El problema está en dos partes. Una en las calificadoras que siempre van detrás de la noticia y segundo ¿estas matrices de transición están actualizadas? Ambos problemas confluyen en que las calificaciones y las matrices ocultan algún problema dado que no anticipan la realidad.

Por otra parte existe una cantidad de portafolios como son los compuestos por hipotecas, deuda garantizada, etc. que no tiene calificación alguna. En estos casos hay que optar por clasificar la deuda en función de la tasa interna de retorno como se había expresado anteriormente

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{FF_t}{(1+tir)^t}$$

Para calcular entonces la probabilidad de default de la deuda se puede usar el exceso de tasa interna de retorno por encima de una tasa libre de riesgo. Esta tasa libre de riesgo es una tasa que llamaríamos de resguardo de los inversores. El mercado menciona que ante una crisis los inversores deshacen posiciones y vuelan a la calidad “Fly to quality” o sea se refugian en una tasa que les garantice recuperar su inversión. Para ello podemos usar el siguiente esquema incluso para cuando exista calificación de riesgo.



$$P^* = \frac{100}{(1+i^*)} = \left[\frac{100}{(1+i)}\right](1-\pi) + \left[\frac{f\,100}{(1+i)}\right]\pi$$

$$\frac{(1+i)}{(1+i^*)} = 1-\pi+f\pi$$

$$1-\frac{(1+i)}{(1+i^*)} = \pi - f\pi$$

$$\pi = \frac{(i^*-i)}{(1+i^*)(1-f)}$$

Donde: π es la probabilidad de default
f es la tasa de recupero en caso de default
i es la tasa libre de riesgo (fly to quality)
i^* es la tasa aplicada a la operación TIR
P es el precio de Mercado o el capital invertido en el préstamo
100 representa al Valor Nominal o importe a recibir al vencimiento

Considerando múltiples períodos, se puede recomponer las tasas de interés y las tasas de default de manera tal que π se comporte como una tasa anual de probabilidad de default, suponiendo entonces una inversión por t periodos resulta:

$$P^* = \frac{100}{(1+i^*)^t} = \left[\frac{100}{(1+i)^t}\right](1-\pi) + \left[\frac{f\,100}{(1+i)^t}\right]\pi$$

$$(1+i)^t = (1+i^*)^t\left\{(1-\pi)^t + f\left[1-(1-\pi)^t\right]\right\}$$

Reacomodando los términos se puede escribir:

$$\frac{(1+i)^t}{(1+i^*)^t} = (1-\pi)^t + f - f(1-\pi)^t$$

$$\sqrt[t]{\left[\frac{(1+i)^t}{(1+i^*)^t} - f\right]\frac{1}{(1-f)}} = (1-\pi)$$

A partir de estas formulas podremos determinar la probabilidad de default de un préstamo considerando el exceso de tasa. Es lógico pensar que se pueda pedir más rendimiento a quien tenga menor probabilidad de recupero de la inversión o menor respaldo económico.

La tabla siguiente muestra distintas probabilidades de default por préstamos a un año, y si recordamos el caso Madoff o el caso argentino de 2001, podemos apreciar que las probabilidades de incumplimiento están muy lejos de lo que pronosticaban las calificadoras de riesgos y las matrices de transición.

Tasa libre de riesgo 4%					
TIR	10.00%	9.00%	8.00%	7.00%	6.00%
f o tasa de recupero	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%	50.00%
Probabilidad de default	10.91%	9.17%	7.41%	5.61%	3.77%

Dado que, π es función de la diferencia de tasas o exceso de tasa sobre la tasa libre de riesgo, si la proporción de recupero f se mantiene constante, la probabilidad de default decrece a medida que esta diferencia también decrece.

II. Estrategias y balance entre el costo de los derivados y el riesgo

El mercado de derivados, en este caso el mercado de opciones, trabaja cubriendo posiciones de activos para reducir el riesgo de mercado. Esta operación consiste en que hay un tomador que se compromete a comprar a cierto precio, si le conviene, un activo que llamaremos bien subyacente, antes de cierta fecha pagando por ese derecho una prima o precio, y por el otro lado hay un lanzador que se compromete a vender ese bien subyacente a cierto precio cuando el tomador quiera ejercer el contrato. Hay dos precios para esta prima o precio mencionado, el precio teórico y el precio real.

El precio teórico surge de la aplicación de la formula de Black and Scholes, mientras que el precio real es el que fija el mercado en la rueda de opciones.

La formula de Black and Scholes

Para determinar el precio de una opción, en adelante llamado C; usando la formula de Black and Scholes es necesario disponer de cinco variables que son las siguientes:

1) El precio del bien subyacente en el momento de calculo *(So)*
2) El precio de ejercicio *(E)*
3) La cantidad de días que faltan hasta el vencimiento *(t)*
4) La tasa de interés libre de riesgo expresada en forma anual *(i)*
5) La volatilidad para el periodo expresada en forma anual *(s)*

La fórmula es la siguiente:

$$C = SoN(d1) - \frac{E}{e^{i\frac{t}{n}}} N(d2)$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{So}{E}\right) + \left(i + \frac{s^2}{2}\right)\frac{t}{n}}{s\sqrt{\frac{t}{n}}}$$

$$d2 = d1 - s\sqrt{\frac{t}{n}}$$

La variable *i* está expresada en valores anuales, por esa causa $n = 365$, y estos valores se calculan para el periodo usando las siguientes formas. La tasa de interés tiene dos formas. En la primera parte de la fórmula la tasa de interés es aplicada al período usando interés simple mientras que para actualizar el valor de *E* se usa interés compuesto o capitalización continua.

Cuando se calcula el valor de *d1* y *d2* entonces se usa interés simple. El problema es seleccionar la tasa de interés que sea compatible con una operación que no tiene riesgo de crédito pero si riesgo de tipo de cambio si está hecha en moneda local. Las tasas que más compatibles con este tipo de operaciones serían las que se usan para ventas en descubierto o cauciones de acciones.

El otro valor es la volatilidad expresado en forma anual *(s)*. Este valor se aplica al período de la opción usando la regla de $t^{½}$ porque se sostiene en este modelo que la volatilidad es estable durante toda la vida de la opción, enunciado que se ha demostrado anteriormente no es preciso, sobre todo cuando el plazo hasta el vencimiento es menor a los 60 días. Esta imprecisión hace que no se pueda obtener un precio o prima correcta. Los motivos son los que siguen:

1) Los retornos no siguen la regla de $t^{½}$
2) Los retornos no están *nid (normal e idénticamente distribuidos)*
3) Los retornos están correlacionados
4) Existe una fuerte presencia de heterocedasticidad en los retornos de la serie

El problema se presenta cuando hay un contrato que vence en menos de 2 semanas Si se observa la formula de Black and Scholes se podría separar la volatilidad e introducir un cambio para estimar la prima de la opción.

En la parte N (d1) y N (d2) la fórmula de Black and Scholes usa la volatilidad anual siguiendo la regla de $t^{0.5}$. Se puede utilizar el modelo Garch (1,1) calculando la volatilidad para la cantidad de días hasta el vencimiento usando el modelo Garch (1,1) e introduciéndolo en la fórmula obteniendo asi la prima que llamaremos $C^{BSGarch}$:

El cambio sería de la siguiente forma:

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{So}{E}\right) + \left(i + \frac{s^2}{2}\right)\frac{t}{n}}{s\sqrt{\frac{t}{n}}}$$

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{So}{E}\right) + i\frac{t}{n} + \frac{1}{2}s^2\frac{t}{n}}{s\sqrt{\frac{t}{n}}}$$

Reemplazar la volatilidad para t días siguiendo la regla de $t^{1/2}$ por la estimada con Garch para τ días

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{So}{E}\right) + i\frac{t}{n} + \frac{s^{2\,Garch}}{2}}{s^{Garch}}$$

$$d2 = d1^{Garch} - s^{Garch}$$

En el momento de tomar una decisión se tienen diferentes precios de la prima por los distintos valores que toma la variable *s*. Los precios teóricos de la prima que surgen de la aplicación de la formula de Black and Scholes de acuerdo a que tipo o forma de cálculo de la volatilidad calculada por un lado y por otra parte los precios reales que fija el mercado de opciones.

Si se considera que las opciones tienen un precio de mercado llamado C^{MARKET} como resultado de aplicar la fórmula de Black and Scholes tomando, *So, E, t*, e *i,* la volatilidad que iguala la ecuación es conocida como la volatilidad implícita, porque este es el único valor que depende de las observaciones realizadas y porque como se ha explicado esta no es estable en el tiempo.

De la función de la formula de Black and Scholes, se puede derivar la misma con respecto a la volatilidad de manera tal de conocer como variaría el precio de la prima si la volatilidad cambia. Esta es una de las letras griegas que acompañan a este modelo y es conocida como Vega o Kappa.

$$\Lambda(Vega) = \frac{\partial C}{\partial s} = So\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e\left(-\frac{d_1^2}{2}\right)\sqrt{t/365}$$

La fórmula expuesta muestra cómo se calcula esta derivada con respecto a la volatilidad. Recordemos que en la fórmula de Black and Scholes, la volatilidad fue asumida como constante durante la vida de la opción.

Matemáticamente, Vega esta definida de la misma forma que delta. Delta es una aproximación lineal para la sensitividad del valor de mercado de la opción. La diferencia es que Delta mide la sensitividad sobre el precio del bien subyacente mientras que Vega mide la sensitividad sobre la volatilidad implícita.

También se puede calcular Vega ^{Garch} estimándola de la siguiente forma:

$$\Lambda^{Garch} = \frac{\partial C}{\partial s} = So\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e\left(-\frac{d_1^{2\,GARCH}}{2}\right)\sqrt{t/365}$$

La fórmula de Black para opciones sobre tasa de interés y tipo de cambio

En el mercado de opciones sobre tasa de interés y tipo de cambio. para estimar el precio de la prima, se usa fórmula de Black

$$C = e^{-rt}\left[F\ N(d1) - E\ N(d2)\right]$$

Donde ***F*** es el precio a futuro en el dia t
E es el precio de ejercicio del contrato
r es la tasa libre de riesgo anualizada
t es la fracción del año (n/365)
N(d1) es la función normal acumulada para d1
N(d2) es la función normal acumulada para d2

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{E}\right) + \frac{s^2}{2}t}{s\,t}$$

$$d2 = d1 - s\,t$$

Se puede modificar la fórmula de Black para obtener un valor mas preciso de la prima haciendo los siguientes cálculos:

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{E}\right) + \frac{s^{2Garch}}{2}}{s^{Garch}\ t}$$

$$d2 = d1 - s^{Garch}\ t$$

El valor del precio futuro estará dado por:

$$F = (So + s)\ e^{(r-c)t}$$

Donde ***So*** es el precio de Mercado del activo
s es el costo de mantener el activo
r es la tasa libre de riesgo
c es la tasa más conveniente para tomar
t es la fracción de año (n/365)

Si aplicamos el modelo más conveniente se obtendrán precios de las primas más precisos para los derivados. Si se asume que un contrato de derivado es la compra de volatilidad, usando los modelos no lineales podemos aceptar que la volatilidad pagada en un contrato será la máxima volatilidad que esta se pueda aceptar[4].

4. Tagliafichi Ricardo The implied volatility announce the behavior of the market risk ICA Paris 2006.

Un ejemplo trivial

Supongamos un portafolio formado por 100.000 € y 100 onzas (oz) de oro valuados respectivamente a $ 1.4271 y $ 1505.-

Activos	Cantidad (unidades)	Precio Por unidad	Valor del Portafolio	VaR para los próximos 30 días %	VaR
Euros	100.000.–	1.4271	142.710.00	7.38	10532
Gold	100.–	1505.000	150.500.00	13.3	20016
Total			293.210.00		30548
-VaR			-30.548.00		
Net			262.662.00		

La estrategia que puede hacerse es:

Vender una opción sobre la posición de euros con un precio de ejercicio de $ 1.37 por euro y vender la posición de oro a futuro a $ 1506.80 La prima obtenida por vender la opción aplicando Black and Scholes con modelo Carch es $ 0.0584 por euro.

Al final del contrato se tiene la siguiente situación:

Concepto	Movimiento de Fondos	Observaciones
Cobranza de la prima	5.847.00	Prima por vender una opción sobre 100000 € @ 0.0584
Ejercicio de la opcion	137.000.00	Cobranza por ejercicio de la opcion 100000 € @ 1.37
Venta del oro	150.680.00	Cobranza por la venta de 100 oz de oro @ 1506.80
Portafolio en efectivo	293.527.00	

Con esta estrategia se mantiene el valor del portafolio, que valuado con las reservas de VaR había quedado reducido a $ 262.662.-

III. Conclusiones

Para resolver el problema de cubrir o no cubrir las posiciones del portafolio debemos tener en mente lo siguiente:

1) Un buen calculo de VaR

Si no se tiene una buena estimación de VaR, estaremos en presencia de una baja estimación de VaR por un error en el cálculo de la volatilidad y entonces las primas de mercado se verán muy altas para cubrir los riegos del mercado, y viceversa. Si estamos en presencia de un VaR alto por calcular una alta volatilidad entonces aparecerán primas bajas para las coberturas.
Es usual que el Mercado descuente por anticipado los grandes impactos variaciones de los precios tanto de los activos como de las tasas de interés. Parafraseando a un presidente norteamericano podemos decir "Es la heterocedasticidad estúpido". Entonces el cálculo dinámico de VaR permite una mejor valuación del riesgo. ¿Como disminuir el riesgo? Vendiendo opciones teniendo en cuenta la volatilidad implícita comparada con la volatilidad estimada por Garch, dado que como se ha demostrado en un trabajo anterior la volatilidad implícita tiende como máximo a la volatilidad calculada con modelos Garch.

2) Una Buena previsión del calculo de default o CVaR

La herramienta del cálculo del exceso de tasa es una buena medida de los riesgos de default. Consideremos que el default es el no pago de una deuda en el momento de vencimiento y existen en el mercado defaults encubiertos que son aquellos en que en el momento de vencimiento se pone en oferta una nueva obligación a largo plazo sin quita alguna.

3) El uso de los derivados

- CDS Credit default swaps para cubrir los riesgos de crédito, este elemento es ofrecido en el mercado para la cobertura de default. Si se hace un buen cálculo de CVaR podemos comparar el mismo contra el costo de CDS y proceder a cubrirse, o bien constituir la reserva correspondiente
- Swaps para tasa de interés cuando se contrata a tasa variable, es una buena herramienta para cubrirse de las variaciones de tasa a pagar. Si se tiene una buena valuación del futuro de la tasa deberá analizarse el precio de oferta del swap con lo que se estima podría valer la tasa de interés
- Opciones, en este tema las estrategias son variadas bull spread, bear spread, Butterfly, etc. son las distintas estrategias que este producto permite cubrirse de los riesgos de mercado y de tasa de interés

En resumen el suceso de to hedge or not to hedge depende del buen uso del cálculo de VaR y de las primas para cubrir los riesgos.

Bibliografia

Bollerslev T., 1986, Generalized autoregressive conditional heterocedasticiy, *Journal of Econometrics* 31, 307-327

Basel Committee on Banking Supervision, 2001, The New Basel Capital Accord, *Bank for International Settlement*

Cruz Marcelo G., 2002, Modeling measuring and hedging operational risk, *John Wiley and Sons*

Duffie Darrell, Jun Pan, 1997, An Overview of Value at Risk, *The Journal of Derivatives,* Spring 1997

Embrechts Paul, Kluppelberg Claudia, Mikosch Thomas, 1997 Modeling Extremely Events for insurance and finance, *Springer*

Engle, Robert F., 1982 Autoregressive conditional heterocedasticiy with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometric* 50, 987-1007

Engle, R., y T. Bollerslev, 1986, modeling persistence of conditional variances, *Econometric Review* 5, 1-50

Engle, R., y Victor K. Ng, , 1993, Measuring and testing the impact of News an Volatility, *The Journal of Finance* Vol. XLVIII, Nro. 5

Glosten, Lawrence, Ravi Jaganathan, and David Runkle, 1993, On the relationship between then expected value of the volatility of the nominal excess return on stocks, *The Journal of Finance* Vol. XLVIII, Nro. 5

Greene, William H., 1997, Econometric Analysis, *Prentice Hall*, New Jersey

Duan Jin-Chuan, 1995, The Garch option pricing model, *Mathematical Finance* Vol. V Nro.1

Nelson, D., 1990, Conditional heterocedasticiy in asset returns: A new approach, *Econometrica* 59, 347-370

Reiss R. D., Thomas M. 2001, Statistical Analysis of Extreme Values, *Birkhauser Verlag*

Tagliafichi Ricardo A., 2001, The Garch model and their application to the VaR, *XXXI International Astin Colloquium,* Washington 2001

Tagliafichi Ricardo A. 2002, Betas calculated with Garch models provides new parameters for a Portfolio selection with Efficient Frontier, *ICA Cancun 2002*

Tsay Ruey S. 2002, Analysis of Financial Time Series, *John Wiley and Sons*

Wiggins, J.B., 1987, Option Values under stochastic volatility: Theory and empirical tests. *Journal of Financial Economics* 19, 351-372

Zakoian Jean-Michel, 1992, Threshold Heteroskedastic models, *Journal of Economic Dynamics and Control* Nro 18