Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, Vol. 2, No. especial, 3-21
ISSN: 2215-8421

Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial[1]

Enrique Mateus Nieves
Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia (emateus@pedagogica.edu.co)

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de los principios del cálculo resulta bastante problemática, y aunque seamos capaces de enseñar a los estudiantes a resolver más o menos de forma mecánica algunos problemas estándar, algunas derivadas o integrales, tales acciones están muy lejos de lo que supondría una verdadera comprensión de los conceptos y métodos de pensamiento de esta parte de las matemáticas. De ahí que el interés de este estudio señala dos niveles para la difusión del saber: "El saber erudito y el saber sabio" (Chevallard, 1997, p. 25). Con esta distinción, pretende ofrecer a los estudiantes de cálculo diferencial una visión epistemológica de la derivada, sus raíces, construcción de concepto y su posterior evolución, buscando enriquecer el manejo y apropiación de la comprensión de estos conceptos, para disminuir la mortalidad académica y bajar los índices de deserción escolar. También tiene como interés ampliar y reconstruir el significado de los conceptos del cálculo, buscando escenarios alternativos en que se exhiban características, propiedades o relaciones, de tal forma que el proceso para acercarnos a un concepto sea mediante múltiples referencias y no solo por las definiciones.

Al final del escrito, resalto la importancia del uso de los libros de texto en el ámbito escolar, debido a que tienen el mérito de hacer accesible el saber sabio, desprenderlo del saber erudito y ponerlo al alcance de personas que apenas cursan la media vocacional o los primeros semestres de pregrado. En ese sentido, los textos abordan, organizan y aclaran ideas del origen un poco confuso del cálculo y las convierten en un medio importante para quien desea acercarse a las ideas puras del cálculo mismo. Para este escrito tomé como referencia los textos de cálculo de Tom Apóstol (tomo I, segunda edición, 1978) y de Roland E. Larson (tercera edición, 1997).

---

[1] Este documento es resultado de la investigación *Epistemología de la derivada como fundamento del cálculo diferencial*, llevada a cabo como requisito para optar el título de Magíster en Educación con énfasis en Lectoescritura y Matemáticas, de la Facultad de Educación de la Universidad Externado de Colombia, desarrollada con la asesoría del profesor Marco Antonio Feria.

Cabe recordar que para que el proceso enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial sea asertivo, el docente debe tratar de armonizar adecuadamente las dos componentes que lo integran: el componente heurístico[2] y los contenidos específicos del pensamiento matemático, que involucran los temas que se van a enseñar, el referente socioepistemológico y hacer uso de la trasposición didáctica. Temas tratados en los siguientes párrafos.

PROBLEMA

Las contribuciones de Newton y Leibniz generaron un impacto teórico-conceptual, en el concepto de la derivada, que se evidencia en los textos de cálculo de Apóstol y Larson. Probar o refutar esta hipótesis lleva a confirmar o negar el papel que desempeña la evolución histórica como variable dentro del proceso de selección y organización de conocimiento, y concederle un estatus dentro de la construcción conceptual del cálculo y de las ciencias, en general. La actividad matemática, de hecho, no está separada de sistema cultural; se admite que la producción científica corresponde a una práctica humana. Entonces, los avances matemáticos se encuentran asociados con la dinámica del sistema cultural, que participa como variable en el proceso de formulación del conocimiento.

OBJETIVO

Comparar qué concepción epistemológica del concepto de derivada involucra los trabajos de Newton y Leibniz, caracterizando los obstáculos epistemológicos que involucra tal concepto, para determinar sus cambios, la presentación y el uso de la trasposición didáctica, que se evidencia en los libros de cálculo de Apóstol y Larson.

MARCO TEÓRICO

Para el desarrollo de este estudio se tuvieron en cuenta los aportes de investigación de Fuchssteiner (1997) y Kutzler (1999, citados en Cantoral, 2000, pp. 56-60), los cuales pretenden incidir positivamente en la marcha del sistema didáctico, al proponer condiciones para un funcionamiento óptimo de quienes lo componen en una relación dinámica (profesor, estudiante y saber). Sin embargo, Font (2001, citado en Cantoral, 2000, p. 58) expone que no se

[2] Es decir, se ponen "de manifiesto las técnicas, habilidades, estrategias y actitudes personales de cada individuo". Esta lleva consigo el uso de la heurística (arte del descubrimiento). El término "resolución de problemas se lo han adjudicado al trabajo sobre la didáctica de la enseñanza heurística" (Schoenfeld, 1985).

reducen a proponer e implantar “formas alternativas para una mejor enseñanza”, como otras tradiciones teóricas asumen, sino que Sfard, (1991), Fischbein (1993) y Douady (1995) consideran objeto de estudio los procesos escolares de construcción, transmisión y adquisición de contenidos matemáticos en el contexto del salón de clase. Así, es posible que atiendan a varios aspectos que subyacen en la complejidad de las ideas y los procesos de las matemáticas.

En el caso de los estudios concernientes al cálculo, Cantoral y Mirón (2000) aseveran que una gran mayoría se ubica en la exploración de nociones matemáticas, que exponen los problemas de aprehensión generados por una complejidad intrínseca de los conceptos estudiados. Cornut y Sierpinska (2000, citados por Meel, 2003), por su parte, hablan de las dificultades que muestran los estudiantes, en términos de obstáculos epistemológicos, al intentar “equipararlas” con las reportadas en la historia del desarrollo conceptual de la matemática. Sus trabajos ofrecen listas de obstáculos epistemológicos que afrontan los alumnos al estudiar algunos conceptos, hallazgos que han podido ser utilizados como referencia, pues anticipan algunos comportamientos de los estudiantes durante situaciones de aprendizaje.

Wilhelmi, Godino y Lacasta (2007) mencionan que el saber erudito proviene del trabajo intelectual de una élite científica. Aun encarnado en algún autor, mantiene una riqueza conceptual compuesta de problemas, situaciones y significados que se reduce gradualmente cuando es compartido a una comunidad científica en un primer proceso de transposición, al requerirse para ello un cierto grado de despersonalización. Asimismo, conserva una naturaleza propia del ámbito erudito donde fue creado, ya que no responde a intereses o preocupaciones generalizadas dentro de la sociedad, sino que pertenece a un grupo y nace de sus prácticas y sus necesidades. Un objeto que emerge del saber sabio solo puede llegar a tener existencia como tal dentro de su propio ámbito, cuando su inserción a la ciencia lo hace como útil; su trascendencia social deviene en el momento en que responde a ciertas prácticas sociales y constituye un medio eficaz para resolver problemas de otras esferas.

La investigación socioepistemológica (Cantoral y Farfán, 1998) reconoce ese hecho; no obstante, busca otorgar un estatus de constructor de conocimiento matemático al sistema social y a sus actores —que no necesariamente pertenecen a la élite erudita— y admitir sus prácticas cotidianas y el saber que de ellas se deriva, como el de las etnias, el producido por sociedades que son sometidos mental o físicamente, el que desarrollan grupos sociales específicos (obreros, campesinos, comerciantes, políticos, etc.), e incluso aquel que constituyen los educadores, a través de pedagogías o libros para la enseñanza de una determinada área. Todo este conocimiento, al no ser visto con el mismo estatus que el de carácter científico, se halla olvidado o menospreciado, debido a sus raíces epistemológicas; sin embargo, tiene una realidad objetiva y mantiene una influencia, más o menos explícita, sobre el sistema social en que está incrustado. Al integrarlo al saber enseñable es posible, por una parte, respetar la diversidad cultural de los pueblos; por la otra, desarrollar situaciones de aprendizaje mejor adaptadas a sus condiciones (Chevallard y Bosch, 1996).

TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

De Wikipedia, la enciclopedia libre

Se llama *transposición didáctica* al proceso por el que un saber sabio o saber científico se convierte en un saber objeto de enseñanza. La educación formal es un proceso en el cual ciertos contenidos son transformados en contenidos de la enseñanza. Para que ello sea posible debe operar un doble proceso de descontextualización y recontextualización, que transforma el contenido inicial en un contenido con fines pedagógicos.

En el proceso de traducción de los contenidos podemos identificar algunas operaciones frecuentes: simplificación, modificación y reducción de la complejidad del saber original; así como la moralización del contenido. Generalmente, en la transposición didáctica se dan por sentados saberes anteriores y necesarios para poder moverse en el marco del contenido que se va a enseñar. Así, al partir de algunos problemas de la enseñanza de las matemáticas, Yves Chevallard, plantea, en términos sintéticos, que "la transposición didáctica es la capacidad que desarrolla un sujeto para convertir un conocimiento disciplinar en un conocimiento enseñable y aprendible, y por ello constituye la esencia del acto pedagógico" (1998, p.15).

DIDÁCTICA DE LOS SABERES

La transposición didáctica tiene un peso especial, porque se trata de la fidelidad. En lo didáctico es clave asumir el concepto de transposición didáctica. De acuerdo con esta teoría (Chevallard, 1997), el saber que se va a enseñar se presenta mediante textos de saber. Estos tienen como característica seguir un orden lógico en la presentación de los saberes. Todo el discurso tiene un principio y un fin (autocontención de los textos de saber) y opera por un encadenamiento lógico de razonamientos. Hoy sabemos un hecho fundamental: la coherencia lógica no garantiza el aprendizaje (el ejemplo más conocido es el que nos proporciona la llamada reforma de la matemática moderna).

Esta teoría sugiere que el saber que se va a enseñar difiere cualitativamente del saber erudito (esto, claro está, debido a los fenómenos de la transposición didáctica). En este sentido, se precisan las características del saber enseñable: desincretización, despersonalización, programabilidad, publicidad y control social de los aprendizajes. Este principio se aplica con el nombre de *funcionamiento didáctico de los saberes que proporciona la teoría, la que establece diferentes niveles de explicitación en el discurso didáctico* (Chevallard, 1997), que son:

- **Nociones protomatemáticas**: aquellas cuyas propiedades son utilizadas en la práctica para resolver ciertos problemas

- **Nociones paramatemáticas**: nociones que se utilizan conscientemente (son reconocidas y designadas) como instrumento para describir otros objetos matemáticos, pero no se les considera objetos de estudio en sí mismas.
- **Nociones matemáticas**: objetos de conocimiento construidos, susceptibles de ser enseñados y utilizados en aplicaciones prácticas.

Cabe aclarar que estos niveles de explicitación no son absolutos, pues, a veces, es posible llevar una noción a un nivel superior de explicitación. A este respecto, Chevallard (1997) menciona que la noción paramatemática de demostración puede ser objeto de definiciones lógicas y precisas en la lógica matemática. Estas nociones forman distintos estratos del funcionamiento del conocimiento matemático escolar que es posible dividir en dos grandes grupos: nociones explícitas, que están conformadas por las nociones matemáticas, y nociones implícitas, conformadas por las nociones paramatemáticas y las nociones protomatemáticas. La importancia de estas distinciones en niveles de explicitación es que proporcionan elementos para el análisis del discurso didáctico, en particular en la enseñanza del cálculo diferencial.

Al comparar los *constructos* realizados *por Newton y Leibniz,* con la presentación que hacen Apóstol y Larson, se percibe que el texto de Apóstol sigue una línea de rigor matemático conducente a una aproximación de saber erudito; mientras que en el texto de Larson encontramos un sincretismo didáctico, que conduce a presentar las mismas ideas mediante ilustraciones bastante elaboradas, que hacen más explícito y sencillo el abordaje de dichos temas, trabajados por el cálculo para una persona que apenas comienza a entrar en este amplio mundo de la matemática.

En la comunicación (elemento de la transposición didáctica) se parte de un saber académico que pasa por diversas etapas en las que ese saber es formateado, y en esos pasos se corre riesgo de que el saber académico llegue tergiversado al destinatario (Cantoral y Mirón, 2000). El proceso es así:

1. Saber ***académico*-magisterial**. Todas las fuentes que se emplean para apropiarse del tema que se quiere proponer: los libros más científicos, los textos, etc. Ese saber debe convertirse en:
2. **Un saber** *enseñable* (**primer formateo**): *qué y cómo se presenta*, de manera que suene comprensible y relevante.
3. **El** *saber efectivamente enseñado*: la presentación concreta que sucede en el tiempo y espacio del curso.
4. **El *saber recibido efectivamente por el sujeto que aprende*** (nunca lo es porque el destinatario apropia el saber con las marcas de todo su mundo idiosincrático: sus experiencias, sus conocimientos previos, etc.).

Chevallard (1991) agrega que es necesaria una vigilancia epistemológica que aluda a la atenta mirada que debe haber respecto a la brecha existente entre el saber académico y el saber que se va a enseñar, pues es un aspecto fundamental que debe tener en cuenta el docente en el momento de hacer el proceso enseñanza-aprendizaje del cálculo con sus estudiantes. Una vez instalada la duda sistemática, es posible una ruptura epistemológica que permita al docente deshacerse de la ilusión de transparencia aparente dentro del universo en el cual enseña.

DISEÑO

A partir de la metodología empleada por la bibliometría,[3] se realizó una aproximación al análisis crítico y evaluativo de los textos de cálculo de los autores citados, tomando como referente las concepciones sobre la derivada allí presentadas.

SÍNTESIS DEL ENFOQUE METODOLÓGICO

La investigación tuvo como interés ampliar y reconstruir el significado de los conceptos de derivada dentro del cálculo diferencial, buscando escenarios alternativos donde se exhiban características, propiedades o relaciones, de tal forma que el proceso para acercarnos a un concepto sea a través de múltiples referencias y no solo por las definiciones.

El estudio epistemológico incorpora explicaciones sociales respecto a la construcción del conocimiento: *el cognitivo*, que considera los procesos del pensamiento como base de las explicaciones de las funciones mentales, y la didáctica, que se muestra en estrecha relación entre lo sociocultural y las prácticas humanas asociadas con la construcción del conocimiento (Font y Godino, 2006). La metodología, que rescata una base de significados primarios de los conceptos matemáticos, se basa en estudios de tipo sociológico e intenta, a través de los planteamientos de Font y Godino (2006) sobre la configuración epistémica para el análisis de textos de matemáticas, observar que los tipos de "objetos matemáticos" que se consideran son solo dos: conceptos y procedimientos.

Se trata de una "ontología" para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático y, en general, la actividad matemática, sea profesional o escolar. A partir de estos elementos, es necesario contemplar una ontología formada por los siguientes elementos: lenguaje, situaciones-problema, conceptos, procedimientos, técnicas, proposiciones, propiedades, teoremas y argumentaciones. Estos nueve tipos de objetos se articulan formando configuraciones epistémicas cuyo análisis nos informa de la "anatomía de un texto matemático". Estas nociones pueden ser útiles para describir las características de los textos

[3] **Bibliometría:** "se define como la aplicación de los métodos estadísticos y matemáticos dispuestos para definir los procesos de la comunicación escrita y la naturaleza y el desarrollo de las disciplinas científicas mediante técnicas de recuento y análisis de dicha comunicación. A través de la bibliometría el análisis de textos o documentos propuestos, es posible ver la actividad, estructura y evolución de una ciencia, cuantificar sus resultados y aplicarlos en diferentes campos" (Pritchard, 1969).

matemáticos de distintas épocas y orientación epistemológica; en particular los textos objeto de esta investigación.

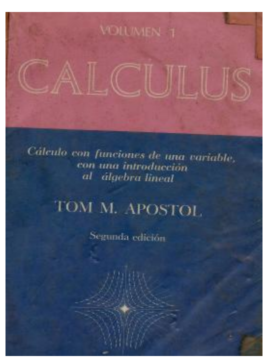
Para ello es necesario adoptar una perspectiva global que aporte un marco de referencia epistemológico en el que esté situado el análisis del texto. Considerando que los tipos de objetos que se ponen en juego en los textos matemáticos son de carácter formal (configuraciones epistémicas axiomáticas), el estudio y las adaptaciones de este tipo de configuraciones axiomáticas en los textos universitarios actuales de los primeros semestres, así como en textos usados en la educación media secundaria, no son muy diferentes. Con esta perspectiva de referencia se realizó el análisis del texto, presentando la configuración epistémica puntual que se pone en juego en dicho texto, y unas conclusiones sobre el tipo de análisis ontosemiótico aplicado.

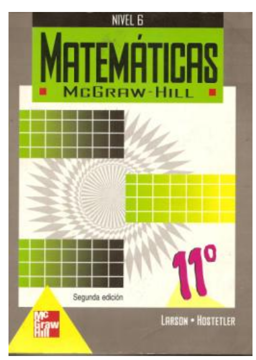
ENFOQUE METODOLÓGICO

La investigación se llevó a cabo en cuatro fases:

- **Fase 1:** adquisición de conocimientos teóricos, que permitió elaborar el marco de referencia mostrado.
- **Fase 2**: determinar las categorías de análisis y la creación de instrumentos de evaluación
- **Fase 3**: revisión de los textos usados en esta investigación.

Como instrumentos usé dos textos guía: el Cálculo de Apóstol y el Cálculo de Larson, con el fin de establecer qué concepción de derivada hay en los dos textos y qué criterios contenidos tienen en cuenta para presentar la derivada de una función





Este estudio incorporó una reflexión teórica, con la cual analiza la naturaleza epistemológica de los conceptos matemáticos que aparecen en los textos de cálculo de Apóstol y Larson, de manera que se precise la existencia de una base de significaciones sobre tales nociones que han determinado alguna reorientación en las ideas matemáticas eruditas de siglos anteriores.

Se buscó hacer un estudio transversal y vertical basado en el concepto existente como fundamento teórico y que, además, permitiera determinar los principios fenomenológicos que caracterizaron los trabajos de la época, referentes a Newton y Leibniz en la creación del cálculo diferencial. También se centró en determinar si las contribuciones de Newton y Leibniz condujeron a considerar el cálculo un sistema organizado, despersonalizado y descontextualizado de su origen, constituido en una fuente referencial de conocimiento, adicional, para ser incorporada a otros estudios teórico-conceptuales de quien quiere tener acceso al conocimiento del cálculo diferencial a través de estos textos.

No se trató de una investigación histórica, pues aunque se sirve de ella, está la intención de aprehender y precisar el origen del conocimiento, en términos de advertir los usos sociales que se le asocian desde su misma génesis, los sentidos y significados de los conceptos, evolución y desarrollo, al igual que su incursión en las instituciones educativas. Desde la perspectiva que el conocimiento es una construcción social, los acercamientos socioculturales dirigen sus esfuerzos a revelar la naturaleza epistemológica del saber, mediante un análisis de las circunstancias sociales y culturales que han permitido su consolidación; asimismo, identifica situaciones que contribuyeron al desarrollo conceptual de la ciencia (Batanero y Godino, 2003). Así, es posible utilizar estos hallazgos para el diseño de situaciones en las cuales el saber se presente desde su propia epistemología. Para el efecto se construyeron siete categorías de análisis, de las cuales surgió la tabla 1:

1. Génesis del concepto de derivada en la historia.
2. Desarrollo del cálculo.
3. Desarrollo de las matemáticas posteriores al cálculo.
4. La derivada en la transposición didáctica.
5. La derivada y en los dos textos de trabajo (saber sabio).
6. Presentación de la derivada y la transposición didáctica en los dos textos de trabajo.
7. Concepciones en **diferentes** autores que conducen al cálculo diferencial.

- **Fase 4**: análisis de la información, conclusiones.

La información recopilada se trabajó por matrices de triangulación, que permitieron ir organizando los datos recogidos de forma sistematizada, para luego orientar ideas, organizar conceptos e ir estudiando la evolución de los conceptos propios del cálculo, a lo largo de los siglos posteriores a su creación. Esa información me permitió hacer inferencias que presento a manera de conclusiones y recomendaciones (al final de este trabajo), para que el cuerpo docente las tenga en cuenta y las aplique, en busca de un mejor desempeño de los estudiantes, y así evitar la alta deserción que regularmente es el producto del bajo rendimiento académico de esta asignatura. En las recomendaciones presento unas preguntas que han surgido al desarrollar este trabajo y que pueden servir como tema para futuras investigaciones.

Tabla 1. Matriz de triangulación

Categorías	Contextos	
	Texto de Apóstol	**Texto de Larson**
Como induce los temas	Comienza con el cálculo integral y pasa al diferencial	Comienza con el cálculo diferencial y luego presenta el integral
Uso de algoritmia	Está centrada en las definiciones dejadas por Newton y Leibniz	Usa la transposición didáctica para presentar los conceptos
Uso de la geometría para presentar conceptos	Es escaso el uso que da. Se limita a representaciones muy concretas para abordar una demostración	Es rico el uso de la geometría para presentar conceptos. Realiza hasta cuatro diagramas geométricos para ilustrar un solo teorema o definición
Uso de la transposición didáctica	Es limitado, ya que presenta conceptos muy rigurosos, tal como los hicieron Newton y Leibniz, con algunas modificaciones que realizaron María Aghnesi, el marqués de l'Hôpital y Fermat, entre otros. Las que reprodujo cuidadosamente en su obra, conservando el grado de originalidad en la formalización y teorización	La utiliza plenamente, ya que enfatiza la importancia de integrar, previo al estudio del cálculo, un lenguaje gráfico como medio que permita la transferencia de campos conceptuales, de comportamientos y formas de una función (Cantoral y Farfán, 1998) mediante el uso de ejemplos, gráficos geométricos y demostraciones detalladas
Uso de la historia matemática	Hace algunas referencias a situaciones históricas que originaron los conceptos del cálculo integral	Expresa detalladamente situaciones de la edad media, menciona quiénes los abordaron y presenta los conceptos formales definidos luego de dos o tres siglos posteriores

RESULTADOS DE LA INVESTIGACIÓN

En la tabla 2 se presenta un paralelo entre los trabajos realizados por Newton y Leibniz, creadores del cálculo, hecho a partir de las aproximaciones presentadas por González (1992) y Pareja Heredia (s. f.), obras relacionadas en la bibliografía que sustenta este trabajo.

Tabla 2. El cálculo según Newton y Leibniz

Por Newton	**Por Leibniz**
• Concibe la derivada de *y = f(x)* como el cociente entre fluxiones $\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}$, donde considera las fluxiones $\overset{\prec}{i}\cdot\dot{y}$ como las velocidades en que cambian los fluentes *x*, *y*. Su concepción es cinemática. • El cociente *dy/dx* lo calcula como la tangente a la parábola $y^2 = ax$ en un punto *M = (x,y)* de la figura. • Utilizó los incrementos infinitamente pequeños en *x* y en *y* como medio para determinar la fluxión o derivada. Era esencialmente el límite del cociente de los incrementos, cuando estos se hacían cada vez más pequeños. • La integral es una integral definida, es el fluente por determinar para una fluxión dada. • La orientación física de Newton radica en el concepto de velocidad. Término central para desarrollar el concepto derivada. • Resolvió problemas de áreas y volúmenes pensando enteramente en términos de cambio relativo. Para él, la diferenciación era básica; este proceso y su inverso resolvían todos los problemas del cálculo y, de hecho, el uso de la sumación para obtener un área, un volumen o un centro de gravedad aparece raramente en sus trabajos. • Utilizó las series para representar funciones, su manera de trabajar era empírica y concreta. • Newton no se molestó en formular reglas, aun cuando pudo haber generalizado fácilmente sus resultados concretos. Aunque inició muchos métodos, no hizo hincapié en ellos.	• Considera el cociente anterior *dy/dx* como cociente entre diferencias. • Trató directamente con los incrementos infinitamente pequeños en *x* y en *y*, es decir, con diferenciales, y determinó las relaciones entre ellos. • Considera el cociente anterior dy/dx como cociente entre diferencias. • Para Leibniz, sin embargo, el cociente *dy/dx* era “simplemente” un cociente con interpretación geométrica clara. Los problemas de interpretación se volvían más agudos al considerar derivadas de mayor orden. • La preocupación filosófica en Leibniz *fue* por las partículas últimas de la materia, que llamó *monadas*. • La integral es una suma infinita de diferenciales. • Pensaba primero en términos de sumación, aunque, por supuesto, estas sumaciones se calcularan mediante antidiferenciación. • Prefería la forma cerrada de series infinitas, para buscar resultados en términos finitos, utilizando las funciones trigonométricas y logarítmicas cuando no sirvieran las funciones algebraicas. • Leibniz vio las ampliaciones a largo plazo de las nuevas ideas que gestaba el naciente cálculo. • Leibniz estableció los cánones del cálculo, el sistema de reglas y fórmulas.

DIFERENCIAS Y SIMILITUDES ENTRE LOS TRABAJOS DE NEWTON Y LEIBNIZ

- Tanto a Newton como a Leibniz se les debe reconocer que vieran el cálculo como un método nuevo aplicable a muchos tipos de funciones.
- Ambos “aritmetizaron” el cálculo, es decir, construyeron en este conceptos algebraicos. La notación y las técnicas algebraicas por ambos no solo les proporcionaron un instrumento más efectivo que la geometría, sino que permitieron tratar con la misma

técnica muchos problemas geométricos y físicos diferentes.

- La manera de enfocar el cálculo infinitesimal de Newton era potencialmente más fácil de darle rigor que la de Leibniz, aunque la metodología de este era más fluida y práctica en las aplicaciones.
- Los ingleses pensaron que podrían conseguir el rigor en ambos enfoques, al intentar ligarlos a la geometría de Euclides; pero confundieron los momentos de Newton (sus incrementos indivisibles) con sus fluxiones, las cuales se refieren a funciones continuas. Los continentales, siguiendo a Leibniz, trabajaron con diferenciales e intentaron dotar de rigor a este concepto. Las diferenciales se consideraban infinitesimales, es decir, cantidades no nulas, pero de ningún tamaño finito o, a veces, como cero.
- Al no poseer en esos tiempos un concepto claro de límite y de función, los fundamentos del cálculo infinitesimal presentan una falta de rigor, muy alejada del carácter propio de la matemática. La presentación de Leibniz es poco rigurosa, pues presenta las diferenciales como entidades extrañas que, aunque las define, no se comportan como incrementos. Por su parte, el cálculo de fluxiones de Newton se basa en algunas demostraciones algebraicas que tampoco son convincentes.
- Esta falta de rigor en el naciente cálculo creó varias reclamaciones de los matemáticos de la época. Ni Newton ni Leibniz defendieron rigurosamente sus conceptos fundamentales (Badillo, 2003); ambos vacilaron en sus definiciones de la derivada y de las diferenciales. Newton no creyó que había partido de la geometría griega, mientras que Leibniz sí lo reconoció.
- Leibniz, menos preocupado por la justificación última de sus procedimientos que Newton, sentía que aquella se apoyaba en la efectividad de estos. Acentuaba el valor algorítmico o de procedimiento de lo que había creado. De alguna manera, tenía confianza en que si formulaba claramente las reglas de operación, y si estas se aplicaban adecuadamente, se obtendrían resultados razonables y correctos, aunque pudieran ser dudosos los significados de los símbolos relacionados.
- Es evidente que ni Newton ni Leibniz lograron clarificar, y mucho menos precisar, los conceptos básicos del cálculo, como son: la derivada y la integral. Al ser incapaces de dominarlos adecuadamente, confiaron en la coherencia de los resultados y la fecundidad de los métodos para seguir adelante sin rigor.
- Las aplicaciones del cálculo determinaron enteramente la dirección del análisis del siglo xviii, y en mayor medida el trabajo de Leibniz. Leibniz dedicaba días enteros a definir la notación que se usa hasta nuestros días, mientras que Newton no le daba importancia a este aspecto.
- Debido a su facilidad el cálculo de Leibniz, empezó a cosechar grandes éxitos. Sus seguidores se preocupaban menos de sus aspectos lógicos y más de sus aplicaciones, ya que era un cálculo que funcionaba.
- Antes se habían calculado áreas, volumen y tangentes, pero eran razonamientos particulares para cada caso concreto, sin que se observara con claridad que el cálculo de áreas y el de tangentes son inversos uno del otro y de carácter universal, no particular.
- El nuevo cálculo creado por estos dos matemáticos llegó a convertirse en universal, en cuanto se aplica del mismo modo a todo tipo de funciones, ya que Newton y Leibniz lo aplicaron con éxito para calcular: áreas como la cisoide o la cicloide, tangentes,

problemas geométricos, longitudes de arco, y para problemas de máximos y mínimos, entre otros.

- En definitiva, ambos desarrollan el mismo cálculo desde puntos de vista distintos y observan, simultáneamente, como inversos los procesos de diferenciación e integración. A pesar de las diferencias de concepto, ambos hacen cálculos de la misma forma, como un proceso inverso de derivadas.

Conclusiones

Respecto al concepto epistemológico de derivada creado por Newton y Leibniz

El desarrollo de esta investigación ha dejado ver la importancia de estudiar el concepto de derivada mediante un acercamiento que hace hincapié en el tratamiento de cada uno de los conceptos que la definieron y su orden, atendiendo a sus propiedades y favoreciendo estrategias de análisis para lograr el tránsito entre una y otra, de manera que la derivada se asuma como la coordinación de las que le suceden. Ello significa que el concepto de derivada se construye mediante la síntesis que resulta del estudio de cada orden de derivada, donde se han identificado características y relaciones entre cada orden, así como la información que proporcionan; de manera que, al coordinar toda esa información, surgen elementos que posibilitan expresar el concepto de derivada como tal, sin perder la esencia del concepto planteado por Newton y Leibniz al momento de crear el cálculo diferencial. Sin embargo, dentro de la línea del programa de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pulido, 1997; Cantoral y Mirón, 2000; Farfán, 1993 y 1997; Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral, 1993a) cuando se formula la tesis que sostiene enfáticamente que la noción de derivada no puede construirse sino hasta después de haber construido la de derivada sucesiva.

Solo hasta el final del siglo XVII se dio la algebrización del cálculo, fenómeno comparable a lo que Viète había hecho en la teoría de ecuaciones, y lo que Descartes y Fermat, en geometría. Quizá el aspecto más importante que se logró fue la reducción a la antidiferenciación del área, volumen y otros problemas que habían sido tratados como sumaciones. Así, los cuatro principales problemas de la época (cambio relativo, tangentes, máximos y mínimos y sumación) quedaron reducidos todos a diferenciación y antidiferenciación.

La enseñanza del cálculo plantea, desde un principio, tanto la derivación como la integración: dos asuntos diferentes que convergen. Desde el siglo xvii se descubrió la convergencia de los dos tipos fundamentales de problemas a los que el cálculo se dirigía: áreas bajo curvas, volúmenes (integrales), y el cálculo de máximos y mínimos, tangentes a curvas en ciertos puntos precisos (derivada). Ambos procesos, la integración y la derivación, convergen, lo que es la esencia precisamente de lo que se conoce como el teorema fundamental del cálculo, al ser dos asuntos diferentes; pero que conducen a la misma conclusión teórica.

A la manera de enfocar el cálculo infinitesimal de Newton era potencialmente más fácil de darle rigor que a la de Leibniz, aunque la metodología de este era más fluida y práctica en las aplicaciones.

Tanto Newton como Leibniz abordaron el problema de la recta tangente para darle respuesta. Sin embargo, pronto se encontró que también era un instrumento para el cálculo de velocidades y en general para el estudio de la variación de una función.

RESPECTO A LOS TEXTOS OBJETO DE ESTE ESTUDIO

El texto de Larson aborda, primero, el cálculo diferencial; posteriormente, completa la parte de la integración. Entre tanto, e Apóstol plantea, primero, el cálculo integral y luego, el diferencial. Los dos enfoques, desde el punto de vista pedagógico y práctico, están plenamente justificados. Lo importante es tener en cuenta los métodos infinitesimales, que son el común denominador usado para resolver los problemas originados de la derivación o la integración: el cálculo de tangentes o el cálculo de áreas a través de sumas infinitas. Tanto a Newton como a Leibniz se les debe reconocer que vieran el cálculo como un método nuevo aplicable a muchos tipos de funciones. Ambos aritmetizaron el cálculo, es decir, construyeron en este conceptos algebraicos (Badillo, 2003). La notación y las técnicas algebraicas por ambos no sólo les proporcionaron un instrumento más efectivo que la geometría, sino tratar con la misma técnica muchos problemas geométricos y físicos diferentes.

En el texto de Apóstol, un aspecto importante es el que se refiere al tránsito entre derivadas. Aquí el estudio de la derivada se ve favorecido por lo algorítmico, lo cual disminuye significativamente la posibilidad de coordinar las distintas órdenes entre derivadas e inhibe algunas características que asocian la correspondencia entre la función y su derivada y viceversa. De este modo, al verse limitado el estudio de gráficas y su análisis, se ven reducidas también las habilidades de predicción de comportamientos y formas gráficas. Al respecto, Cantoral y Farfán (1998) ponen el relieve en integrar, previo al estudio del cálculo, un lenguaje gráfico como medio que permita la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales. Este aspecto prevalece más en el texto de Larson, debido a que utiliza ejemplos con representaciones geométricas exhaustivas, para ilustrar los conceptos definidos, lo que ayuda a comprender mejor el estudio del cálculo.

En la búsqueda de una base de significaciones para los conceptos del cálculo, de acuerdo con lo planteado por Newton y Leibniz, encuentra que en los dos textos algunos han desaparecido del escenario, como la caracterización del punto de inflexión a través de la subtangente máxima; sin embargo, otros continúan vivos. Citemos los siguientes:

- *La caracterización del punto de inflexión a través de argumentos geométricos.* Llaman al punto de inflexión como el lugar geométrico donde ocurre un cambio de concavidad.
- *La caracterización del punto de inflexión a partir de observar el signo de las segundas diferencias.* Conservó la propiedad que guardan las segundas diferencias en un intervalo que contiene al punto de inflexión. Cuando estas modifican su signo, es porque la curva

geométrica contiene un cambio de cóncava a convexa, o viceversa, por lo que el sitio donde se tiene cero de la segunda diferencia es el punto inflexión en la curva.

- *La caracterización del punto de inflexión analíticamente, donde se cumple que la segunda diferencia es igual a cero.*

Los dos textos muestran una relación entre la segunda derivada y el punto de inflexión, basada en criterios en los que se hacen implicaciones a partir de las propiedades analíticas. Granville (1986) apunta que "la segunda derivada cambiará de signo en ese punto (al hacer referencia al punto de inflexión) y si es continua debe anularse…", luego se verifica la siguiente igualdad: en puntos de inflexión $f''(x) = 0$, dicho criterio se verifica mediante las propiedades de las derivadas que fortalece la algoritmia, mas no desarrolla una idea clara del punto de inflexión, es decir, no atiende al regreso en la implicación, pues no importa realmente el punto, sino el uso de algoritmos para determinarlo en la curva. Tal circunstancia genera la siguiente inquietud: ¿es posible establecer las condiciones que caractericen a un punto de inflexión? Con la intención de dotar de significados múltiples a la segunda derivada, nos preguntamos también por las nociones que se asocian, y es evidente que el punto de inflexión tiene un sitio relevante en el estudio de la segunda derivada. Ahora, parece natural que nuestra búsqueda de referentes, con el fin de determinar el punto de inflexión, se hallan en los procesos de construcción de la obra matemática, en aquellos momentos en que se problematizaron situaciones, se fundamentaban propiedades geométricas y se estudiaron a las segundas variaciones, precisando así una base de significados primarios, entendidos como las reflexiones que son la parte fundamental en la construcción del conocimiento, al igual que las prácticas asociadas.

El concepto de límite tuvo una elaboración posterior. Tomó más de un siglo para que este concepto se llegara a utilizar como la base fundamental del cálculo diferencial y del cálculo integral. La lección que este nos ofrece es en el sentido de entender que el concepto de límite y toda la operatoria que tiene que ver con los límites son funcionales a la derivación y a la integración misma; que deben verse como un instrumento para la derivación y la integración, y no como algo en sí mismo. Los límites y el cálculo de límites, si no se explican y enseñan inmersos dentro de los métodos de la derivación o la integración, dejan de tener un significado para el estudiante o para la persona que desea comprenderlos. En los textos objeto de esta investigación, ambos rescatan la importancia del manejo del concepto de límite como elemento fundamental del cálculo diferencial e integral.

Ha sido reconocida, desde hace algún tiempo, la importancia del uso de la historia de la matemática en la enseñanza de las matemáticas. Los textos objeto de esta investigación hacen constantes referencias a pasajes históricos y, en ciertas ocasiones, el orden histórico se ha tomado como base en la explicación de contenidos. El hecho de que en los últimos años se haya incrementado la presencia y uso de la historia como un recurso decisivo en la enseñanza de las matemáticas, conduce a pensar que se trata de otro signo del avance de visiones filosóficas que se alejan de los paradigmas dominantes del pasado. Es decir, el desarrollo de una mayor intervención de la historia de las matemáticas en su enseñanza revela la existencia de modificaciones en la percepción que se tiene de la naturaleza de las matemáticas. Hasta dónde ha evolucionado esto es difícil de precisar.

Los libros de texto, de Apóstol y Larson, posibilitan, además, el control social de los aprendizajes. Debido a que al tener un reconocimiento social y cultural importante funcionan como una autoridad moral con un estatus de verdad —en cuanto al contenido que tratan y a la forma como plantean problemas o aplican conceptos—, implícitamente, autorizan el uso de una didáctica sustentada a partir de los principios sobre los que se fundamenta el libro (filosófica o psicológicamente), o bien atendiendo a la forma en que se presentan sus contenidos, lo cual lleva a creencias muy generalizadas acerca de que el aprendizaje es isomorfo en relación con el orden de exposición del saber (Chevallard, 1985).

Un rasgo de los libros analizados es su carácter geométrico, que prevalece en las presentaciones y argumentaciones; incluso los títulos de los capítulos evocan el uso del cálculo como un instrumento para resolver ciertas problemáticas ya conocidas por la geometría. Algunas caracterizaciones de los conceptos del cálculo tienen fundamento geométrico, por lo cual no se requiere disponer de mayores argumentos que algunas nociones de la geometría.

La exposición de los contenidos no parece ser aleatoria. Tanto Apóstol como Larson se ocuparon por presentar el saber matemático de forma lógica, es decir, atendiendo a una evolución de una manera gradual: las caracterizaciones, la formulación de definiciones, la presentación de ejemplos y algunos problemas resueltos. Así, las obras tienen autonomía propia y no dependen de otros tratados o artículos. La inclusión de ejemplos en cada capítulo intenta ilustrar al lector. No se trata solo de ejercicios resueltos. En mi opinión, tienen un fin más profundo: distinguir la naturaleza de la obra respecto a la de otros trabajos, como los de carácter erudito. Sistemáticamente, Apóstol y Larson incorporaron ejemplos con la intención de ampliar las explicaciones.

Respecto al papel que desempeñan estos dos libros, he identificado, en principio, la importancia que tienen al abordar y aclarar ideas del origen oscuro del cálculo, los textos de Apóstol y Larson las aclaran y las organizan, y las convierten en un medio importante para quien quiere acercarse a las ideas del cálculo. El texto de Apóstol se trabaja en la escena del medio escolar universitario, pues presenta profundidad, secuencia y orden en los temas. Entre tanto, la versión del texto de Larson es creada para manejarla en la educación media y en algunos programas de pregrado durante el primer semestre, porque presenta ideas ordenadas, poco profundas en demostraciones; pero sí muestra la importancia y validez de cada tema tratado, al enriquecerlo con representaciones geométricas que ayudan al lector a tomar una idea clara, precisa y objetiva del tema tratado. Este trabajo lo presenta sin descuidar la vigilancia epistemológica planteada por Chevallard.

Tomando en cuenta las caracterizaciones de los conceptos que se hallan en los actuales libros de texto de Apóstol y Larson, se puede concluir que el desarrollo del cálculo no se dio de forma lineal dentro de una élite erudita. Para constituir una base de significados de cálculo diferencial, se requirió el cuidado en la organización, caracterización y argumentación desde distintos planos, incluyendo las ideas que aportaron los autores de obras anteriores a su difusión, a quienes se debe un grado de originalidad en la formalización de esta rama de las matemáticas.

Para términos teóricos de esta investigación, considero este fenómeno una transposición didáctica de forma inversa, ya que el saber organizado y reformulado dentro de un ambiente no erudito sirvió de base para el desarrollo teórico de orden formal del cálculo. Así, hemos determinado un puente que parte de la academia erudita, deviene en el saber dispuesto para la difusión y nuevamente ejerce algún tipo de influencia en la gente del ámbito erudito de años posteriores, preocupada por otorgar al cálculo un fundamento teórico. Por supuesto, no se niega un tránsito directo de las obras clásicas a los trabajos eruditos de fundamentación. Tal flujo, en sentido inverso de la transposición didáctica, no responde a los mecanismos de control que ejerce la noosfera; se determina por otras variables totalmente independientes, como los reclamos de la sociedad, que conforma a través de sus individuos un estatus y determinado valor al conocimiento, por lo que el ámbito erudito reconoce, valida y crea la necesidad de dotar de sustento a un saber ampliamente usado.

Una de las tendencias generales más difundidas hoy consiste en la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática, más bien que en la mera transferencia de contenidos. La matemática es, sobre todo, saber hacer; es una ciencia en la que el método claramente predomina sobre el contenido. Por ello se concede una gran importancia al estudio de las cuestiones, en buena parte colindantes con la psicología cognitiva, que se refieren a los procesos mentales de resolución de problemas. En este aspecto sobresale el texto de Larson sobre el de Apóstol, por su riqueza en ejemplos que clarifican el manejo de un tema; mientras que el texto de Apóstol se limita a presentar una definición o teorema y máximo tres ejercicios que lo ejemplifiquen, haciendo algunas demostraciones y dejando las otras como ejercicio para el lector. Por esto considero que una persona que comienza a conocer el cálculo bien le sería comenzar a estudiarlo con el texto de Larson, para luego profundizarlo con el texto de Apóstol.

Es necesario romper, con todos los medios, la idea preconcebida, y fuertemente arraigada en nuestra sociedad, proveniente probablemente de bloqueos iniciales en la niñez de muchos, que la matemática es necesariamente aburrida, abstrusa, inútil, inhumana y muy difícil. Para ello vale recordar que la actividad matemática ha tenido desde siempre un componente lúdico que ha sido el que ha dado lugar a una buena parte de las creaciones más interesantes que en ella han surgido. Insisto en la tarea del educador: es fundamental su manejo y dominio de los temas presentados en cálculo, para que esta situación no se siga fomentando en los estudiantes y, como consecuencia, abandono del curso por fatiga, cansancio e incomprensión de los temas presentados.

La enseñanza tradicional de la derivada en el cálculo diferencial suele caracterizarse por conceder demasiada importancia a los desarrollos algorítmicos y al manejo procedimental y mecánico de los aspectos simbólicos de los objetos matemáticos que involucra (conceptos, proposiciones, etc.). Sin embargo, el interés habrá que ponerlo en la comprensión[4] de los procesos matemáticos, más que en la ejecución de ciertas rutinas. A través de la experiencia docente he comprobado que los estudiantes construyen un conocimiento matemático parcial, constituido principalmente por algoritmos. Esto permite señalar que los educandos manejan rutinariamente los símbolos, pero no logran otorgar significado a las ideas básicas de cálculo. La falta de articulación entre sus expresiones, en lenguaje natural y otros sistemas de

[4] “El concepto de comprensión refiere a la acción de comprender y a la facultad, capacidad o perspicacia para entender y penetrar las cosas. La comprensión es, a su vez, una actitud tolerante y el conjunto de cualidades que integran una idea” (Diccionario de la lengua española, 2001).

representación, dificulta la apropiación de las nociones involucradas; por ende, impide su transferencia a otros contextos (más allá de los estándares de aprendizaje).

Los resultados de esta investigación pretenden incidir positivamente en la marcha del sistema didáctico de la enseñanza del cálculo, al proponer condiciones para un funcionamiento óptimo de quienes lo componen en una relación dinámica (profesor, estudiante y saber).

SUGERENCIAS

El desarrollo de este trabajo ha dejado una serie de preguntas que pueden ser utilizadas para realizar otras investigaciones. Entre ellas están:

- ¿La creación del cálculo diferencial e integral ofreció un avance al desarrollo de las matemáticas posteriores al siglo XVIII?
- ¿La falta de rigor en la creación del cálculo diferencial e integral en qué forma influenció en la obra de María Agnesi y el marqués de l'Hôpital?
- ¿Los trabajos de Agustín-Luis Cauchy solventan la necesidad de construcción de la teoría de límites como base del análisis matemático mediante la formalización del concepto de límite?
- ¿De qué forma temáticas sobre el análisis, el cálculo de variaciones, las ecuaciones diferenciales, las ecuaciones en derivadas parciales, el análisis de Fourier y las funciones generadoras fueron aplicadas con éxito en la aproximación de problemas discretos mediante el uso de los continuos planteados por el cálculo diferencial e integral?
- ¿De qué forma la teoría de funciones de LaGrange influyó en la creación de la teoría de los límites del siglo xvii, para la cual la tesis de D'Alembert sostenía que la teoría de los ceros de Euler y la notación de los diferenciales dependen para su justificación del lenguaje de los límites?
- ¿Cómo el cálculo de variaciones surgido en el siglo xviii, con los trabajos de Euler y LaGrange, creó la forma de una teoría matemática rigurosa y posibilitó la resolución de un gran número de problemas de carácter práctico, referidos a la determinación de los extremos de las funciones que no admitían resolución con los medios del recientemente aparecido análisis infinitesimal?
- ¿Desde qué perspectiva teórica de la disciplina matemática trabajaron Poisson, Liouville y Fourier las ecuaciones en derivadas parciales y el análisis armónico en la construcción de la teoría formal del análisis complejo?
- ¿Cuál es el aporte que las cortaduras de Dedekind hacen respecto a la existencia del continuo de los números reales sin probar su existencia, tomando como referente la aritmetización del análisis, hecha por Weierstrass en el siglo XIX, cuando introdujo la definición ε-δ de límite?

REFERENCIAS

Badillo, R. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Barcelona, España.

Batanero, C. y Godino, J. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Beth, E.W. y Piaget, J. (1980). *Epistemología matemática y psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real*. Barcelona: Grijalbo.

Borasi, R. (1986). *On the nature of problems. Educational Studies of Mathematics*, 17, 125-141.

Cantoral, R. (1993).Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. En E. Agard (Eds.). *Memorias de la VII Reunión Centroamericana y del Caribe en Formación de profesores e Investigadores en Matemática Educativa*. (pp 397-410) Panamá: Universidad de Panamá.

Cantoral, E. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon. Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática* (42), 353-372.

Cantoral, R. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R.; Farfán, R. M.; Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, (83-102). Recuperado el 9 de septiembre de 2011, de http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33509905.pdf.

Cantoral, R. y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange, al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 3 (3), 265-292.

Charlot, B. (1991). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. Documento procedente de la conferencia pronunciada en Cannes, Francia.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y. (1998). *Análisis de prácticas de enseñanza y didáctica de las matemáticas: una aproximación antropológica.* s. l.: Universite de la Rochèlle.

Chevellard,Y. y Bosch,M. (1996). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Barcelona: Ice-Horsori.

Chevellard,Y. (1991). *La transposición didáctique. De su savoir savant ansavoir enseigná, la Penseé Sauvege.* Grenoble,2a edición.

Contreras, A.; Font, V.; Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25 (2), 151-186.

Dijk, T. van (1977). *Text and context*. London: Logman.

Durán, J. A. (1996). *Historia, con personajes, de los conceptos del cálculo*. Madrid: Alianza.

Duval, R. (1997). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En *Investigaciones en matemática educativa ii*. México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa,* 8.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2-3), 237-284.

González, M. U. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo xviii*. Madrid: Alianza.

Granville,W. (1985). Cálculo Diferencial e Integral. México: Limusa.

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática. Clame. *Revista del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa,* 6 (3), 21-27.

Newton, I. (s. f.). *Newton's Principia mathematica: A revision of Motte's translation by Florian Cajori.* Berkeley: University of California Press.

Pareja Heredia, D. (s. f.). Aproximación a la epistemología de las matemáticas. Recuperado de http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/Epistemolog%C3%ADa.%20Introducci%C3%B3n%20y%20Propuesta%20Metodol%C3%B3gica.pdf.

Pritchard, A. (1969). Statiscal bibliography or bibliometrics. *Journal of Documentation,* 25 (4).

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Steiner, H. G. (1987). Theory of mathematics education: an introduction. *For the Learning of Mathematics*, 5 (2), 11-17.

Vargas, I. (2001). *Tratado de métodos de series y fluxiones*. México: Facultad de Ciencias de la UNAM.

Wilhelmi, M. R.; Lacasta, E. y Godino, J. D. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 27 (1), 77-120.